

# Solutions multiples pour les écoulements tridimensionnels en rotation

Emerson Barbosa, Olivier Daube

CEMIF–LME, 40, rue du Pelvoux, CE 1455 Courcouronnes, 91020 Evry cedex, France

Reçu le 19 juillet 2002 ; accepté après révision le 26 septembre 2002

Note présentée par Sébastien Candel.

---

## Résumé

La rupture de l'axisymétrie des écoulements entraînés par la rotation d'un disque au fond d'une cuve cylindrique de rapport de forme  $h = 1$  est étudiée numériquement. Au delà d'un nombre de Reynolds critique, l'écoulement bifurque vers des solutions tridimensionnelles. Les caractéristiques spatiales et temporelles des branches atteintes sont analysées. *Pour citer cet article : E. Barbosa, O. Daube, C. R. Mécanique 330 (2002) 791–796.*  
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**mécanique des fluides / écoulement en rotation / brisure de l'axisymétrie / transition / simulation numérique direct**

## Multiple solutions for three-dimensional swirling flows

## Abstract

The symmetry-breaking in a swirling flow generated inside a cylindrical tank of aspect ratio  $h = 1$  by the rotation of one lid is studied numerically. Beyond a critical Reynolds number, the flow undergoes a bifurcation to three-dimensional solutions. The spatial and temporal behaviour on these branches are examined. *To cite this article : E. Barbosa, O. Daube, C. R. Mécanique 330 (2002) 791–796.*  
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**fluid mechanics / rotating flow / symmetry-breaking / transition / direct numerical simulation**

---

## Abridged English version

The flow in a cylindrical tank of radius  $R_0$  and height  $H$  filled with an incompressible fluid of kinematic viscosity  $\nu$ , and driven by the rotation of one of its endwalls at constant angular velocity  $\Omega_0$  is studied. Experiments [1,2] over a range of governing parameters, the Reynolds number  $Re = \Omega_0 R_0^2 / \nu$  and the aspect ratio  $h = H/R_0 > 1$ , have evidenced recirculation zones along the symmetry axis referred to as axisymmetric vortex breakdowns. Most of the numerical investigations have been carried out under the assumption of axisymmetry, and some three-dimensional computations have been recently performed for aspect ratios  $h > 1.5$  [3–6]. In this paper, we investigate the bifurcations that undergoes the flow in a cavity of aspect ratio  $h = 1$  and for  $Re \leq 5900$ . The counter-clockwise driving lid is the lower one ( $z = 0$ ).

The full three-dimensional Navier–Stokes equations, written in velocity–pressure formulation with cylindrical coordinates, are made dimensionless with respect to the length scale  $R_0$  and the time scale  $1/\Omega_0$ . The main features of the code (see [7] for details) are the following. The time-marching procedure is based upon a second-order semi-implicit scheme (Euler backward scheme for the diffusion terms,

---

Adresse e-mail : barbosa@cemif.univ-evry.fr (E. Barbosa).

Adams–Bashforth extrapolation for the convection ones). The velocity–pressure coupling is handled with a projection method. The spatial integration is carried out with mimetic finite differences operators. A MAC staggered arrangement is employed for the variables. The mimetic discrete operators are rigorously derived from the discrete counterparts of the Gauss theorem for the divergence and from the Stokes theorem for the vorticity. The discrete gradient operator is defined as the negative adjoint of the discrete divergence. Doing so, no artificial boundary conditions are required on the axis  $r = 0$ . Truncated Fourier series were used in the azimuthal direction. The computations were performed on a uniform grid in  $(r, \theta, z)$  with  $101 \times 32 \times 101$  nodes and a time-step  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$  in revolutions unit times. In this paper, two methodologies were used in order to investigate the three-dimensional regimes.

The first computational approach consists in two steps: (i) an axisymmetric steady base flow is computed by means of a preconditioned Newton method [8]; (ii) the governing equations written in perturbation form with respect to the base flow are solved, in linearized form or not. The initial conditions for the velocity are a randomly distributed initial perturbation of order  $10^{-3}$ . The nonaxisymmetric regimes are detected by examining the time evolution of the fluctuating kinetic energy  $E'(k)$  of each azimuthal Fourier mode  $k$ .

*Linear stability analysis.* – The growth rate  $\sigma_k$  of the modes  $k = 0$  to 5 is plotted on Fig. 1(a). The  $k = 2$  mode is recognized as the most critical one since  $\sigma_2$  becomes positive at  $Re_c \simeq 2450$ , whereas  $\sigma_k < 0$  for the others modes. Note that the crossing point of the curves  $\sigma_2$  and  $\sigma_3$  at  $Re_{\mathcal{L}} \in [3800, 3850]$ . For  $Re < Re_{\mathcal{L}}$ ,  $\sigma_2$  is larger than  $\sigma_3$  whereas the contrary is observed for  $Re > Re_{\mathcal{L}}$ . Moreover, Fig. 1(b) shows that the modes  $k = 2$  and 3 have the same spatial location, a fact that enables these modes to interact by nonlinear couplings.

*Nonlinear periodic solutions.* – The base flow becomes unstable beyond the critical threshold  $Re_c \simeq 2500$  and the solution for  $Re = 2550$  is detailed. The time evolution of  $E'(k)$ ,  $k = 0$  to 10 is displayed on Fig. 2(a). It can be seen that the even modes saturate at a finite level of energy which is maximum for  $k = 2$ , whereas the odd modes are damped. From the time history of the fluctuating azimuthal velocity  $v'$  at  $(0.5, 0, 0.5h)$  on Fig. 2(b), it follows that the solution is oscillatory with a fundamental frequency  $f_2 = 0.08$  times the rotation one. This value agrees very well with the critical frequency  $f_{cr} = 0.0766$  predicted by Gelfgat et al. [9]. Moreover, we have noticed that the amplitude of the oscillations of  $v'$  varies as  $(Re - Re_c)^{1/2}$  in the neighborhood of the threshold. In view of these results, we conclude that the base flow undergoes a supercritical Hopf bifurcation at  $Re_c$  induced by the leading mode  $k = 2$ , and thus the axisymmetry –  $SO(2)$  symmetry – is broken. As pointed out by Knobloch [10] and also numerically by Marques and Lopez [4], the result is a rotating wave state (RW). In our case, the  $k = 2$  RW (not shown here) travels anti-clockwise with a period  $2 \times T_2 = 2/f_2$ . When  $Re$  is further increased, our computations show that the  $k = 2$  RW undergoes a subcritical Naimark–Sacker bifurcation (Hopf for limit cycles) for  $Re_{2,3} \in [4020, 4025]$ . As pointed out by the time sequence of  $v'$  contours in the plane  $z = 0.5h$  (Fig. 3), the bifurcated state corresponds to a  $k = 3$  RW which propagates clockwise with a period  $3 \times T_3 = 58.8$  in revolutions unit times for  $Re = 4500$ . Since the difference between  $Re_{\mathcal{L}}$  and  $Re_{2,3}$  is only 5%, one can think that the second bifurcation is due to the fact that  $\sigma_3$  becomes larger than  $\sigma_2$ .

The previous computational approach are obviously unable to detect possible multiple states and moreover its physical significance is ambiguous. Therefore, the full three-dimensional Navier–Stokes equations were solved using the following initial conditions:

(1) Starting from the calculated  $k = 2$  RW state for  $Re = 2800$  and increasing  $Re$  up to 5900, the  $k = 2$  RW was shown to jump on the  $f_3$  branch at  $Re_{2,3} \in [5000, 5100]$ . The fact that the  $k = 2$  RW is observed beyond the crossing point  $Re_{\mathcal{L}}$  can be explained as follows: such an initialization process provides enough energy to the  $k = 2$  mode to resist the  $k = 3$  mode which has the largest growth rate. On the other hand, starting from the  $k = 3$  RW state obtained for  $Re = 5900$  and decreasing  $Re$  down to 2800, the flow remains on the  $f = 3$  branch for  $3600 < Re_{2,3} < 3700$  and sets in with a  $k = 2$  RW below this critical value. This range agrees with the crossing point  $Re_{\mathcal{L}}$  to within 5% and thus, the results obtained can be interpreted in terms of dominant linear growth rate. These simulations, represented in solid line on Fig. 4, highlight an

hysteresis loop for  $3600 < Re < 5100$  and gives more confidence in the subcritical feature of the second bifurcation.

(2) The flow is impulsively started from a rest state. The bifurcation from the  $k = 2$  RW to the  $k = 3$  RW occurs for  $Re_{2,3} \in [3800, 3900]$ , that is to say in a close neighborhood of  $Re_{\mathcal{L}}$ . Each simulation is plotted with a circle on Fig. 4.

This study evidences two regions where the calculated solution does not depend on the initial conditions. For  $Re \in (2500, 3600)$ , only the  $k = 2$  RW is observed and  $\sigma_2$  is dominant. For  $Re \geq 5100$ , our calculations converge on a  $k = 3$  RW and  $\sigma_3$  is the largest linear growth rate. In the region of hysteresis, the reached branch depends on the way the initial kinetic energy is distributed.

Obviously it would be interesting to compare these results with experiments, but few experimental data are available in the literature for this problem. Note that Hirsra et al. [11] show the appearance of a  $k = 4$  RW in a free surface case.

---

## 1. Introduction

L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans une cuve cylindrique de rayon  $R_0$  et de hauteur  $H$  entraîné par la rotation d'un des deux couvercles est étudié. Pour certaines combinaisons du nombre de Reynolds  $Re = \Omega_0 R_0^2 / \nu$  ( $\nu$  : viscosité cinématique ;  $\Omega_0$  : vitesse angulaire constante du rotor) et du rapport d'aspect  $h = H/R_0 > 1$ , des expériences [1,2] ont mis en évidence des zones de recirculation sur l'axe du cylindre, assimilées à des éclatements tourbillonnaires. Ces écoulements ont fait l'objet de nombreuses investigations numériques sous l'hypothèse d'axisymétrie, et la littérature s'est enrichie de récents travaux numériques tridimensionnels [3–6] pour des rapports d'aspect  $h > 1,5$ . Dans cette note, on s'intéresse aux bifurcations subies par l'écoulement dans une cavité telle que  $h = 1$  et pour  $Re \leq 5900$ . Le disque moteur est celui du bas ( $z = 0$ ) et tourne dans le sens direct.

## 2. Méthodes numériques

Les équations de Navier–Stokes tridimensionnelles instationnaires en formulation vitesse–pression sont adimensionnées ( $R_0$  et  $1/\Omega_0$  sont la longueur et le temps caractéristiques) puis exprimées en coordonnées cylindriques. Les grandes lignes du code sont les suivantes (voir [7] pour les détails). La marche en temps repose sur un schéma aux différences finies semi-implicite du second ordre (Euler retardé pour les termes diffusifs et extrapolation Adams–Bashforth pour les termes convectifs). Une méthode de projection permet de traiter le couplage vitesse–pression. L'intégration spatiale est fondée sur une méthode aux différences finies, dans laquelle les opérateurs divergence et rotationnel discrétisés sont obtenus en appliquant une version discrète des théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski sur un maillage décalé de type MAC. L'opérateur gradient discret est défini par la propriété d'être le négatif adjoint de la divergence discrète. On s'affranchit alors de toutes conditions aux limites artificielles sur l'axe  $r = 0$ . Les séries de Fourier sont utilisées pour discrétiser les opérateurs aux dérivées partielles dans la direction azimutale. Les calculs ont été menés sur un maillage uniforme en  $(r, \theta, z)$  de  $101 \times 32 \times 101$  nœuds avec un pas de temps  $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$  tours.

## 3. Calculs en perturbations

La méthodologie utilisée consiste en deux étapes : (i) calcul d'un écoulement de base axisymétrique stationnaire stable ou instable par une méthode de Newton préconditionnée [8] ; (ii) résolution des équations du mouvement sous forme perturbative linéaire ou non. Pour chaque  $Re$ , les conditions initiales sur la vitesse sont une perturbation aléatoire d'ordre  $10^{-3}$  répartie sur tous les modes de Fourier  $k$ . Les régimes non-axisymétriques sont décelés en analysant l'évolution de l'énergie cinétique  $E'(k)$  de chaque mode.

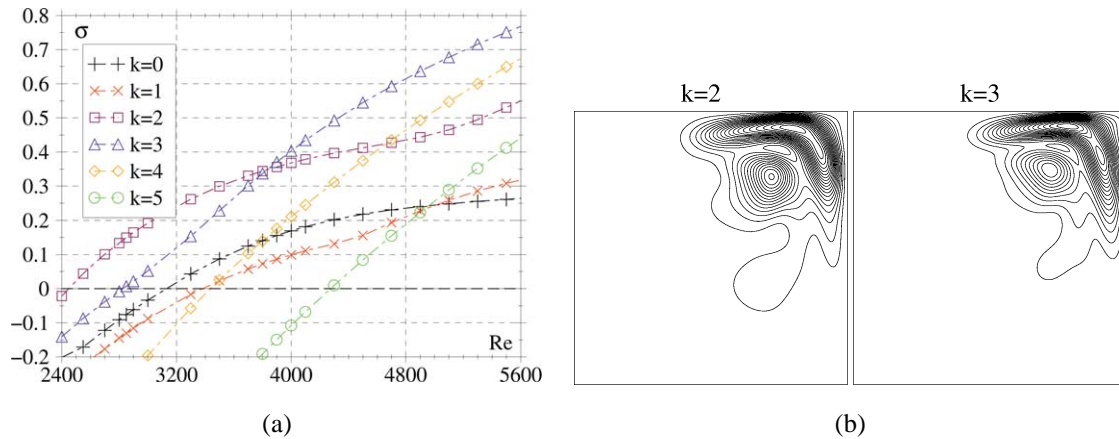
### 3.1. Analyse de stabilité linéaire

Notre attention s’est portée sur les variations du taux de croissance  $\sigma_k$  des modes  $k = 0$  à 5 avec  $Re$  (Fig. 1(a)). Le mode  $k = 2$  apparaît comme le plus instable dans la mesure où  $\sigma_2$  devient positif au delà du seuil de criticité  $Re_c \simeq 2450$ , alors que  $\sigma_k < 0$  pour les autres modes. Par ailleurs, nous remarquons que les courbes de  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  se croisent au point  $Re_{\mathcal{L}} \in [3800, 3850]$  :  $\sigma_2 > \sigma_3$  pour  $Re < Re_{\mathcal{L}}$ , alors que la cette situation s’inverse dès que  $Re > Re_{\mathcal{L}}$ . En outre, la Fig. 1(b) suggère que les modes  $k = 2$  et 3 sont susceptibles d’interagir par couplages non-linéaires puisque leur localisation spatiale coïncide.

### 3.2. Calculs non-linéaires

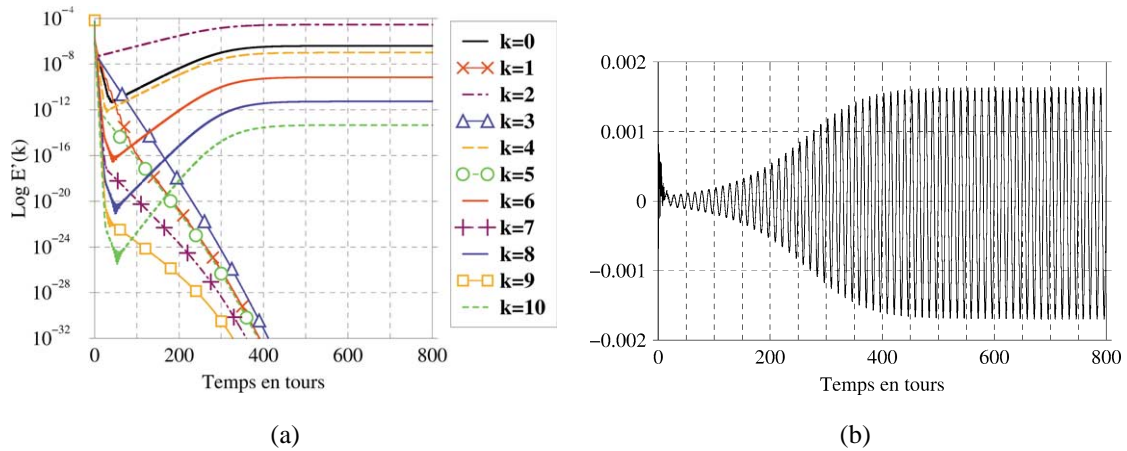
*Première bifurcation.* – L’écoulement de base devient instable vis-à-vis de ces perturbations au delà d’un nombre de Reynolds critique  $Re_c \simeq 2500$ . Ce changement de comportement est illustré en examinant la solution pour  $Re = 2550$ . L’évolution temporelle de  $E'(k)$ ,  $k = 0$  à 10 (Fig. 2(a)), montre que les modes pairs saturent à un niveau fini dont le maximum correspond à  $k = 2$ , alors que les modes impairs décroissent exponentiellement. Ces résultats sont conformes à l’analyse de stabilité linéaire. Par ailleurs, les variations temporelles de la composante azimutale  $v'$  de la perturbation de vitesse au point  $(0,5, 0, 0,5h)$  témoignent du caractère oscillatoire de la solution (Fig. 2(b)). La fréquence fondamentale  $f_2$  vaut 0,08 fois la fréquence de rotation du disque moteur. Cette valeur est en excellent accord avec la fréquence au seuil  $f_c = 0,0766$  obtenue par Gelfgat et al. [9]. En outre, nous avons constaté que l’amplitude des oscillations de  $v'$  varie dans un voisinage de  $Re_c$  comme  $(Re - Re_c)^{1/2}$ . Ces éléments permettent de conclure que l’écoulement de base perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf super-critique dominée par le mode azimutal  $k = 2$ , responsable de la brisure de la symétrie  $SO(2)$  (axisymétrie). Conformément aux prédictions théoriques de Knobloch [10] confirmées par les calculs de Marques et Lopez [4], les solutions bifurquées sont des ondes azimutales tournantes. Ici, les ondes associées au mode dominant  $k = 2$ , notées  $S_2$  et non-montrées pour des raison de place, tournent dans le sens opposé à celui du rotor avec une période  $2 \times T_2 = 2/f_2$ .

*Seconde bifurcation.* – Lorsque le nombre de Reynolds dépasse un second seuil  $Re_{2,3} \in [4020, 4025]$ , les variations temporelles des énergies  $E'(k)$  (non-montrées) mettent en évidence la prédominance du mode  $k = 3$ . Comme le dénote la stroboscopie de la Fig. 3, les solutions obtenues sont encore des ondes tournantes, notées  $S_3$ . Celles-ci sont caractérisées par une symétrie axiale d’ordre trois et une précession



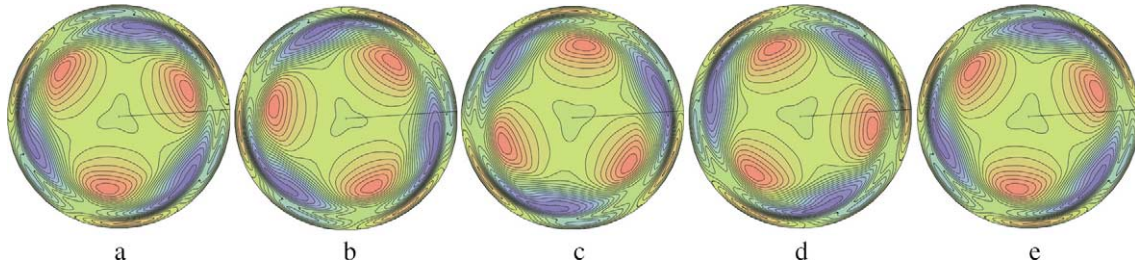
**Figure 1.** Régime linéaire, (a) taux de croissance des modes  $k = 0$  à 5, (b) iso-lignes de l’énergie cinétique des modes  $k = 2$  et 3 dans un semi-plan méridien pour  $Re = 3000$ .

**Figure 1.** Linear regime, (a) growth rate of the modes  $k = 0$  to 5, (b) iso-lines of kinetic energy of the modes  $k = 2$  and 3 in a meridional semi-plane for  $Re = 3000$ .



**Figure 2.** Solution pour  $Re = 2550$ , (a) évolution temporelle de l'énergie cinétique des modes  $k = 0$  à  $10$ , (b) évolution temporelle de la composante azimutale  $v'$  de la perturbation de vitesse au point  $(0.5, 0, 0.5h)$ .

**Figure 2.** Solution for  $Re = 2550$ , (a) time evolution of the kinetic energy of the modes  $k = 0$  to  $10$ , (b) time evolution of fluctuating azimuthal velocity  $v'$  at point  $(0.5, 0, 0.5h)$ .



**Figure 3.** Iso-lignes/valeurs de  $v'$  dans le plan  $z = 0.5h$  pour  $Re = 4500$ . De gauche à droite :  $t = t_0 + iT_3/4$ ;  $i = 0, \dots, 4$ .

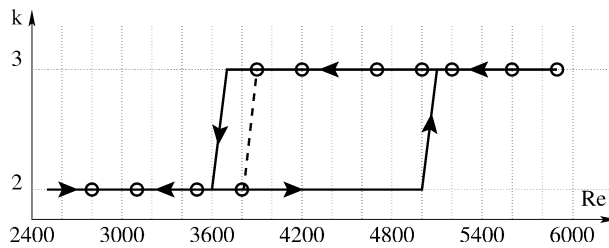
**Figure 3.** Countours of  $v'$  in the plane  $z = 0.5h$  for  $Re = 4500$ . From left to right:  $t = t_0 + iT_3/4$ ;  $i = 0, \dots, 4$ .

azimutale de période  $3 \times T_3$  ( $T_3 = 19,6$  tours pour  $Re = 4500$ ) s'effectuant dans le même sens que le rotor. Il s'ensuit que les cycles limites  $S_2$  de la branche  $f_2$  basculent vers les cycles limites  $S_3$  de la branche  $f_3$  via une bifurcation de Naimark–Sacker (Hopf entre cycles limites) qui semble sous-critique car aucun signe de ralentissement critique n'a été détecté. Par ailleurs, les valeurs de  $Re_{\mathcal{L}}$  et  $Re_{2,3}$  ne diffèrent que de 5% : il est donc raisonnable de penser que la seconde transition est due au fait que  $\sigma_3$  devient plus élevé que  $\sigma_2$ .

#### 4. Simulations tridimensionnelles complètes

Il est clair que la méthodologie précédente ne nous renseigne en rien sur la non-unicité des solutions pouvant exister. En outre, son interprétation physique pose problème. Pour remédier à ces inconvénients, les équations de Navier–Stokes complètes ont été résolues avec différentes conditions initiales :

(1) En partant d'un instantané de la solution  $S_2$  obtenue pour  $Re = 2800$  puis en augmentant le nombre de Reynolds jusqu'à 5900, la transition vers la branche  $f_3$  est observée pour  $Re_{2,3} \in [5000, 5100]$ . On peut penser qu'un tel processus d'initialisation apporte suffisamment d'énergie au mode  $k = 2$  pour résister au mode  $k = 3$  qui a le taux de croissance le plus élevé. Ceci peut expliquer la présence d'ondes  $S_2$  au delà du point de croisement  $Re_{\mathcal{L}}$ . D'autre part, si un instantané de la solution  $S_3$  trouvée pour  $Re = 5900$  est



**Figure 4.** Mode dominant en fonction du nombre de Reynolds. Cas (1) en trait plein, cas (2) représenté par des cercles.

**Figure 4.** Critical mode vs Reynolds number. Case (1) in solid line, case (2) plotted with circles.

pris comme condition initiale et  $Re$  est diminué jusqu'à 2800, l'écoulement saute sur la branche  $f_2$  pour  $Re_{2,3} \in [3600, 3700]$ . Cette valeur concorde à 5% près avec  $Re_{\mathcal{L}}$  et les résultats obtenus peuvent être interprétés en termes de taux de croissance linéaire dominant. Ces simulations, représentées en trait continu sur la Fig. 4, mettent en évidence une boucle d'hystérésis entre ces deux branches pour  $Re \in [3600, 5100]$ , confirmant la nature sous-critique de la seconde bifurcation.

(2) Des démarrages impulsifs du rotor sont simulés pour plusieurs valeurs du paramètre  $Re$  en partant du fluide au repos : la transition depuis la branche  $f_2$  vers la branche  $f_3$  a lieu pour  $Re_{2,3} \in [3800, 3900]$ , c'est-à-dire dans un proche voisinage du point de croisement  $Re_{\mathcal{L}}$ . Nous représentons chaque calcul par un cercle sur la Fig. 4.

## 5. Conclusions

Ces résultats font apparaître deux régions où la branche de solutions atteinte ne dépend pas des conditions initiales. Lorsque  $Re \in [2500, 3600]$ , seules les ondes  $S_2$  sont observées et  $\sigma_2$  est prédominant. Pour  $Re \geq 5100$ , nos calculs convergent systématiquement vers une onde  $S_3$  et  $\sigma_3$  est le plus élevé. Dans la région d'hystérésis, la branche atteinte dépend de la façon dont est distribuée l'énergie cinétique initiale.

Il serait évidemment intéressant de comparer ces résultats avec des expériences. Malheureusement, on trouve peu de données expérimentales pour ce problème dans la littérature. Notons cependant que Hirska et al. [11] ont mis en évidence l'apparition d'un mode 4 dans le cas d'une configuration à surface libre.

**Remerciements.** Les calculs ont été effectués à l'IDRIS dans le cadre du projet 1312.

## Références bibliographiques

- [1] M.P. Escudier, Observations of the flow produced in a cylindrical container by a rotating endwall, *Experiments in Fluids* 2 (1984) 189–196.
- [2] A. Spohn, M. Mory, E.J. Hopfinger, Experiments on vortex breakdown in a confined flow generated by a rotating disc, *J. Fluid Mech.* 370 (1998) 73–99.
- [3] F. Marques, J.M. Lopez, J. Shen, Mode interactions in an enclosed swirling flow: a double Hopf between azimuthal wavenumbers 0 and 2, *J. Fluid Mech.* 455 (2002) 263–281.
- [4] F. Marques, J.M. Lopez, Precessing vortex breakdown mode in a enclosed cylinder flow, *Phys. Fluids* 13 1679–1682.
- [5] F. Sotiropoulos, Y. Ventikos, The three-dimensional structure of a confined flow generated by a rotating disc, *J. Fluid Mech.* 426 (2001) 155–175.
- [6] E. Serre, P. Bontoux, Vortex breakdown in a three-dimensional swirling flow, *J. Fluid Mech.*, submitted.
- [7] E. Barbosa, O. Daube, A finite differences method for 3D incompressible flows in cylindrical coordinates, *Comp. & Fluids* (2002), submitted.
- [8] L.S. Tuckerman, Steady-state solving via Stokes preconditioning. Recursion relations for elliptic operators, in: *Lectures Notes in Phys.*, 1989, pp. 573–577.
- [9] A.Y. Gelfgat, P.Z. Bar-Yoseph, A. Solan, Three-dimensional instability of axisymmetric flow in a rotating lid-cylinder enclosure, *J. Fluid Mech.* 438 (2001) 363–377.
- [10] E. Knobloch, Bifurcations in rotating systems, in: M.R.E. Pactor, A.D. Gilbert (Eds.), *Lectures on Solar Planetary Dynamos*, Cambridge University Press, 1994.
- [11] A.H. Hirska, J.M. Lopez, R. Miraghaie, Symmetry breaking to a rotating wave in a lid-driven cylinder with a free surface: Experimental observation, *Phys. Fluids* 14 (2002) 29–32.