

Modèles discrets de structures tissées : Analyse de stabilité et de drapé

Bilel Ben Boubaker^a, Bernard Haussy^a, Jean-François Ganghoffer^b

^a ESEO, 4, rue Merlet de la Boulaye, BP 926, 49009 Angers cedex 01, France

^b LEMTA, UMR 7563, ENSEM, 2, avenue de la Forêt de Haye, BP 160, 54504 Vandoeuvre cedex, France

Reçu le 16 juillet 2002 ; accepté après révision le 15 octobre 2002

Note présentée par Évariste Sanchez-Palencia.

Résumé

Un modèle discret d'une structure tissée d'armature toile est construit, à partir d'un réseau de nœuds dotés d'une masse et de rigidité en rotation, et connectés par des barres rigides. L'ensemble de quatre barres délimitant un rectangle est doté d'une rigidité en torsion. La cinématique du treillis reproduit les grandes rotations et grands déplacements rencontrés sur des tissus d'amure toile. La forme d'équilibre d'une telle structure est obtenue par la minimisation de son énergie potentielle vis à vis de l'ensemble des variables cinématiques de translation et de rotation, en prenant en compte d'éventuelles liaisons dues à la présence d'un appui sur une forme rigide par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Une analyse de stabilité est menée, et on illustre les potentialités du modèle par des simulations du drapé. *Pour citer cet article : B. Ben Boubaker et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 871–877.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

solides et structures / structures tissées / modèles discrets / comportement mécanique / instabilité / drapé

Discrete models of woven structures: stability and draping analysis

Abstract

A discrete model of a woven fabric structure is established, whereby nodes endowed with a mass and a rotational rigidity are connected by rigid bars to form a two-dimensional truss. The set of four bars that delineate a quadrilateral area is further endowed with a torsion deformation mode. The kinematics of the truss reproduces the large rotations and displacements encountered for real tissues. The equilibrium shape of such a structure is obtained as the minimum of its total potential energy versus the whole set of kinematic translational and rotational variables, accounting for eventual kinematic constraints due to contact with a rigid surface by the Lagrange multipliers method. A stability analysis is conducted, and the potentiality of the model is illustrated by fabric draping simulations. *To cite this article: B. Ben Boubaker et al., C. R. Mecanique 330 (2002) 871–877.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

solids and structures / woven structures / discrete models / mechanical behaviour / instability / draping simulation

Adresses e-mail : Bilel.ben_boubaker@eseo.fr (B. Ben Boubaker); Bernard.haussy@eseo.fr (B. Haussy); jfgangho@ensem.inpl-nancy.fr (J.-F. Ganghoffer).

Abridged English version

The analysis of the deformations and shape forming of woven structures such as textiles is nowadays an important scientific and technological topic, due to the wide range of applications of these structures: we can mention, e.g., composites with a woven reinforcement used in aerospace industry for their gain of weight; clothing industry, or geotextiles. Due to their discrete nature, it is necessary to analyse the behaviour from the scale of a yarn or a set of intertwined yarns, possibly accounting for their mechanical coupling. Three imbricated scales can be identified: the microscopic scale (scale of the yarn), the macroscopic scale of the woven structure, and an intermediate scale of a few intertwined yarns that defines the unit cell that shall reproduce the whole structure by a periodic translation. This last scale is called the mesoscopic level, and the corresponding piece of fabric can be considered as flat – basically a plate element within the spirit of structural mechanical elements –, thus can be identified to the pattern. There lies the basic fundamental technological problem of fabric realisation: one has indeed to connect together the various pieces of pattern, in order to produce a three-dimensional woven structure. The microstructure (via the contact areas between the yarns, and the organisation of the yarns within the unit cell, such as satin, serge) plays there an important role in favouring the shape forming of the initially flat structure. It is therefore important to develop reliable and accurate micromechanical models (that account for the microstructure), in order to predict the 3D deformation of woven structures during real forming processes. These models can then further be used at the next scale (the macro scale) and implemented in FE codes [1–5]; this description can be refined, using the so-called meso-macro models that account for the nonlinearities due to the change of undulations of the yarns [5,6]. A synthetic view of the modelling of woven structures is given in [7].

An alternative presented in this Note consists in the setting up of a discrete model of fabric, relying on a topological description of the yarns within a certain unit cell, in connection with a given assumed kinematics of its analogical elements (extensional, flexional and torsional springs). This kind of approach bears some resemblance with the work by Prevot [8], who models the tissue by a set of punctual masses connected with extensional, flexional and shear-like springs; however, the model does only consider the in-plane deformation of the pattern, and thus excludes the displacements of the nodes outside the initial plane of the tissue.

The woven structure is herewith being modelled by a set of rigid beams connected at frictionless hinges, Fig. 1(a); the extension of the yarns is neglected in this first step, which is a realistic assumption, considering, e.g., carbon fibers reinforced woven composites used in the aerospace industry (the assembly can sustain one or two percent deformation up to rupture). Accordingly, the kinematics consists mostly of the addition of rotations, that are responsible for the large displacements and rotations observed at the macroscopic level. Each node of the trellis – labelled by the set of indices (i, j) – is given a mass m and a rotational rigidity $C_{i,j}^b$; a torsional spring $C_{i,j}^t$ connects two nodes along each diagonal of the rectangle formed by the set of four beams that defines the unit cell of the micromechanical analysis (Fig. 1(b)), thereby generating a torsion. The basic nodal kinematic variables (displacements and rotations) are described in Fig. 1 (b) and (c). The Kirchhoff model is selected as the equivalent continuous plate model, that serves as a guide for defining the kinematics; the stress-strain relationship is given in (1), and the relationship between the flexional and torsional moments and the gradients of the rotation (2) are established in Eqs. (5a), (5b) and (6). It appears that the continuous model involves as mechanical properties the rigidities in flexion into the in-plane directions x, y , and the torsion modulus T . Note that although the topological description of the fabric relies on discrete elements that model the set of yarns, the basic properties involved in the model are identified from plate parameters, in terms of traction, shear and flexion moduli.

The total strain energy of the whole trellis is then established in (12) versus the discrete set of kinematic variables, including a flexional contribution, a torsional part, the energy of an assumed foundation, and the energy of the rotational edge springs (they represent assumed kinematic boundary conditions). The simulation of draping is performed, whereby the kinematic constraints satisfied by the nodes of the structure resting on a given support (the mould in shape forming processes) are taken into account using the Lagrange multipliers method (Fig. 2). A stability analysis is conducted, relying on Dirichlet–Lagrange stability

criterion: the first critical load obtained (for a set of 9 by 9 analogical elements) is $P_1^c = 39.07D/L^2$, which is very near the exact solution given in [13] by $P_{\text{exact}}^c = 39.48D/L^2 = 4\pi^2 D/L^2$.

1. Introduction

L'analyse des déformations et des capacités de mise en forme de nappes textile présente de nos jours un grand intérêt en raison de l'utilisation très répandue et variée de ces structures (composites à renforts tissés utilisés en construction mécanique; industrie de l'habillement; géotextiles). La nature discrète des textiles situe d'emblée l'échelle de modélisation au niveau des fils et de leur entrecroisement. Une analyse micromécanique menée sur une cellule de base, permet de formuler une loi de comportement d'un matériau homogène équivalent, qui est mise à profit pour simuler par des techniques numériques du type éléments finis le comportement macroscopique de ces structures [1–5], par exemple lors du drapé ou de l'emboutissage. Des modèles dits méso-macro permettent d'affiner cette description par la prise en compte au niveau de la maille des non linéarités géométriques dues au changement d'ondulation des fils constitutifs du tissu [5,6]. Une synthèse des modélisations des structures tissées est donnée dans [7].

Une alternative présentée dans cette Note consiste à construire un modèle discret de la structure, sans chercher à établir un modèle continu équivalent. Les modèles discrets s'appuient sur une description topologique du tissu (à l'échelle microscopique), et prennent en compte les caractéristiques mécaniques du constituant de base (le fil). Provot [8] modélise le tissu par un ensemble de masses ponctuelles reliées par des ressorts d'extension, de cisaillement plan et de flexion plane (qui connectent les seconds voisins entre eux). Le modèle ne prend cependant pas en compte les déplacements des nœuds hors du plan initial du tissu.

Le modèle discret présenté dans ce travail prend en compte les propriétés mécaniques du tissu, par le biais d'éléments analogiques (masses; ressorts); il décrit essentiellement les propriétés de flexion et de torsion de la nappe. Après une présentation de la cinématique du modèle, l'énergie potentielle est établie pour une structure libre, puis présentant des conditions de liaison. Une analyse de stabilité est menée, et un exemple d'étude de drapé est présenté.

2. Modèle discret du tissu

Le tissu est considéré comme une structure élastique orthotrope dont les directions principales d'anisotropie coïncident avec les directions chaîne et trame. La structure est modélisée par un réseau de poutres rigides connectées en des articulations de type rotule sans friction, qui se déploie dans un plan à l'état naturel, Fig. 1(a). Chaque nœud du treillis d'indices (i, j) est affecté d'une masse m (supposée identique pour tous les nœuds) et doté d'une rigidité en rotation $C_{i,j}^b$ qui permet des rotations autour des axes x, y (Fig. 1(c)). Un ressort de rigidité $C_{i,j}^t$ est placé selon chacune des deux diagonales du rectangle formé par quatre poutres, (Fig. 1(b)): le treillis est ainsi doté d'une torsion à l'échelle du quadrilatère formé par les quatre poutres. La rigidité en flexion étant en général nettement plus faible que la rigidité en extension, on négligera dans cette étude l'extension du fil.

La prise en compte d'un éventuel appui sur une fondation est décrite par des ressorts d'extension perpendiculaires au plan initial du treillis (Fig. 1(a)), de rigidité uniforme $C_{\text{fondation}}$. Les nœuds du bord du treillis sont affectés de rigidités en rotation $C_{\text{bord1}}, C_{\text{bord2}}, C_{\text{bord3}}, C_{\text{bord4}}$, supposées uniforme pour chaque bord, ce qui permet la prise en compte d'une certaine variété de conditions aux limites (encastrement; bords libres; contact latéral élastique) [9], en vue notamment de l'étude ultérieure des conditions de stabilité.

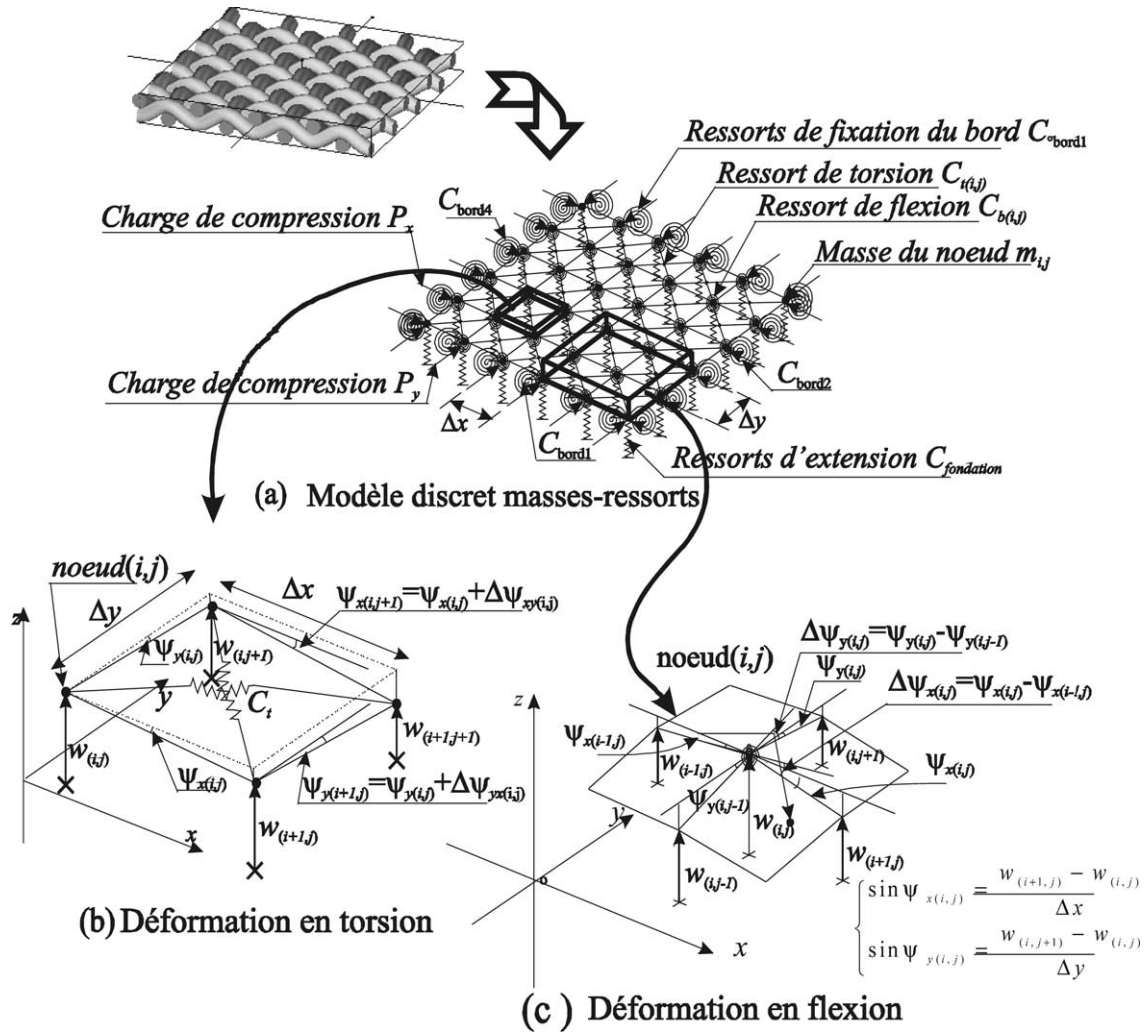


Figure 1. Modèle discret du tissu.
Figure 1. Discrete model for fabric.

3. Energie potentielle du treillis

Pour des plaques minces, les hypothèses du modèle de Kirchhoff [10] conduisent à exprimer le vecteur des contraintes $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ en fonction du vecteur des déformations $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ selon

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} & \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

E_1, E_2 sont les modules de rigidité dans les directions chaîne et trame, G le module de cisaillement, et ν_1, ν_2 les coefficients de contraction dans les directions chaîne et trame. Soit $w(x, y)$ le déplacement vertical d'un

point de la plaque de coordonnées (x, y) ; les rotations de flexion selon les axes x et y sont respectivement

$$\psi_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \psi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

Le vecteur des déformations $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ est alors à son tour relié à $w(x, y)$ selon

$$(\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}) = -z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3)$$

Les moments de flexion et de torsion sont définis par l'intégration des contraintes dans l'épaisseur de la plaque selon

$$(M_x \quad M_y \quad M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x \quad \sigma_y \quad -\tau_{xy}] z \, dz \quad (4)$$

La substitution des relations (1)–(3) dans (4) permet d'exprimer les moments en fonction des rotations

$$M_x = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \cong D_1 \left(\frac{\Delta \psi_x}{\Delta x} + \nu_2 \frac{\Delta \psi_y}{\Delta y} \right) \quad (5a)$$

$$M_y = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \cong D_2 \left(\frac{\Delta \psi_y}{\Delta y} + \nu_1 \frac{\Delta \psi_x}{\Delta x} \right) \quad (5b)$$

$$M_{xy} = 2G \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2G \frac{h^3}{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \cong T \frac{\Delta \psi_{xy}}{\Delta y}; \quad M_{yx} = 2G \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2G \frac{h^3}{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \cong T \frac{\Delta \psi_{yx}}{\Delta x} \quad (6a,b)$$

$D_1 = (E_1/(1 - \nu_1 \nu_2))(h^3/12)$ et $D_2 = (E_2/(1 - \nu_1 \nu_2))(h^3/12)$ sont les rigidités en flexion de la plaque dans les directions x et y , T la rigidité en torsion, et Δx , Δy les périodes des fils chaîne et trame respectivement. Les angles de torsion sont définis au nœud (i, j) par les variations suivantes des angles de rotation ψ_x, ψ_y :

$$\Delta \psi_{xy(i,j)} = \psi_{x(i,j+1)} - \psi_{x(i,j)}; \quad \Delta \psi_{yx(i,j)} = \psi_{y(i+1,j)} - \psi_{y(i,j)}$$

L'énergie de flexion associée au ressort (i, j) est alors

$$\Delta U_{b(i,j)} = \frac{1}{2} M_{x(i,j)} \Delta \psi_{x(i,j)} \Delta y + \frac{1}{2} M_{y(i,j)} \Delta \psi_{y(i,j)} \Delta x \quad (7)$$

en tenant compte des expressions (5a), (5b). L'énergie de torsion est obtenue de même selon

$$\Delta U_{t(i,j)} = \frac{1}{2} M_{xy(i,j)} \Delta \psi_{xy(i,j)} \Delta x + \frac{1}{2} M_{yx(i,j)} \Delta \psi_{yx(i,j)} \Delta y \quad (8)$$

compte tenu des relations (6a), (6b). L'énergie flexionnelle totale du treillis est alors la somme

$$U_s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m U_{b(i,j)} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} U_{t(i,j)} \quad (9)$$

où n et m sont respectivement le nombre de chaînes verticales et de chaînes horizontales.

Les conditions limites reposent sur l'hypothèse que la rigidité en flexion des quatre nœuds sommets du treillis est nulle; de même, les variations angulaires $\Delta \psi_y$ (resp. $\Delta \psi_x$) sont imposées nulles sur le bord longitudinal (resp. transverse). Il faut ajouter à U_s l'énergie de la fondation, soit

$$U_{\text{fondation}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} C_{\text{fondation}(i,j)} w_{(i,j)}^2 \quad (10)$$

Enfin, l'énergie de ressorts de rotation des bords du treillis est

$$U_{\text{bords}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} C_{\text{bord1}} \psi_y^2(i,1) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} C_{\text{bord2}} \psi_y^2(i,m-1) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} C_{\text{bord3}} \psi_x^2(1,j) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} C_{\text{bord4}} \psi_x^2(n-1,j) \quad (11)$$

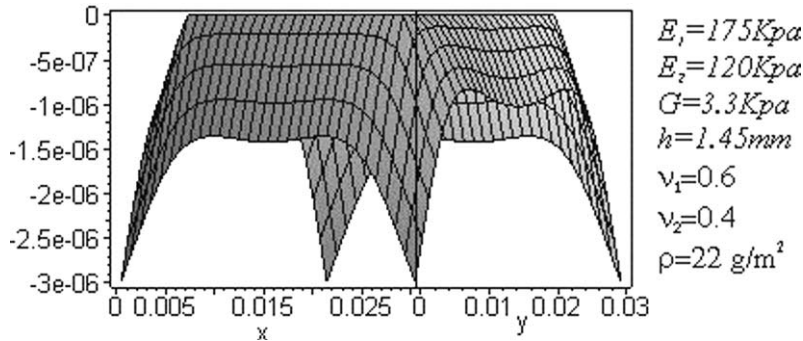


Figure 2. Forme prise au tombé par une nappe (31 × 31 nœuds) posée sur une table carrée (3 cm × 3 cm).

Figure 2. Shape taken by a draped cloth (31 × 31 nodes) lying on a square table (3 cm × 3 cm).

L'énergie totale du treillis est alors la somme des contributions (9)–(11). On construit la fonctionnelle énergie potentielle de la structure en lui soustrayant le travail des efforts extérieurs (efforts de compression P_x , P_y (charges concentrées), cf. Fig. 2 ; poids des masses nodales), soit en appelant S la surface du treillis, et ρ la densité massique par unité d'aire de la nappe :

$$W_{\text{ext}} = -\rho g \frac{S}{n \times m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{(i,j)} + P_x \Delta x \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^m (1 - \cos \psi_{x(i,j)}) + P_y \Delta y \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} (1 - \cos \psi_{y(i,j)}) \quad (12)$$

avec $P_x = p_x \Delta x$ et $P_y = p_y \Delta y$, et p_x et p_y les charges uniformes de compression exercées sur la nappe respectivement selon les directions x et y .

L'énergie potentielle V peut être exprimée en fonction des seuls déplacements, compte tenu des relations

$$\begin{aligned} \sin \psi_{x(i,j)} &= \frac{w_{(i+1,j)} - w_{(i,j)}}{\Delta x}, & (i, j) \in [1, n-1] \times [1, m] \\ \sin \psi_{y(i,j)} &= \frac{w_{(i,j+1)} - w_{(i,j)}}{\Delta y}, & (i, j) \in [1, n] \times [1, m-1] \end{aligned}$$

valables pour de petites rotations aux nœuds (n'excluant pas une rotation macroscopique importante).

4. Étude de stabilité

L'analyse de stabilité sous charge repose sur le critère de Dirichlet–Lagrange [11,12] : le treillis devient instable lorsque le déterminant de la matrice de stabilité K s'annule ; cette dernière est définie par le hessien de l'énergie potentielle totale $V(w_{1,1}, \dots, w_{1,j}, \dots, w_{1,m}, \dots, w_{i,1}, \dots, w_{n,m})$, soit

$$K_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial w \partial w} \right)_{i,j}; \quad (i, j) \in [1, \dots, n \times m; 1, \dots, n \times m]$$

La condition $\text{Det}(K) = 0$ prend la forme d'un polynôme de degré $(n-2) \times (m-2)$. La première racine caractérise le premier point de bifurcation, et marque la transition de l'état stable vers l'état instable. A titre d'exemple, on considère une plaque en appui simple sur ses quatre faces, et soumise à une compression uniforme dans la seule direction x . On se restreint au cas d'une plaque carrée d'un tissu équilibré en chaîne et en trame, soit $m = n$, et $\Delta x = \Delta y = \Delta = L/n$, dotée de propriétés identiques dans les deux directions du plan. La matrice de stabilité d'un treillis carré de 9 éléments barre ($n = m = 10$), s'exprime en fonction du paramètre $\lambda := P \Delta / D$; la plus petite racine du polynôme caractéristique est $\lambda = 0.4824$, d'où la première charge critique

$$p_1^c = \frac{P_1^c}{\Delta} = \frac{\lambda D}{\Delta^2} = 39.07 \frac{D}{L^2}$$

Cette expression est très proche de la solution exacte donnée par l'expression [13]

$$p_{\text{exact}}^c = 39.48 \frac{D}{L^2} = 4 \frac{\pi^2 D}{L^2}$$

Comparativement à d'autres méthodes (Rayleigh–Ritz, différences finies, éléments finis), l'étude de stabilité menée à partir de cette approche discrète est plus simple (et moins coûteuse en temps de calcul), [12].

5. Simulation du drapé

La forme d'équilibre d'une nappe en appui simple sur une forme rigide (qui représente un moule ou une table) est obtenue en minimisant l'énergie potentielle du treillis, augmentée du terme

$$U_{\text{aux}} = \sum_{(k,l) \in \Omega} \lambda_{(k,l)} (w_{(k,l)} - h_{(k,l)})$$

qui prend en compte les relations de liaison vérifiées par les nœuds du treillis fixés sur la forme rigide :

$$w_{(k,l)} = h_{(k,l)}; \quad (k, l) \in \Omega = \{(i, j) \in [1, n] \times [1, m], w_{(i,j)} = cst\}$$

Les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_{i,j}$ sont identifiés à des forces de réaction des nœuds de liaison.

La simulation de la forme prise au tombé (le poids est la seule force extérieure) d'une nappe posée sur une table carrée est représentée Fig. 2 (logiciel Maple©).

La prise en compte de l'énergie d'extension des fils, ainsi que le suivi de l'évolution de la nappe dans le domaine post-bifurcation constituent des perspectives importantes de développement de ce travail.

Références bibliographiques

- [1] P. Boisse, M. Borr, K. Buet, A. Cherouat, Finite element simulations of textile composite forming including the biaxial fabric behaviour, *Composites Part B* 28 (1997) 453–464.
- [2] A. Cherouat, J.L. Billoët, Mechanical and numerical modelling of composite manufacturing processes depp-drawing and laying-up of thin pre-impregnated woven fabrics, *J. Mater. Process. Techn.* 118 (2001) 460–471.
- [3] M. Magno, J.F. Ganghoffer, R. Postle, A. Lallam, A mesoscopic wave model for textile materials in large deformations, *Composite Structures* 57 (2002) 367–371.
- [4] H. Tollenaere, D. Caillierie, Continuous modeling of lattice structures by homogenization, *Adv. Engrg. Software* 29 (7–9) (1998) 699–705.
- [5] P. Boisse, J.L. Daniel, A. Gasser, G. Hivet, D. Soulat, Prise en compte du procédé de fabrication dans la conception des structures composites minces, *Mec. Ind.* 1 (2001) 303–311.
- [6] J. Hofstee, F. van Keulen, 3-D geometric modeling of a draped woven fabric, *Composite Structures* 54 (2001) 179–195.
- [7] H.Ng Hing, R.L. Grimsdale, Computer graphics techniques for modeling cloth, *IEEE Comput. Graphics Appl.* 16 (5) (1996) 28–41.
- [8] X. Provot, Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior, *Graphics Interface* (1995) 147–155.
- [9] A.R.D. Silva, R.A.M. Silveira, P.B. Gonçalves, Analysis of plate under contact constraints, in: *Computational Mechanics, New Trends and Applications CIMNE*, Barselona, 1998.
- [10] F. Kikuchi, K. Ishii, Unification of Kirchhoff and Reissner–Mindlin plate bending elements, in: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000*, Barcelona, 11–14 September, 2000.
- [11] S. Timoshenko, *Théorie de la Stabilité Élastique*, Beranger, Paris & Liège, 1947.
- [12] M.S. El Naschie, *Stress-Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach*, McGraw-Hill, London, 1990.
- [13] K.K. Kapur, A.M. Asce, J. Billy, M. Asce, Stability of plates using the finite element method, *J. Engrg. Mech. Division EM2* (1966) 177–195.