

Homogénéisation de problèmes d'évolution dans une structure renforcée de fibres

Michel Bellieud

UFR science, Université de Perpignan, 52, av. de Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France

Reçu le 25 juin 2002 ; accepté après révision le 15 octobre 2002

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

Résumé Nous étudions l'homogénéisation de problèmes d'évolution du type :

$$\frac{\partial^n u_\varepsilon}{\partial t^n} - \operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{sur } \Omega \times (0, T) + \text{conditions limites, } n \in \{1, 2\}$$

dans le cas où le coefficient a_ε , périodique de période ε , prend des valeurs très élevées sur un sous-ensemble T_ε de Ω (structure composée de fibres) dont la mesure tend simultanément vers 0. Nous obtenons des lois effectives non locales déduites d'un système couplé d'équations aux dérivées partielles. *Pour citer cet article : M. Bellieud, C. R. Mecanique 330 (2002) 843–848.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique des solides numérique / fibre

Homogenization of evolution problems in a fiber reinforced structure

Abstract We study the homogenization of evolution equations such as:

$$\frac{\partial^n u_\varepsilon}{\partial t^n} - \operatorname{div}(a_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{on } \Omega \times (0, T) + \text{boundary conditions, } n \in \{1, 2\} \quad (1)$$

where the coefficient a_ε is ε -periodic and takes very high values on a subset $T_\varepsilon \subset \Omega$ (fibered structure) of very small measure. We find a non-local effective equation deduced from a homogenized system of several equations. *To cite this article : M. Bellieud, C. R. Mecanique 330 (2002) 843–848.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

computational solid mechanics / fiber

Abridged English version

We are concerned with the homogenization of parabolic or hyperbolic problems such as

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n u_\varepsilon}{\partial t^n} - \operatorname{div}(a_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad u_\varepsilon \in \mathcal{D}_n, \quad n \in \{1, 2\} \\ & \mathcal{D}_1 := \{u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega)), \quad u(0) = \varphi_0 \text{ on } \Omega\} \\ & \mathcal{D}_2 := \left\{ u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)), \quad u(0) = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0 \text{ on } \Omega \right\} \\ & f \in L^2(\Omega \times (0, T)), \quad \varphi_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{if } n = 1 \\ & f \in L^2(\Omega), \quad \varphi_0 \in H_0^1(\Omega), \quad v_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{if } n = 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Adresse e-mail : bellieud@univ-perp.fr (M. Bellieud).

when the ε -periodic functions a_ε do not satisfy assumptions of uniform boundedness like $0 < \alpha < a_\varepsilon(x) < \beta < +\infty$ which guarantee a classical asymptotic behaviour. In such cases, the homogenization can lead to unusual homogenized models as non-local ones [1]. When scalar elliptic equations are considered this fact can be interpreted in the general context of Dirichlet forms [2] and explicit computations can actually be performed for instance in the case of fiber reinforced structures [3–5]. If the diameter of the fibers is of the same order as the period, the asymptotic behavior of the solutions of (1) can be described thanks to the numerical-asymptotic method proposed in [6]. Here, we assume that the diameter of the fibers is much smaller than the period.

We consider a fibered structure in \mathbb{R}^3 : $\Omega := \omega \times]0, L[$ is a cylindrical domain, ω being a bounded open domain of \mathbb{R}^2 with smooth boundary. Given a sequence of positive reals (r_ε) , the geometry of the set T_ε (the ‘fibers’) is described in terms of the open disk $D^\varepsilon := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_\varepsilon/\varepsilon\}$, by considering first its periodization on all \mathbb{R}^2 given by $D_\#^\varepsilon := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \{i\} + D^\varepsilon$, then by setting $T_\varepsilon := (\omega \cap \varepsilon D_\#^\varepsilon) \times (0, L)$ (see Fig. 1). The fibers are assumed to be very thin (their Lebesgue measure $|T_\varepsilon|$ tends to 0) and of very high conductivity, while the surrounding matrix has the constant conductivity 1. More precisely, we assume (4) (with $k < +\infty$ if $n = 2$). The limit problem depends on k and on the capacitary parameter γ defined by (5). When $0 < k, \gamma < +\infty$, it consists of a coupled system of equations depending on the limit u of the sequence (u_ε) of the solutions of (2) and the weak limit v of the sequence v_ε defined by (6), which describes the average behaviour of the restriction of u_ε to the fibers. The effective boundary conditions are given by $(u, v) \in \mathcal{D}_n^{\text{eff}}$ where $\mathcal{D}_n^{\text{eff}}$ is given by (7).

THEOREM. – Assume (4) (and $k < +\infty$ if $n = 2$), then the sequence (u_ε) of the solutions of (2) weakly converges in $L^2(0, T; \mathcal{H}_0^1(\Omega))$ (weakly in $H^1(\Omega \times (0, T))$ if $n = 2$) to u and (v_ε) defined by (7) weak-star converges in the sense of measures to a function v , where (u, v) is the unique solution of

(i) If $k < +\infty, (u, v) \in \mathcal{D}_n^{\text{eff}}$ and

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \Delta u - k \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = f \quad \text{on } \Omega \times (0, T) \\ -k \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + 2\pi\gamma(v - u) = 0 \quad \text{on } \Omega \times (0, T) \end{array} \right. & \text{if } 0 < \gamma < +\infty \\ v = 0; \quad \frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \Delta u = f \quad \text{on } \Omega \times (0, T) & \text{if } \gamma = 0 \\ v = u; \quad \frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \Delta u - k \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f \quad \text{on } \Omega \times (0, T) & \text{if } \gamma = +\infty \end{cases}$$

(ii) If $k = +\infty$ and $n = 1$,

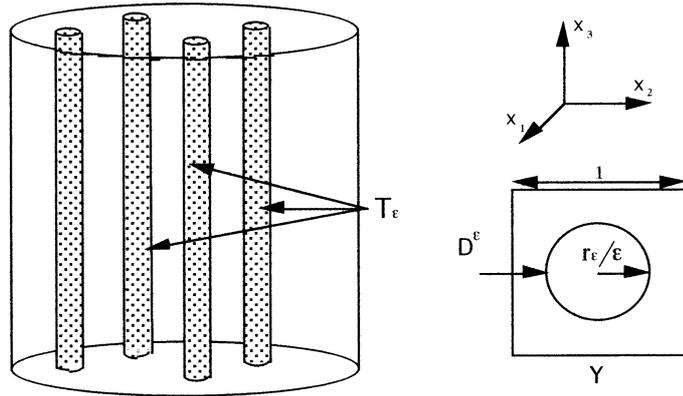
$$\begin{cases} (u, v) \in \mathcal{D}_1^{\text{eff}}; \quad v = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + 2\pi\gamma u = f \quad \text{on } \Omega \times (0, T) & \text{if } \gamma < +\infty \\ u = v = 0 & \text{if } \gamma = +\infty \end{cases}$$

The proof of the theorem is based on the use of test functions associated to the techniques developed in the study of the corresponding elliptic case [3]. All details can be found in a complete version of this paper [7].

Nous nous intéressons à l’homogénéisation de problèmes d’évolution du type (2) lorsque les fonctions a_ε , périodiques de période ε , ne satisfont pas les hypothèses usuelles de bornitude uniforme du type $0 < \alpha < a_\varepsilon(x) < \beta < +\infty$ qui garantissent un comportement effectif classique. Le processus d’homogénéisation peut produire dans ce cas des modèles effectifs inhabituels, par exemple non locaux [1]. Dans le cas elliptique scalaire ($n = 0$), la théorie des formes de Dirichlet donne une justification théorique pour ces phénomènes [2] et des calculs explicites des équations limites ont été effectués par exemple pour des

Figure 1. Le problème considéré.

Figure 1. The problem under consideration.



$$\Omega := \omega \times (0, L)$$

structures renforcées de fibres [3–5]. Si le diamètre des fibres est du même ordre de grandeur que la période, on trouve dans [6] une étude du comportement des solutions de (1) par des développements asymptotiques adaptés. Nous étudions le cas où ce diamètre est d’un ordre de grandeur plus petit que celui de la période.

Dans cette Note, on considère une structure fibrée dans \mathbb{R}^3 : $\Omega := \omega \times]0, L[$ est un domaine cylindrique, ω étant un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 de frontière régulière. Etant donnée une suite de réels positifs (r_ε) , l’ensemble des « fibres » T_ε est construit à partir du disque ouvert $D^\varepsilon := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_\varepsilon/\varepsilon\}$, en considérant d’abord l’ensemble périodique $D_\#^\varepsilon := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \{i\} + D^\varepsilon$, puis en posant $T_\varepsilon := (\omega \cap \varepsilon D_\#^\varepsilon) \times (0, L)$ (voir Fig. 1).

La fonction a_ε prend de très grandes valeurs sur les fibres dont la mesure de Lebesgue $|T_\varepsilon|$ tend simultanément vers 0. Plus précisément on suppose

$$a_\varepsilon(x) = \frac{|\Omega|}{|T_\varepsilon|} k_\varepsilon \quad \text{si } x \in T_\varepsilon ; \quad a_\varepsilon(x) := 1 \quad \text{si } x \in \Omega \setminus T_\varepsilon$$

$$0 < r_\varepsilon \ll \varepsilon ; \quad k_\varepsilon \rightarrow k \in]0, +\infty[\tag{4}$$

La constante k est supposée finie si $n = 2$. Le problème limite est fonction de k et du paramètre capacitaire

$$\gamma := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2 |\ln r_\varepsilon|} \tag{5}$$

Lorsque γ et k sont des réels positifs, il s’exprime sous forme d’un système couplé d’une équation d’évolution et d’une équation elliptique dépendant de la limite u de la suite (u_ε) des solutions de (2) et d’une variable auxiliaire v , limite faible de la suite

$$v_\varepsilon(x, t) := \frac{|\Omega|}{|T_\varepsilon|} u_\varepsilon(x, t) \quad \text{si } x \in T_\varepsilon ; \quad v_\varepsilon(x, t) := 0 \quad \text{sinon} \tag{6}$$

Celle-ci décrit le comportement limite moyen de la restriction de u_ε à l’ensemble des fibres. Les conditions aux limites effectives sont caractérisées par $(u, v) \in \mathcal{D}_n^{\text{eff}}$ où

$$\mathcal{D}_1^{\text{eff}} := \left\{ (u, v) \in (L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))) \times L^2(\Omega \times (0, T)), \right.$$

$$\left. u(0) = \varphi_0, \frac{\partial v}{\partial x_3} \in L^2(\Omega \times (0, T)), v = 0 \text{ sur } \omega \times \{0, L\} \times (0, T) \right\}$$

$$\mathcal{D}_2^{\text{eff}} := \left\{ (u, v) \in (C((0, T), H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega))) \times L^2(\Omega \times (0, T)), \right.$$

$$\left. u(0) = \varphi_0, \frac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0, \frac{\partial v}{\partial x_3} \in L^2(\Omega \times (0, T)), v = 0 \text{ sur } \omega \times \{0, L\} \times (0, T) \right\} \tag{7}$$

THÉORÈME. – Supposons (4) (et $k < +\infty$ si $n = 2$), alors la suite (u_ε) des solutions de (2) converge faiblement dans $L^2(0, T; \mathcal{H}_0^1(\Omega))$ (faiblement dans $\mathcal{H}^1(\Omega \times (0, T))$ si $n = 2$) vers u et la suite v_ε définie par (6) converge étoile-faiblement au sens des mesures vers une fonction v , où (u, v) est l'unique solution de

(i) Si $k < +\infty$, $(u, v) \in \mathcal{D}_n^{\text{eff}}$ et

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \Delta u - k \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ -k \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + 2\pi\gamma(v - u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \end{array} \right. & \text{si } 0 < \gamma < +\infty \\ v = 0; \quad \frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) & \text{si } \gamma = 0 \\ v = u; \quad \frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \Delta u - k \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) & \text{si } \gamma = +\infty \end{cases}$$

(ii) Si $k = +\infty$ et $n = 1$,

$$\begin{cases} (u, v) \in \mathcal{D}_1^{\text{eff}}; \quad v = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + 2\pi\gamma u = f \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) & \text{si } \gamma < +\infty \\ u = v = 0 & \text{si } \gamma = +\infty \end{cases}$$

Remarque. – Dans le cas $0 < \gamma, k < +\infty$, on peut exprimer la fonction v en fonction de u en résolvant la seconde équation. Reportant cette expression dans la première équation on obtient

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \Delta u + c(x_3)u - \int_0^L R(x_3, y_3)u(x_1, x_2, y_3, t) dy_3 = f$$

où

$$c(x_3) := kc_0^2 \frac{1}{\sinh(c_0L)} (\cosh(c_0(L - x_3)) \sinh(c_0x_3) + \sinh(c_0(L - x_3)) \cosh(c_0x_3))$$

$$R(x_3, y_3) := kc_0^3 \frac{1}{\sinh(c_0L)} \sinh(c_0(L - x_3 \vee y_3)) \sinh(c_0(x_3 \wedge y_3)), \quad c_0 := \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{k}}$$

Preuve du théorème (cas $n = 1$ et $0 < k, \gamma < +\infty$). – En multipliant l'équation (1) par $\partial u_\varepsilon / \partial t$ et en intégrant par parties sur $\Omega \times (0, T)$ on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega a_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx dt \leq \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \frac{1}{2} \int_\Omega |\varphi_0|^2 dx$$

dont on déduit les estimations suivantes (où l'on introduit la mesure $\mu_\varepsilon := \frac{|\Omega|}{|T_\varepsilon|} 1_{T_\varepsilon \times (0, T)} dx dt$)

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad \int |u_\varepsilon|^2 d\mu_\varepsilon \leq C, \quad \int \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \right|^2 d\mu_\varepsilon \leq C$$

puis, en raisonnant comme dans [4], l'existence de deux fonctions u et v vérifiant à des suites extraites près :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \quad u_\varepsilon \mu_\varepsilon \xrightarrow{*} v \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_3} \mu_\varepsilon \xrightarrow{*} \frac{\partial v}{\partial x_3} \quad \text{au sens des mesures} \quad (8)$$

$$\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega \times (0, T)) \text{ fort}; \quad \tilde{v}_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega \times (0, T))$$

Les fonctions $\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon$ sont définies en fixant une suite R_ε telle que $0 < R_\varepsilon \ll \varepsilon$ et en posant

$$\tilde{u}_\varepsilon := \sum_i \left(\int_{C_{R_\varepsilon}^i} u_\varepsilon(\cdot, \cdot, x_3, t) ds \right) 1_{Y_\varepsilon^i}(x'), \quad \tilde{v}_\varepsilon := \sum_i \left(\int_{C_{R_\varepsilon}^i} u_\varepsilon(\cdot, \cdot, x_3, t) ds \right) 1_{Y_\varepsilon^i}(x')$$

où $Y_\varepsilon^i := \varepsilon(i + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2)$, $x' := (x_1, x_2)$, et C_r^i désigne le cercle de centre εi ($i \in Z^2$) et de rayon r . Fixant deux fonctions arbitraires $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0, T))$ et $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (0, T))$ vérifiant $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega \times]0, T]$, on introduit la suite de fonctions test

$$\Phi_\varepsilon(x, t) := (1 - \theta_\varepsilon(x'))\varphi(x, t) + \theta_\varepsilon(x')(\varphi_\varepsilon(x, t) + \psi_\varepsilon(x, t)) \quad (9)$$

où φ_ε , ψ_ε , θ_ε sont données, posant $D_\varepsilon^i := \varepsilon(i + D^\varepsilon)$ et $\rho_\varepsilon(x') := \text{dist}(x', \{\varepsilon i, i \in Z^2\})$, par

$$\varphi_\varepsilon(x, t) := \sum_i \left(\int_{D_\varepsilon^i} \varphi(\cdot, \cdot, x_3, t) \right) 1_{Y_\varepsilon^i}(x'); \quad \psi_\varepsilon(x, t) := \sum_i \left(\int_{D_\varepsilon^i} \psi(\cdot, \cdot, x_3, t) \right) 1_{Y_\varepsilon^i}(x')$$

$$\theta_\varepsilon(x') := 1 \text{ si } \rho_\varepsilon(x') < r_\varepsilon; \quad \theta_\varepsilon(x') := 0 \text{ si } \rho_\varepsilon(x') > R_\varepsilon; \quad \theta_\varepsilon(x') := \frac{\ln(\rho_\varepsilon(x')/R_\varepsilon)}{\ln(r_\varepsilon/R_\varepsilon)} \text{ sinon}$$

En multipliant (1) par Φ_ε et en intégrant par parties on obtient

$$- \int_\Omega \varphi_0(x)\Phi_\varepsilon(x, 0) dx - \int_{t=0}^T \int_\Omega u_\varepsilon \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t} dx dt + \int_{t=0}^T \int_\Omega a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon dx dt = \int_{t=0}^T \int_\Omega f \Phi_\varepsilon dx dt \quad (10)$$

On déduit facilement de (8) et (9) que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \varphi_0(x)\Phi_\varepsilon(x, 0) dx &= \int_\Omega \varphi_0(x)\varphi(x, 0) dx; & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t=0}^T \int_\Omega f \Phi_\varepsilon dx dt &= \int_{t=0}^T \int_\Omega f \varphi dx dt \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t=0}^T \int_\Omega u_\varepsilon \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial t} dx dt &= \int_{t=0}^T \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \end{aligned} \quad (11)$$

Le calcul de la limite du troisième terme du membre de gauche de (10) est plus délicat : on écrit

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^T \int_\Omega a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon dx dt &= I_{1\varepsilon} + I_{2\varepsilon} + I_{3\varepsilon}, & I_{1\varepsilon} &:= \int_{t=0}^T \int_{\Omega \setminus (B_\varepsilon \cup T_\varepsilon)} \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi dx dt \\ I_{2\varepsilon} &:= \int_{t=0}^T \int_{B_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon dx dt, & I_{3\varepsilon} &:= \int k_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla \Phi_\varepsilon d\mu_\varepsilon \end{aligned}$$

où $B_\varepsilon := \{x = (x', x_3) \in \Omega, r_\varepsilon < \rho_\varepsilon(x') < R_\varepsilon\}$. On déduit aisément de (8) et (9) que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{1\varepsilon} = \int_{t=0}^T \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx dt; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{3\varepsilon} = \int_{t=0}^T \int_\Omega k \frac{\partial v}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) dx dt \quad (12)$$

L'évaluation de $I_{2\varepsilon}$, plus difficile, résulte de l'estimation

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(I_{2\varepsilon} - \frac{2\pi}{\varepsilon^2 |\ln(r_\varepsilon/R_\varepsilon)|} \int_{t=0}^T \int_\Omega (\tilde{v}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) \psi_\varepsilon dx dt \right) = 0 \quad (13)$$

En passant à la limite dans (10), compte tenu de (5), (8), (11)–(13), on obtient finalement la formulation variationnelle

$$\begin{aligned} - \int_\Omega \varphi_0(x)\varphi(x, 0) dx - \int_{t=0}^T \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt + \int_{t=0}^T \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx dt \\ + k \int_{t=0}^T \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_3} \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial x_3} dx dt + 2\pi \gamma \int_{t=0}^T \int_\Omega (v - u) \psi dx dt = \int_{t=0}^T \int_\Omega f \varphi dx dt \end{aligned}$$

équivalente au problème limite annoncé dans le cas correspondant du théorème. Pour la preuve des autres cas (et pour plus de détails) on se référera à [7].

Références bibliographiques

- [1] E.Y. Khruslov, Homogenized Models of Composite Media, in: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Application, Birkhäuser, 1991.
- [2] U. Mosco, Composite media and asymptotic Dirichlet forms, J. Funct. Anal. 123 (1994) 368–421.

- [3] M. Bellieud, G. Bouchitté, Homogenization of elliptic problems in a fiber reinforced structure. Nonlocal effects, *Ann. Scuola Norm. Sup. Cl. Sci.* (4) 26 (1998) 407–436.
- [4] M. Bellieud, G. Bouchitté, Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers, *Asymptotic Anal.*, to appear.
- [5] M. Briane, Fibered microstructure for some non-local Dirichlet forms, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 3–4 (2002) 681–711.
- [6] G.P. Panasenko, Multicomponent homogenization of processes in strongly nonhomogeneous structures, *Math. USSR Sb.* 69 (1) (1991) 143–153.
- [7] M. Bellieud, Homogenization of evolution problems in a fiber reinforced structure, Preprint, Université de Perpignan.