

Identification de la relation de dispersion dans les barres

Ramzi Othman ^a, Robert H. Blanc ^b, Marie-Noëlle Bussac ^c, Pierre Collet ^c, Gérard Gary ^a

^a Laboratoire de mécanique des solides, UMR 7649, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

^b Trans.Waves, 150, cité Le Corbusier, 13008 Marseille, France

^c Centre de physique théorique, UMR 7644, École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

Reçu le 15 juillet 2002 ; accepté après révision le 27 août 2002

Note présentée par André Zaoui.

Résumé

Une méthode de mesure de la dispersion et de l'amortissement des ondes longitudinales dans une barre élastique ou faiblement viscoélastique est présentée. Elle est fondée sur l'analyse des résonances présentes dans le spectre du signal de la déformation produite par un chargement indéterminé. Appliquée à une barre d'aluminium, elle permet la mesure de la dispersion pour des fréquences allant jusqu'à 60 kHz. On vérifie la grande qualité de la relation de dispersion ainsi obtenue en testant la précision du transport des ondes calculé avec cette relation. *Pour citer cet article : R. Othman et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 849–855.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ondes / relation de dispersion / module d'Young complexe / barres de Hopkinson / dynamique / traitement du signal

Identification of the dispersion relation in rods

Abstract

Dispersion and attenuation of longitudinal waves in elastic or weakly viscoelastic rods are measured by analysing the resonant frequencies present in the strain spectrum due to an unknown loading. The method takes the finite measuring time of the test into account. It is applied to an aluminium bar, in which the dispersion relation is identified very accurately at frequencies up to 60 kHz. *To cite this article: R. Othman et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 849–855.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

waves / dispersion relation / complex Young's modulus / Hopkinson bar / dynamics / signal processing

Abridged English version

The dispersion relation in rods is mostly used to investigate the viscoelastic properties of materials [1,2] and to improve the measurements obtained with split Hopkinson bars [3–6]. For a long time, the experimental identification of the dispersion was based on comparisons between the Fourier components of the strain measurements performed at two points on the bar [1,2,7,8]. Hillström et al. [9] recently developed a multi-point least squares method which reduces the disturbance due to the noise. In this paper, a new method based on a single point measurement is presented. This method is shown to be stable with respect to noise.

Assuming that only the first longitudinal mode is excited, the strain spectrum is expressed as a function of the unknown loading, the dispersion relation, the gauge position and the length of the bar. It can be seen to have multiple resonant frequencies. Two relations are established, the first between the wave velocity

Adresse e-mail : gary@lms.polytechnique.fr (G. Gary).

and the resonant frequencies (7) and the second between the bandwidth of the resonance at half-height and the damping (9). Because of the finite number of points used for the FFT (10^6) the frequency step is around 0.1 Hz (the worse precision, for the lowest resonant frequency is around 10^{-4}). Unlike the measured phase velocity, it emerges that the subsequent measured damping depends on the total duration of the recorded signal. A second expression for the strain spectrum is then established to provide a correction for the previous limitation in the damping computation (11). The method was tested experimentally on an aluminium bar impacted by short aluminium strikers. The wave dispersion relation was measured successfully at frequencies up to 60 kHz. The accuracy of the method is illustrated by comparing the wave observed with the initial impulse shifted as many times as necessary along the bar (Fig. 6).

1. Introduction

La connaissance de la relation de dispersion dans les barres permet de déterminer les propriétés viscoélastiques des matériaux [1,2] et d'améliorer les résultats des mesures réalisées avec le système des barres de Hopkinson [3–6]. La méthode la plus classique utilisée pour la mesure de la dispersion est fondée sur la comparaison des transformées de Fourier de deux mesures de déformation [1,2,7,8]. Hillström et al. [9] ont utilisé la méthode des moindres carrés et un nombre de points de mesure de déformation supérieur à deux pour réduire les perturbations dues au bruit. Nous présentons ici une méthode alternative n'utilisant qu'une seule mesure et qui ne nécessite pas de connaître le chargement. La méthode repose sur l'hypothèse de l'existence d'un seul mode de propagation dans ce domaine de fréquences. Elle est fondée sur l'analyse des résonances présentes dans le spectre du signal de la déformation produite par un chargement indéterminé. Elle ne repose pas sur la décomposition en modes propres de la réponse de la barre, car nous devons tenir compte du régime transitoire, notamment avec une condition aux limites qui dépend du temps et qui n'est pas connue.

2. Propagation des ondes dans les barres élastiques et viscoélastiques

Nous considérons une barre faiblement viscoélastique (éventuellement élastique) de longueur L . Un impacteur, envoyé sur l'extrémité gauche de la barre, y génère une onde de compression se propageant dans le sens des x positifs. L'extrémité droite de la barre est libre (Fig. 1).

Comme de nombreux auteurs [3,5,10], nous supposons que seul le premier mode de propagation des ondes longitudinales est excité par l'impact du projectile. La composante fréquentielle, en ω , de la déformation dans la barre à une section d'abscisse x ($-L \leq x \leq 0$), s'écrit [6,11] sous la forme suivante :

$$\tilde{\varepsilon}(x, \omega) = A(\omega) e^{-i\xi(\omega)x} + B(\omega) e^{i\xi(\omega)x} \tag{1}$$

avec $\xi(\omega) = k(\omega) + i\alpha(\omega) = \omega/c(\omega) + i\alpha(\omega)$, où $c(\omega)$ est la vitesse de phase des ondes longitudinales et $\alpha(\omega)$ l'amortissement (qui est nul dans le cas d'une barre élastique et négatif dans le cas d'une barre viscoélastique).

En écrivant aux extrémités de la barre $\tilde{\varepsilon}(0, \omega) = 0$ et $\tilde{\varepsilon}(-L, \omega) = \tilde{\theta}(\omega)$, nous obtenons :

$$A(\omega) = -B(\omega) = \frac{\tilde{\theta}(\omega)}{e^{i\xi(\omega)L} - e^{-i\xi(\omega)L}} \tag{2}$$

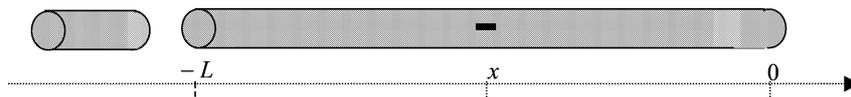


Figure 1. Schéma simplifié d'une barre soumise à un projectile.

Figure 1. Simplified diagram of the bar hit by a striker.

Puis compte tenu de (2) :

$$\tilde{\varepsilon}(x, \omega) = -\tilde{\theta}(\omega) \frac{e^{-i\xi(\omega)x} - e^{i\xi(\omega)x}}{e^{-i\xi(\omega)L} - e^{i\xi(\omega)L}} \quad (3)$$

Finalement le spectre de la mesure de la déformation au point x s'écrit :

$$S(x, \omega) = |\tilde{\varepsilon}(x, \omega)|^2 = |\tilde{\theta}(\omega)|^2 \frac{|\sin(\xi(\omega)x)|^2}{|\sin(\xi(\omega)L)|^2} \quad (4)$$

On considère le cas d'un amortissement faible (cas des matériaux faiblement viscoélastiques). On développe alors chaque sinus à l'ordre 2 en $\alpha(\omega)$. On obtient :

$$S(x, \omega) = |\tilde{\theta}(\omega)|^2 \frac{x^2 \alpha^2(\omega) + \sin^2(k(\omega)x)}{L^2 \alpha^2(\omega) + \sin^2(k(\omega)L)} \quad (5)$$

3. Analyse spectrale

3.1. Résonances de la barre – vitesse de phase des ondes

Dans le cadre de l'approximation élastique, où $\alpha(\omega) = 0$, le spectre de la mesure de déformation est donné par :

$$S(x, \omega) \approx |\tilde{\theta}(\omega)|^2 \frac{\sin^2(k(\omega)x)}{\sin^2(k(\omega)L)} \quad (6)$$

Le dénominateur du spectre s'annule pour un ensemble dénombrable de fréquences ω_p , où p est un entier relatif, tel que $k(\omega_p)L = p\pi$.

Si le numérateur de (7) ne s'annule pas à la fréquence ω_p , elle se manifeste comme une fréquence de résonance. On en déduit alors la vitesse de phase pour la fréquence ω_p :

$$c(\omega_p) = \frac{\omega_p L}{p\pi} \quad (7)$$

3.2. Largeur des pics – amortissement

Considérons maintenant l'expression (5) du spectre pour un amortissement faible.

On se situe au voisinage d'une résonance ω_p en supposant que l'amortissement est constant dans ce voisinage $\alpha(\omega) = \alpha(\omega_p) = \alpha_p$. En développant $\sin(k(\omega)L)$ au premier ordre en $\omega - \omega_p$ et en reportant dans (4), nous obtenons :

$$S(x, \omega) = |\tilde{\theta}(\omega)|^2 \frac{x^2 \alpha_p^2 + \sin^2(k(\omega_p)x)}{L^2 \alpha_p^2 + L^2 (\partial k / \partial \omega|_{\omega=\omega_p})^2 (\omega - \omega_p)^2} \quad (8)$$

En considérant les valeurs de la fréquence égales à $\omega_p \pm \delta\omega_p$ associées à la demi hauteur de la résonance, l'amortissement est donné par (voir aussi [11]) :

$$\alpha_p = -\delta\omega_p \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_p} \quad (9)$$

où $\delta\omega_p$ est la moitié de la largeur de bande à mi-hauteur.

4. Validation expérimentale

Nous allons déterminer expérimentalement la relation de dispersion pour une barre d'aluminium de longueur 3,019 m et de diamètre 40 mm. Une jauge de déformation est collée à $x = -1,567$ m. Cette position de la jauge au milieu de la barre est appropriée pour une barre de Hopkinson. En outre, elle garantit qu'une résonance sur deux est bien isolée (voir Section 3.1). Un projectile en aluminium de même diamètre que la barre est lancé à une vitesse voisine de 10 m/s. Le spectre du signal de déformation montre que l'énergie aux fréquences supérieures à 60 kHz est comparable à celle du bruit [11]. Les

grandeurs représentées sur les figures suivantes en fonction de la fréquence ne dépasseront donc pas, en abscisse, 60 kHz. Plusieurs essais ont été réalisés avec deux projectiles (1200 et 15 mm de long), des durées d'enregistrement et des fréquences d'échantillonnage f_e variables (> 100 kHz). La profondeur de

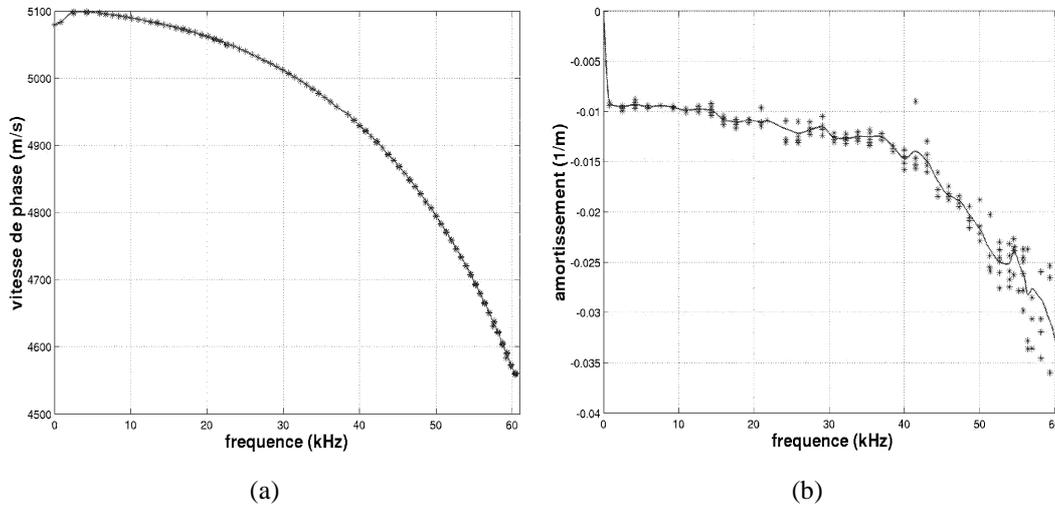


Figure 2. (a) dispersions sur le calcul de la vitesse de phase ; (b) dispersions sur le calcul de l'amortissement.

Figure 2. Scattering for (a) calculated phase velocity; (b) calculated damping.

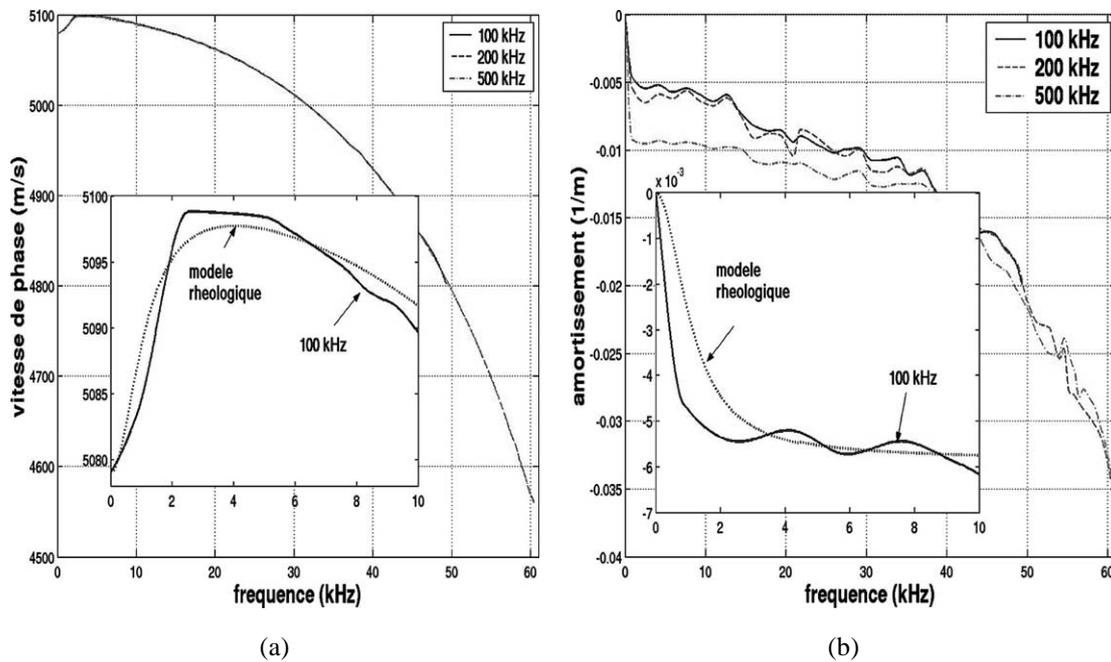


Figure 3. (a) vitesse de phase avec fréquence d'échantillonnage = 100, 200 et 500 kHz ; (b) amortissement avec fréquence d'échantillonnage = 100, 200 et 500 kHz.

Figure 3. (a) Phase velocity and (b) damping with sampling frequencies = 100, 200, 500 kHz.

la carte d'acquisition est de 30 000 points ; la durée maximum de l'enregistrement est donc dépendante de la fréquence d'échantillonnage ($= 30\,000/f_e$). Le spectre du signal est ensuite calculé numériquement par transformée de Fourier rapide (FFT) pour un signal de 10^6 points (en ajoutant un nombre suffisant de zéros aux points enregistrés). Le pas en fréquence du spectre est donc de 0,1 Hz.

Les Figs. 2(a) et 2(b) montrent la superposition des résultats obtenus avec 6 essais différents. Le calcul de la vitesse de phase (recherche des maxima du spectre – (7)) se révèle très peu sensible au bruit (Fig. 2(a)). Il est en outre indépendant de la fréquence d'échantillonnage. Les résultats obtenus à partir d'essais échantillonnés à 3 fréquences différentes, apparaissent en effet superposés (Fig. 3(a)).

Le calcul de l'amortissement (largeur des résonances à mi-hauteur – (9)) montre en revanche une légère sensibilité au bruit des mesures (Fig. 2(b)). Il s'avère aussi fortement dépendant de la durée d'acquisition de la mesure de déformation (Fig. 3(b)). Comme les expressions (7) et (9) sont établies en supposant que la durée d'acquisition est infinie, on doit étudier l'influence de la durée d'acquisition sur le calcul de la célérité et de l'amortissement.

L'allure, au voisinage de la fréquence nulle, de l'évolution de la vitesse de phase et de l'amortissement ainsi mesurés est bien conforme au cas d'un faible amortissement, comme on le vérifie en comparant (dans les cartouches des figures où est représenté un agrandissement près de l'origine) ces résultats à ceux calculés avec un simple modèle rhéologique de Zener dont les paramètres sont ajustés (module élastique $E_0 = 7,31 \times 10^{10}$, module d'écrouissage $E_1 = 8,55 \times 10^{12}$ et viscosité $\eta = 1,23 \times 10^9$ Pa·s).

5. Influence de la durée finie de la mesure

De $L > 0$ et, compte tenu de la condition de causalité, de $\Im(\omega) < 0$ (partie imaginaire de ω), nous déduisons que $|e^{-2i\xi(\omega)L}| < 1$. Développons alors (3) en série de $e^{-2i\xi(\omega)L}$. La déformation est donnée par :

$$\tilde{\varepsilon}(x, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\theta}(\omega) e^{-i\xi(\omega)(x+(2m+1)L)} - \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\theta}(\omega) e^{-i\xi(\omega)(-x+(2m+1)L)} \quad (10)$$

Dans l'expression (10), on peut interpréter le terme $\tilde{\theta}(\omega) e^{-i\xi(\omega)(x+(2m+1)L)}$ comme correspondant à la $(m + 1)$ ème onde montante et le terme $\tilde{\theta}(\omega) e^{-i\xi(\omega)(-x+(2m+1)L)}$ comme correspondant à la $(m + 1)$ ème onde descendante. La composante fréquentielle de la déformation, mesurée sur une durée totale T , au voisinage de la résonance ω_p , est déduite de (10) où ne sont considérés que les M_p premiers termes de la somme, où $M_p \approx [c_p T / 2L] + 1$.

En développant ensuite $\sin(\xi(\omega)x)$ et $\sin(\xi(\omega)L)$ comme à la Section 3.2, le spectre de la mesure de déformation, au voisinage de la résonance ω_p , correspondant à une durée de mesure finie T , est donné par :

$$S^{(M_p)}(x, \omega) = |\tilde{\theta}(\omega)|^2 \frac{x^2 \alpha_p^2 + \sin^2(x\omega/c_p)}{L^2 \alpha_p^2 + \sin^2(L\omega/c_p)} \left(1 + e^{4M_p L \alpha_p} - 2 e^{2M_p L \alpha_p} \cos\left(2M_p L \frac{\omega}{c_p}\right) \right) \quad (11)$$

Sur la Fig. 4(a), on montre la différence entre le spectre autour de la 1ère résonance d'une mesure (simulée) de déformation pour un temps d'acquisition infini et pour un temps d'acquisition correspondant à 10 aller-retours. Cette différence est importante. Ainsi, si on ne tenait pas compte de la durée d'acquisition finie, la valeur de l'amortissement obtenue serait erronée.

Pour une mesure précise, on propose donc de minimiser l'écart entre la réponse expérimentale et le résultat exprimé par la formule (11). Dans un voisinage en ω de la p ème résonance où l'amortissement et la vitesse de phase sont supposés constants, nous supposons que l'excitation est également constante ($\theta(\omega) \cong \theta_p$). Le spectre de mesure de déformation et l'expression au voisinage de la résonance donnée dans (11) ne dépendent alors que des paramètres α_p , c_p et θ_p . Toutefois, c_p étant déjà déterminé avec précision, on minimise seulement par rapport à α_p et θ_p .

Le Tableau 1 montre les valeurs obtenues avec cette méthode pour la première résonance (montrée sur la Fig. 4) avant ($\alpha_1^{(M)}$) et après ($\alpha_1^{(M, \text{opt})}$) l'effet de la correction qui tient compte de la durée d'acquisition.

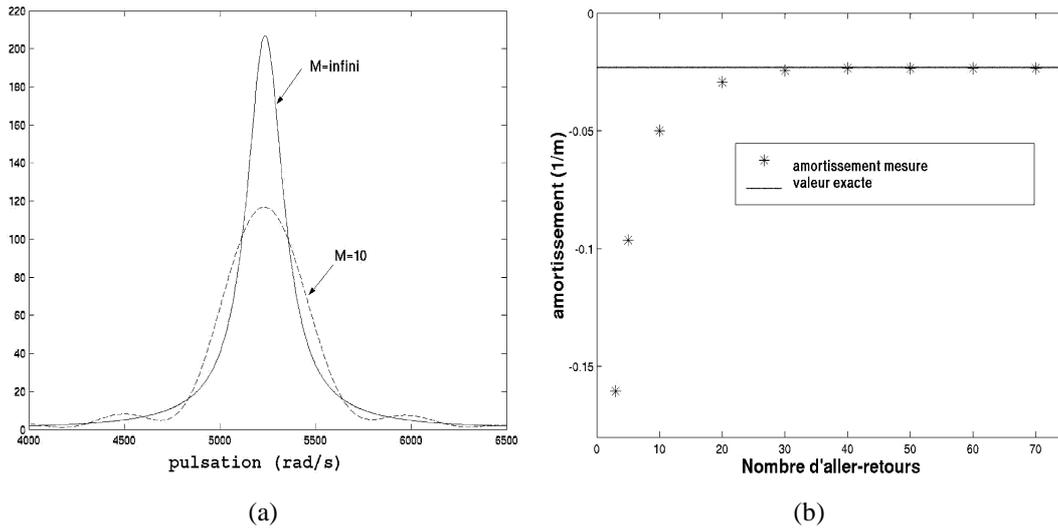


Figure 4. (a) Spectre de la déformation au voisinage de la 1ère résonance ; (b) évolution de la valeur de l’amortissement en fonction du nombre d’aller-retours considéré.

Figure 4. (a) Deformation spectrum near the 1st resonance; (b) evolution of damping as a function of the number of round trips.

Tableau 1. Effet de la durée (finie) de la mesure.

Table 1. Influence of the (finite) duration of the measurement.

	$\omega_1 = 5235 \text{ rad/s}$		$c_1^{\text{exact}} = 5002,2 \text{ m/s}$		$\alpha_1^{\text{exact}} = -0,0232 \text{ m}^{-1}$	
M	10		20		30	
	valeur	erreur (%)	valeur	erreur (%)	valeur	erreur
$\alpha_1^{(M)}$	-0,0499	115	-0,0294	27	-0,0244	5%
$\alpha_1^{(M,\text{opt})}$	-0,0239	3,03	-0,0234	0,9	-0,0232	ε

On constate que cette dernière est essentielle lorsque M_p est en dessous de la valeur critique ($M_p^{(c)} = 40$) qui apparaît sur la Fig. 4(b). L’amortissement est alors obtenu avec une bonne précision.

En revanche, la position de la résonance n’est pas sensible à la durée finie de la mesure, ce qui explique les résultats obtenus sur la Fig. 3(a).

6. Détermination et vérification de la relation de la dispersion

On utilise la méthode proposée pour déterminer expérimentalement la relation de dispersion d’une barre en aluminium à l’aide du dispositif décrit à la Section 4. Cet exemple montre qu’elle est bien adaptée pour mesurer de très faibles amortissements.

Pour vérifier la précision de la relation de dispersion, on extrait du signal temporel la première onde incidente (non superposée à la première onde réfléchi, Fig. 6). On transporte ensuite cette onde autant de fois que nécessaire pour reconstruire le signal mesuré par la jauge [11].

La comparaison du signal mesuré et du signal ainsi construit montre l’excellent accord des résultats : l’erreur maximale est de 3,3% après 5 aller-retours (Fig. 6) correspondants à un transport sur une distance de 30 m.

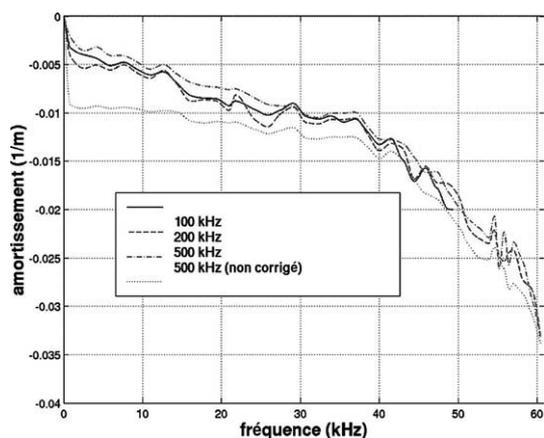


Figure 5. Amortissement après correction de coupure.

Figure 5. Damping after cut off correction.

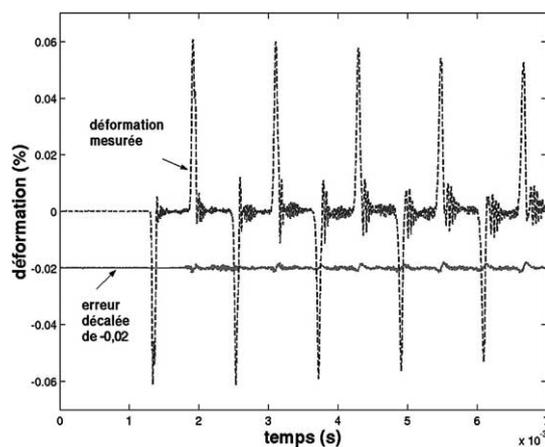


Figure 6. Erreur de reconstruction de la déformation mesurée par la jauge.

Figure 6. Error on the reconstruction of the strain measured by the gauge.

7. Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une méthode alternative pour la détermination expérimentale de la dispersion dans les barres élastiques et faiblement viscoélastiques. Cette méthode, appliquée à une barre en aluminium, nous a permis de déterminer la vitesse de phase et l'atténuation des ondes pour une bande de fréquences allant jusqu'à 60 kHz. La précision est excellente, l'erreur sur la reconstruction des signaux de déformation obtenus par transports successifs est inférieure à 3,5% après plusieurs aller-retours dans la barre. La méthode s'avère robuste vis à vis des perturbations engendrées par le bruit et particulièrement efficace lorsque de très faibles valeurs de l'amortissement sont mises en jeu, comme c'est le cas pour les barres métalliques.

Références bibliographiques

- [1] R.H. Blanc, Transient wave propagation methods for determining the viscoelastic properties of solids, *J. Appl. Mech.* 60 (3) (1993) 763–768.
- [2] B. Lundberg, R.H. Blanc, Determination of mechanical material properties from the two-point response of an impacted linearly viscoelastic rod specimen, *J. Sound Vib.* 137 (1988) 483–493.
- [3] P.S. Follansbee, C. Frantz, Wave propagation in the split Hopkinson pressure bar, *J. Engrg. Mater. Tech.* 105 (61) (1983) 61–66.
- [4] D.A. Gorham, A numerical method for the correction of dispersion in pressure bar signals, *J. Phys. E* 16 (1983) 477–479.
- [5] J.C. Gong, L.E. Malvern, D.A. Jenkins, Dispersion investigation in the split Hopkinson pressure bar, *J. Engrg. Mater. Tech.* 112 (1990) 309–314.
- [6] M.N. Bussac, P. Collet, G. Gary, R. Othman, An optimisation method for separating and rebuilding one-dimensional dispersive waves from multi-point measurements. Application to elastic or viscoelastic bars, *J. Mech. Phys. Solids* 50 (2002) 321–349.
- [7] D.A. Gorham, X.J. Wu, An empirical method for correcting dispersion in pressure bar measurements of impact stress, *Meas. Sci. Technol.* 7 (1996) 1227–1232.
- [8] C. Bacon, An experimental method for considering dispersion and attenuation in a viscoelastic Hopkinson Bar, *Exper. Mech.* 38 (4) (1998) 242–249.
- [9] L. Hillström, M. Mossberg, B. Lundberg, Identification of complex modulus from measured strains on an axially impacted bar using least squares, *J. Sound Vib.* 230 (3) (2000) 689–707.
- [10] R.M. Davies, A critical study of Hopkinson pressure bar, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 240 (1948) 375–457.
- [11] R. Othman, R.H. Blanc, M.N. Bussac, P. Collet, G. Gary, A spectral method for wave dispersion analysis. Application to an aluminium rod, in: A. Chiba, S. Tanimura, K. Hokamoto (Eds.), *Impact Engineering and Application*, Proceedings of the 4th International Symposium of Impact Engineering, Elsevier, 2001, pp. 71–76.