

Structuration de la convection mixte en milieu poreux confiné latéralement et chauffé par le bas : effets d'inertie

Alexandre Delache^a, Najib Ouarzazi^a, Marie-Christine Neel^b

^a Laboratoire de mécanique de Lille, UMR CNRS 8107 – Université de Lille-I, bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

^b Laboratoire d'hydrodynamique complexe, Université d'Avignon, 33, rue Pasteur, 84000 Avignon, France

Reçu le 23 septembre 2002 ; accepté le 26 septembre 2002

Note présentée par Michel Combarous.

Résumé

Nous étudions la naissance de la convection dans un milieu poreux chauffé par le bas en présence d'un écoulement horizontal, et plus particulièrement l'influence de l'inertie poreuse et du rapport de forme transversal a du milieu. Nous montrons que l'état de conduction est déstabilisé au profit de rouleaux longitudinaux fixes (R.L) si a est entier et au profit de rouleaux propagatifs purement transversaux (R.T) si a est inférieur à une valeur limite $a_c < 1$. Pour $a > a_c$ et non entier, la convection naît sous la forme de structures tridimensionnelles (3D) oscillatoires pour $a > 1$ ou sous la forme de R.T pour $a_c < a < 1$ pourvu que le nombre de Reynolds ne dépasse pas une valeur critique Re_K^* . Ces structures sont remplacées par des R.L lorsque $Re_K > Re_K^*$. *Pour citer cet article : A. Delache et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 885–891.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

milieux poreux / convection mixte / inertie / confinement

Pattern formation of mixed convection in a porous medium confined laterally and heated from below: effect of inertia

Abstract

We consider the onset of convection in a porous medium heated from below and subjected to a horizontal mean flow. The effect of porous inertia is studied, and the transverse aspect ratio a of the medium is taken into account. We find that the dominant modes are longitudinal rolls (L.R) if a is an integer or transverse traveling rolls (T.R) if a is below a_c with $a_c < 1$. When a is not an integer with $a > a_c$, the setting on patterns are oscillatory three-dimensional structures (3D) for $a > 1$ or T.R for $a_c < a < 1$ provided that the Reynolds number remains below a critical value Re_K^* . We show that these structures are replaced by L.R if $Re_K > Re_K^*$. *To cite this article: A. Delache et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 885–891.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

porous media / mixed convection / inertia / confinement

Adresses e-mail : A.Delache@ed.univ-lille1.fr (A. Delache); najib.ouarzazi@univ-lille1.fr (N. Ouarzazi); marie-christine.neel@univ-avignon.fr (M.-C. Neel).

Abridged English version

Problem. – The onset and the development of convection in a horizontal porous layer heated uniformly from below is a classical problem associated with Horton, Rogers and Lapwood [3]. If we superimpose to the vertical temperature gradient a horizontal pressure gradient, driving a throughflow whose strength is measured by the Péclet number Pe , we arrive at a mixed convection problem. Recently, Rees [1] examined the linear stability of the conductive state in a medium of infinite lateral extent. Taking account of inertial effects as modelled by the Forchheimer's correction to Darcy's law, he showed that the dominant modes are longitudinal rolls (L.R), with axes in the direction of the mean flow. The result holds for an ideal porous layer without side-walls. Indeed, experiments carried out by Combarous [2] in different media with finite width indicated that the setting on convective patterns may depend on the Péclet number Pe . Convective structures in the form of three dimensional 3D waves, propagating in the direction of the mean flow, were found at low values of the flow rate. Nevertheless longitudinal rolls (L.R), with axes in the direction of the mean flow were observed for larger values of Pe .

Model. – Here we concentrate on the dominant patterns at the onset of convection, taking account of porous inertia and of lateral boundaries at finite distance. Under the Boussinesq assumption, the temperature and the filtration velocity evolve according to the nondimensional system of partial differential equation (1)–(4). Porous inertia is modelled by Forchheimer's power law. Within the framework of homogenization theory, Firdaus, Guermont and Le Quéré [4], and more recently Sketnje and Auriault [5] showed that in a number of situations the nonlinear correction to Darcy's law is cubic with respect to the filtration velocity. Nevertheless, according to [5], some experimental data fit the quadratic correction. For these reasons, we consider both possibilities $n = 1$ and $n = 2$ in (1). The stationary fields (5) of temperature and filtration velocity solve (1)–(4) for all values of the filtration Rayleigh number Ra .

The onset of convection. – Consider normal modes (6) solving the linearized version of (1), (2) around the conductive state (5), with k being the wave number of the perturbations, in the direction of the main flow. The transverse aspect ratio of the duct is a , and the integer m is the number of rolls in the spanwise direction.

We first study the stability of (5) against L.R ($k = 0$). For a given (finite) value of a , the relation (8) shows that porous inertia raises the threshold Ra_c^{\parallel} which corresponds to longitudinal rolls. The variations of the threshold Ra_c^{\parallel} versus a for fixed value of $c_n Re_K^n$ are depicted in Fig. 1. We also indicate the number m of L.R, which depends on a . Notice that for integer values of a , $Ra_c^{\parallel} = 4\pi^2(1 + c_n Re_K^n)$ and $m = a$. Otherwise the maximum of Ra_c^{\parallel} decreases when a is increased and tends to $4\pi^2(1 + c_n Re_K^n)$ when lateral boundaries are pulled to infinity, in agreement with [1]. For particular values of a , such that $a^2 = m(m + 1)$, two L.R patterns with m and $m + 1$ rolls amplify simultaneously. This situation occurs at local maxima of the threshold, displayed on Fig. 1. Recently, Alves, Cotta and Pontes [6] determined the conditions under which the bidimensional natural convection may observe a transition from m to $m + 2$ rolls ($m = 1, 3, 5, \dots$). The linear stability results have been compared to those obtained by a direct numerical simulation of the nonlinear system derived by integral transforms. It is shown that both results are in good agreement.

Three-dimensional instabilities are characterized by non zero values of k and m . The corresponding threshold Ra_c^{3D} is given by (11), with m_2 being the largest integer satisfying (10). From the comparison between Ra_c^{\parallel} and Ra_c^{3D} , some conclusions may be drawn. First, for integer values of a , the lowest threshold corresponds to longitudinal rolls which then dominate whatever the values of Re_K . Second, when a is not an integer and is larger than 1, a transition occurs between the 3D oscillatory instability propagating with phase velocity equal to Pe and L.R at a critical value of Reynolds number Re_K^* , which depends on a . This result agrees qualitatively with experimental observations [2]. Third, when a is between 1 and a_c (with $a_c = 0.531$ if $n = 1$ and $a_c = 0.435$ if $n = 2$), two-dimensional transverse rolls dominate if Re_K is moderate but are replaced by L.R if Re_K is larger than a threshold. In narrow media such that $a < a_c$, the dominant modes are 2D transverse rolls for all variations of Re_K .

We claim that these predictions, compared to experimental results may be used to determine the nonlinear rectification of Darcy's law. Indeed, the exponent n of the nonlinear correction may be obtained by comparing the measured threshold corresponding to the transition between 3D oscillatory structures and L.R with the theoretical value Ra_c^* on Fig. 3. As a second step, once the exponent n has been determined, the measured value of Re_K^* yields the coefficient c_n in view of Fig. 4.

1. Introduction

Cette Note est consacrée aux écoulements filtrants, dits de convection mixte, induits dans une couche poreuse horizontale par un gradient vertical de température interagissant avec un écoulement moyen de vitesse de filtration dimensionnelle U . Récemment, Rees [1] a étudié la stabilité linéaire de l'état de conduction dans le cas d'une couche poreuse illimitée latéralement. Son étude repose sur le modèle de Darcy corrigé par le terme non linéaire de Forchheimer et montre qu'indépendamment de la valeur de U , la convection naissante est structurée sous forme de rouleaux d'axes parallèles à la direction de l'écoulement moyen, appelés rouleaux longitudinaux (R.L). Les autres configurations convectives ont un taux de croissance temporel négatif et finissent par s'amortir. Ce résultat n'est plus exact en présence de confinement latéral.

En effet, les données expérimentales de Combarous [2] montrent que si U est faible, la convection se présente sous la forme de structures propagatives tridimensionnelles. Lorsque U devient plus grand, on observe des R.L. Nous montrons comment la présence de parois latérales influence l'organisation des structures convectives. Les termes d'inertie sont pris en compte en introduisant une correction quadratique ou cubique (par rapport à la vitesse de filtration) dans la loi de Darcy.

2. Problème physique et formulation

Soit une couche poreuse horizontale infinie, de section droite rectangulaire (de hauteur H , de largeur aH), isotrope et saturée. Le bord inférieur est porté à la température T_0 , supérieure à celle, T_1 , du bord supérieur. Lorsque le débit filtrant est important, la loi de Darcy doit inclure un terme non linéaire. Forchheimer a proposé une correction quadratique [3] alors que la théorie de l'homogénéisation conduit à un terme cubique, sous certaines hypothèses [4,5]. Ces possibilités correspondent à $n = 1$ et $n = 2$ dans les équations suivantes, obtenues en partant d'un choix classique [2] de grandeurs de références :

$$\vec{V} + \mathcal{F}_n \|\vec{V}\|^n \vec{V} = -\vec{\nabla}P + RaT\vec{e}_z \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla}T + \vec{\nabla}^2 T \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

La pression, la vitesse de filtration, la température et le vecteur unitaire vertical ascendant sont représentés par P , \vec{V} , T , \vec{e}_z , et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^3 . Le nombre de Rayleigh de filtration est $Ra = Kg\alpha H(T_0 - T_1)(\rho c)_f / \lambda \nu$ où K , λ , g , α , $(\rho c)_f$ et ν désignent respectivement la perméabilité et la conductivité thermique du milieu, l'accélération de la pesanteur, le coefficient d'expansion thermique, la chaleur volumique et la viscosité cinématique du fluide. Le coefficient \mathcal{F}_n des termes d'inertie dans (1) est $\mathcal{F}_n = c_n [K^{1/2} \lambda / H \nu (\rho c)_f]^n$.

Les parois latérales verticales étant supposées adiabatiques, les conditions aux limites sont :

$$\vec{V} \cdot \vec{e}_z = 0 \quad \text{en } z = 0, 1; \quad \vec{V} \cdot \vec{e}_y = 0 \quad \text{en } y = 0, a \quad \text{et} \quad \int_0^a \int_0^1 \vec{V} \cdot \vec{e}_x \, dy \, dz = aPe \quad (3)$$

$$T = 1 \quad \text{en } z = 0, \quad T = 0 \quad \text{en } z = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0, a \quad (4)$$

où le nombre de Péclet Pe est relié à la vitesse moyenne de filtration (dimensionnelle) U par : $Pe = UH(\rho c)_f/\lambda$.

Le système (1)–(4) admet une solution stationnaire, que nous appelons état de conduction, pour toutes les valeurs de Ra et Pe :

$$\vec{V} = Pe \cdot \vec{e}_x, \quad T = 1 - z \quad \text{et} \quad P = Ra \left(z - \frac{z^2}{2} \right) - Pe(1 + c_n Re_K^n) x \tag{5}$$

avec $c_n Re_K^n = \mathcal{F}_n Pe^n = c_n(UK^{1/2}/\nu)^n$.

3. Analyse de stabilité

En linéarisant les équations (1), (2) autour de l'état de conduction (5), on obtient un système vérifié par les perturbations $(u, v, w)^\dagger$ de la vitesse, θ de la température et p de la pression. Celui-ci admet des solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \\ p \end{pmatrix} = e^{i(kx - \omega t)} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \cos(\pi z) \cos(\frac{m}{a} \pi y) \\ v_1 \cos(\pi z) \sin(\frac{m}{a} \pi y) \\ w_1 \sin(\pi z) \cos(\frac{m}{a} \pi y) \\ \theta_1 \sin(\pi z) \cos(\frac{m}{a} \pi y) \\ p_1 \cos(\pi z) \cos(\frac{m}{a} \pi y) \end{pmatrix} \tag{6}$$

où k est le nombre d'onde dans la direction de l'écoulement, alors que m est entier. Le cas $m = 0$ correspond à des rouleaux transversaux (d'axe perpendiculaire à la direction de l'écoulement moyen) et $k = 0$ caractérise les structures convectives prenant la forme de m rouleaux longitudinaux (d'axe parallèle à la direction de l'écoulement). Les modes tels que $km \neq 0$ sont complètement tridimensionnels. L'état de stabilité marginale est obtenu lorsque $\Im(\omega) = \omega_i = 0$. Ceci se produit lorsqu'il existe m et k tels que $\omega = k Pe$ et que le nombre de Rayleigh de filtration vérifie :

$$Ra^{(m,k)} = \left(\pi^2 + k^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) (1 + c_n Re_K^n) + \frac{\pi^2(\pi^2 + k^2 + (m\pi/a)^2)}{k^2/(1 + (n + 1) c_n Re_K^n) + (m\pi/a)^2/(1 + c_n Re_K^n)} \tag{7}$$

Caractérisons les modes les plus instables selon que k est nul ou non.

3.1. Rouleaux fixes longitudinaux ($k = 0$)

Lorsque $k = 0$, la relation (7) devient $Ra^{m,0} = \pi^2(a/m + m/a)^2(1 + c_n Re_K^n)$. Donc les modes longitudinaux les plus déstabilisants correspondent à l'entier m_c rendant $a/m + m/a$ le plus petit possible. Le seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux est par conséquent :

$$Ra_c^\parallel = \pi^2 \left(\frac{a}{m_c} + \frac{m_c}{a} \right)^2 (1 + c_n Re_K^n) \tag{8}$$

Pour un rapport de forme a fixé, ce seuil est une fonction croissante de Re_K^n : le débit tend à stabiliser l'état de conduction. Pour $c_n Re_K^n$ fixé, la Fig. 1 représente le seuil Ra_c^\parallel en fonction du rapport de forme transversal a . Nous indiquons aussi le nombre m_c des R.L naissants. Lorsque a est entier, Ra_c^\parallel est minimal et vaut $4\pi^2(1 + c_n Re_K^n)$, avec $m_c = a$.

Les maxima locaux de Ra_c^\parallel décroissent et se rapprochent de $4\pi^2(1 + c_n Re_K^n)$ lorsque les parois latérales sont écartées puis rejetées à l'infini, en accord avec [1]. Le nombre m_c de rouleaux longitudinaux dépend de a . Lorsque $a^2 < [a][a + 1]$, ce nombre est $[a]$. Sinon $m_c = [a + 1]$, le symbole $[\cdot]$ désignant la partie

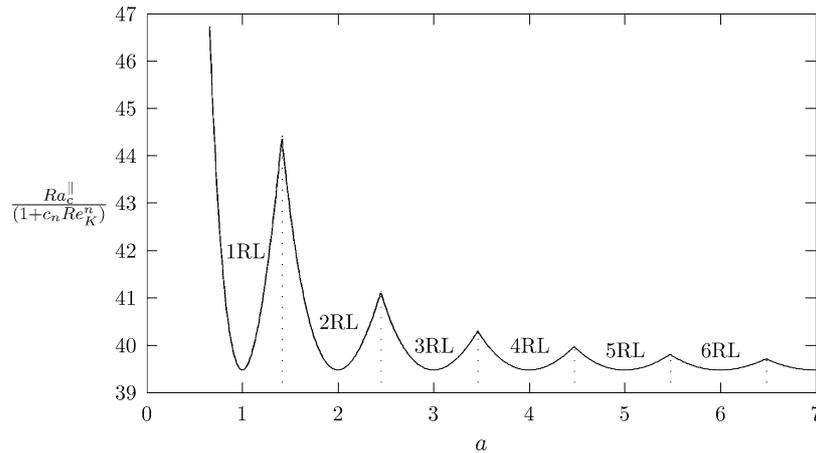


Figure 1. Seuil critique (normalisé par $1 + c_n Re_K^n$) d'apparition des rouleaux longitudinaux ainsi que leur nombre, en fonction du rapport de forme a .

Figure 1. Critical threshold (normalized by $1 + c_n Re_K^n$) of the appearance of longitudinal rolls and their number as a function of transversal aspect ratio a .

entière. Pour $a^2 = [a][a + 1]$, deux modes longitudinaux, constitués de $[a]$ et $[a] + 1$ rouleaux, sont amplifiés : $\omega_i = 0$ est une valeur propre de multiplicité 2. Cette situation correspond aux maxima locaux de la Fig. 1. Récemment, Alves, Cotta et Pontes [6] ont déterminé les conditions critiques pour lesquelles la convection naturelle bidimensionnelle pourrait être le siège d'une transition de $[a]$ rouleaux impairs à $[a] + 2$ rouleaux. Ces conditions critiques ont été déterminées à la fois par une analyse de stabilité linéaire et par une intégration numérique d'équations non linéaires obtenues par la méthode des transformations intégrales.

3.2. Structures tridimensionnelles oscillatoires ($k \neq 0$)

Le nombre d'onde critique est obtenu en minimisant Ra vérifiant (7) par rapport à k , qui décrit $]0, +\infty[$, et m , qui est entier. Pour chaque valeur de m fixée, le minimum de Ra est atteint lorsque

$$k^2 = \frac{\pi^2[-(m^2/a^2)(1 + (n + 1)c_n Re_K^n) + \sqrt{(1 + (n + 1)c_n Re_K^n)(1 + c_n Re_K^n(1 - nm^2/a^2))}]}{1 + c_n Re_K^n} \quad (9)$$

à condition que :

$$\frac{m^2}{a^2} < \frac{1 + c_n Re_K^n}{1 + c_n Re_K^n(1 + n)} \leq 1 \quad (10)$$

Le seuil d'apparition des structures tridimensionnelles est alors :

$$Ra_c^{3D} = \left(\sqrt{1 + c_n Re_K^n \left(1 - \frac{nm_2^2}{a^2}\right)} + \sqrt{1 + c_n Re_K^n(1 + n)} \right)^2 \pi^2 \quad (11)$$

où m_2 est le plus grand entier vérifiant (10). En imposant $Re_K^n = 0$ (ou $\mathcal{F}_n = 0$) dans les relations (9)–(11), nous retrouvons les résultats issus du modèle de Darcy, indiquant que, pour $a > 1$, $[a] + 1$ modes sont simultanément amplifiés à partir de $Ra_c = 4\pi^2$. De plus, le nombre d'onde du mode à m rouleaux dans la direction transverse est $k_c^2 = \pi^2(1 - m^2/a^2)$. Le débit et l'inertie poreuse détruisent cette dégénérescence en sélectionnant un seul mode tridimensionnel.

4. Sélection des structures convectives

En tenant compte de la correction quadratique ($n = 1$) ou cubique ($n = 2$) en vitesse, la nature des structures convectives naissantes dépend de la valeur prise par le rapport de forme a :

- Si a est entier, $Ra_c^{\parallel} \leq Ra_c^{3D}$ quel que soit Re_K : les rouleaux longitudinaux fixes R.L sont observés quelle que soit la valeur du débit. Il en est de même pour un milieu poreux d’extension transversale infinie [1].
- Si a est non entier et supérieur à 1, les structures 3D oscillatoires dominent tant que $Re_K < Re_K^*$. Au delà de la valeur critique Re_K^* , des rouleaux longitudinaux R.L apparaissent. Ce scénario de transition a été observé expérimentalement [2] pour différents milieux poreux avec $a = 6,9$. Nous avons représenté sur la Fig. 2 le seuil d’apparition des instabilités convectives en fonction de $c_n Re_K^n$, à la fois pour des rouleaux longitudinaux fixes (trait continu) et pour des structures tridimensionnelles oscillatoires (cercles) pour $a = 1,9$ et $n = 1$ (pour $n = 2$, on obtient une figure qualitativement similaire). Les traits en pointillés représentent ces seuils dans le cadre de la loi de Darcy sans correction non linéaire. Cette figure montre que la loi de Darcy sous sa forme la plus simple ne décrit pas correctement le rôle joué par le débit dans la sélection des structures convectives.

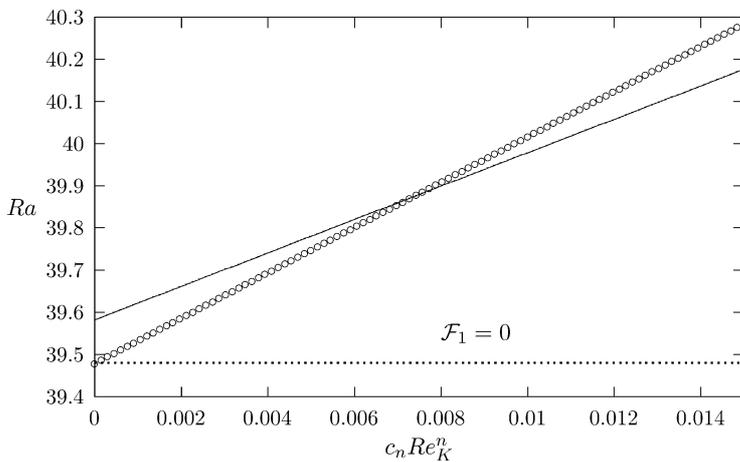


Figure 2. Seuil critique des structures 3D oscillatoires (o) et des R.L (trait continu) en fonction de $c_n Re_K^n$ pour $a = 1,9$ et $n = 1$. Les traits en pointillés représentent ces seuils dans le cadre de la loi de Darcy.

Figure 2. Critical threshold of both 3D oscillatory structures (o) and L.R (solid line) as a function of $c_n Re_K^n$ for $a = 1,9$ and $n = 1$. The dotted line represents these thresholds in the framework of Darcy’s law.

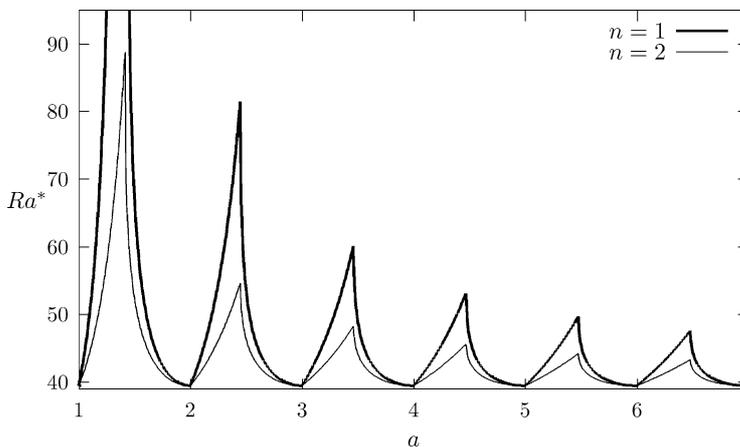
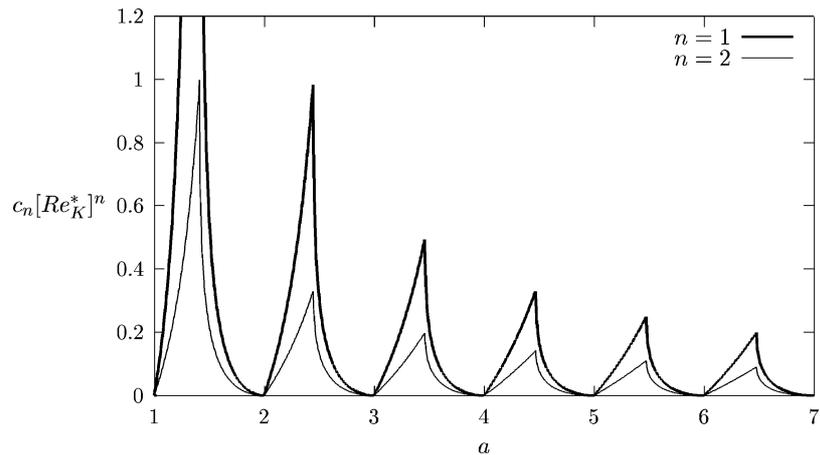


Figure 3. Nombre de Rayleigh critique Ra_c^* pour lequel se produit l’intersection Ra_c^{3D} et de Ra_c^{\parallel} en fonction de a pour $n = 1$ et $n = 2$.

Figure 3. Critical Rayleigh number Ra_c^* for which the intersection of Ra_c^{3D} and Ra_c^{\parallel} occurs as a function of a for $n = 1$ and $n = 2$.

Figure 4. Valeurs de $c_n[Re_K^*]^n$ pour lesquelles $Ra_c^{3D} = Ra_c^{\parallel}$ en fonction de a pour $n = 1$ et $n = 2$.

Figure 4. Values of $c_n[Re_K^*]^n$ for which $Ra_c^{3D} = Ra_c^{\parallel}$ as a function of a for $n = 1$ and $n = 2$.



- Lorsque $a < 1$, il existe une valeur limite a_c ($a_c = 0,531$ pour $n = 1$, $a_c = 0,435$ pour $n = 2$) telle que, si $a_c < a < 1$, le modèle de Forchheimer prévoit l'apparition des R.T si Re_K est modéré mais sont remplacées par des R.L lorsque Re_K devient assez grand. Pour $a < a_c$, cette transition disparaît et seuls les R.T peuvent structurer la convection quelle que soit la valeur de Re_K .

La comparaison de ces résultats avec des données expérimentales, concernant en particulier la valeur Ra_c^* (Fig. 3) donnant la transition entre les deux types de structures convectives conduirait à déterminer expérimentalement l'exposant de la vitesse de filtration prévalant dans une situation donnée pour la correction de Forchheimer à la loi de Darcy. Une fois l'exposant n déterminé, la Fig. 4 et la valeur mesurée pour Re_K^* permettraient dans un second temps de déterminer le coefficient c_n lié au terme de Forchheimer \mathcal{F}_n .

Remerciements. Nous remercions Michel Combarous pour ses suggestions et les nombreuses discussions dont nous avons pu bénéficier tout le long de ce travail.

Références bibliographiques

- [1] D.A.S. Rees, The effect of inertia on the onset of mixed convection in a porous layer heated from below, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 24 (2) (1997) 277–283.
- [2] M. Combarous, Convection naturelle et convection mixte en milieu Poreux, Thèse d'état, Faculté de Paris, 1970.
- [3] D.A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] M. Firdaous, M. Guermond, P. Le Quééré, Nonlinear correction to Darcy's law at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 343 (1997) 331–350.
- [5] E. Skjetne, J.L. Auriault, New insights on steady non-linear flow in porous media, *European J. Mech. B Fluids* 18 (1) (1999) 131–145.
- [6] L.S. De B. Alves, R.M. Cotta, J. Pontes, Stability analysis of natural convection in porous cavities through integral transforms, *Int. J. Heat Mass Transfer* 45 (6) (2002) 1185–1195.