



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 127–132



Migration d'une particule ellipsoïdale conductrice sous l'action d'un champ électromagnétique uniforme

Migration of a conducting ellipsoid subject to uniform ambient electric and magnetic fields

Antoine Sellier

LadHyX, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 14 octobre 2002 ; accepté après révision le 14 janvier 2003

Présenté par René Moreau

Résumé

On établit l'expression analytique du mouvement d'une micro-particule solide, conductrice et ellipsoïdale plongée dans un métal liquide conducteur et soumise à un champ électromagnétique uniforme. Quelques propriétés remarquables de ce mouvement sont alors examinées. *Pour citer cet article : A. Sellier, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

We obtain analytically, within a relevant framework, the rigid-body motion of a solid, conducting and ellipsoidal particle immersed in a liquid metal and subject to uniform ambient electric and magnetic fields. The motion experienced exhibits a few basic properties that are briefly discussed. *To cite this article : A. Sellier, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Magnétohydrodynamique ; Migration ; Ellipsoïde

Keywords : Fluid mechanics ; Magnetohydrodynamics ; Migration ; Ellipsoid

Abridged English version

Any solid and conducting particle \mathcal{P} immersed in a liquid metal moves [1] under external and uniform electric and magnetic fields \mathbf{E} and \mathbf{B} . Since this motion allows impurities removal, it is worth determining the translational velocity \mathbf{U} of one point O attached to \mathcal{P} and the angular velocity $\boldsymbol{\Omega}$ of \mathcal{P} . This has been achieved both for

Adresse e-mail : sellier@ladhyx.polytechnique.fr (A. Sellier).

conducting spheres [1,2] and insulating ellipsoids [3]. This Note addresses the motion of a conducting ellipsoid and examines its main properties.

We adopt Cartesian coordinates (O, x_1, x_2, x_3) , the summation convention with $\mathbf{OM} = \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ and $r^2 = x_i x_i$ and first consider an arbitrarily-shaped particle of length scale a and surface S of unit outward normal \mathbf{n} (see Fig. 1). The particle and the fluid admit constant conductivity $\sigma_s \geq 0$ and $\sigma > 0$ respectively and the electric field becomes $\mathbf{E} - \nabla\phi'$ in \mathcal{P} and $\mathbf{E} - \nabla\phi$ in $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{P} \cup S)$ where ϕ and ϕ' obey (1), (2). Denoting by ρ, μ, μ_0 and U the constant fluid density, viscosity, electromagnetic permeability and the fluid velocity scale, the Reynolds number Re , the Reynolds magnetic number Re_m and the Hartmann number M [4] are assumed to obey (3). Accordingly, the net force \mathbf{F}' and torque \mathbf{G}' (with respect to O) applied by the Lorentz body force on \mathcal{P} obey (4) and, see [5], the fluid flow (\mathbf{u}, p) , of stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ and Lorentz body force $\mathbf{f} = \sigma(\mathbf{E} - \nabla\phi) \wedge \mathbf{B}$, is governed by the quasi-static Stokes problem (5), (6). Neglecting any inertial effect and denoting by \mathbf{F} and \mathbf{G} the net force and torque induced on S by (\mathbf{u}, p) , we finally obtain $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$ by requiring that $\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$ and $\mathbf{G} + \mathbf{G}' = \mathbf{0}$. As soon as \mathcal{P} is orthotropic (with planes $x_i = 0$ as planes of symmetry), $\mathbf{G} = \mathbf{G}' = \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ and the velocity \mathbf{U} , of general form (7) with ε_{ijk} the permutation tensor and $\delta = \sigma_s/\sigma$ [5], is deduced from $\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$. Introducing 3 Stokes flows $(\mathbf{u}_T^{(i)}, p_T^{(i)})$ of stress tensor $\boldsymbol{\sigma}_T^{(i)}$ through (8) and applying the extended (with body forces) reciprocal identity [6] to (\mathbf{u}, p) and $(\mathbf{u}_T^{(i)}, p_T^{(i)})$, as detailed in (9), one deduces (10) and the basic equation (11) where \mathcal{V} is the volume of our orthotropic particle and $\mathbf{K} = K_{ii} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$.

Let us apply (11) to the motivating case of an ellipsoid (a_1, a_2, a_3, δ) of relative conductivity $\delta = \sigma_s/\sigma$ and surface S and associated outer normal \mathbf{n} given by (12). We introduce coefficients α_j by (13) and, by superposition, first select $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_1$. Following [7], ϕ' and ϕ are sought under the forms (14) with $\beta(M)$ obeying equalities (15) without summation over i . Such choices ensure (1) and $\phi = \phi'$ on S . The unknown constant A is deduced from the other boundary condition (2). After elementary algebra, one obtains (16). For $\mathbf{E} = E_j \mathbf{e}_j$ we introduce coefficients $C_j(\delta)$ and functions ϕ_0^j , harmonic in Ω , by (17). In virtue of (16), (11) then yields (18). Noting that $C_j(0) = 1$ whereas the electric field outside the insulating ellipsoid reads $\mathbf{E} - \nabla\phi_0^j$ if $\mathbf{E} = \mathbf{e}_j$, the coefficients $S_{ijk}(\delta)$ occurring in (7) obey $S_{ijk}(\delta) = C_j(\delta)S_{ijk}(0)$, without summation over j , for the ellipsoid. Since $S_{ijk}(0)$ is given for the insulating ellipsoid [3] by (19) (without summation over i and j) the required rigid-body motion $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$ of the ellipsoidal particle admits the form (20).

For a sphere of radius a , $\alpha_j = 2/3$ and (20) yields (21), i.e., one recovers available results [1,2] obtained by computing (\mathbf{u}, p, ϕ) in the whole fluid domain. Because α_j is unchanged under the change of scale $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$ (see (13)), the velocity of the ellipsoid $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \delta)$ is λ^2 times the velocity of the ellipsoid (a_1, a_2, a_3, δ) . In addition, (20) reveals that \mathbf{U} vanish with $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$, is parallel to $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ when this vector is parallel to one vector \mathbf{e}_i but in other circumstances \mathbf{U} not necessarily parallel to $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$! For instance, if $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_3$, $E_3 = 0$, $E_1 \neq 0$ and $E_2 \neq 0$ then (22) holds, i.e., for $a_1 \neq a_2$ the migration is not parallel to $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$. For such fields \mathbf{E} and \mathbf{B} , two spheroids $(\lambda a_1, \lambda a_1, \lambda a_3, \delta' \neq 1)$ and $(a_1, a_1, a_3, \delta \neq 1)$ experience the same translation if (23) holds. This result depends upon (\mathbf{E}, \mathbf{B}) : for $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_1$ and $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_3$, (23) must be replaced by (24).

Finally, it is worth pointing out that (20) provides a nice benchmark in testing any numerical treatment one would necessarily employ for arbitrary-shaped particles.

1. Introduction

Une particule solide \mathcal{P} de conductivité constante $\sigma_s \geq 0$ et plongée dans un métal liquide homogène, de conductivité $\sigma > 0$ et de viscosité μ , se déplace sous l'action de champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} uniformes dès que $\sigma_s \neq \sigma$ [1]. Ce mouvement, décrit par la vitesse \mathbf{U} de translation d'un point O de \mathcal{P} et sa vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}$, peut servir à extraire des impuretés. L'obtention de $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$ en fonction de $\mu, \sigma, \sigma_s, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ et de la forme de \mathcal{P} revêt donc une grande importance. A ce jour, seuls les cas d'une sphère conductrice [1,2] et d'un ellipsoïde

non conducteur [3] sont traités. Cette Note construit la solution pour une particule ellipsoïdale conductrice ($\sigma_s \neq 0$) et en examine certaines propriétés.

2. Formulation du problème pour une particule orthotrope quelconque

Nous adoptons des coordonnées cartésiennes orthonormées (O, x_1, x_2, x_3) et la convention de sommation des indices avec $\mathbf{OM} = x_i \mathbf{e}_i$ et $r^2 = x_i x_i$. Cette partie envisage une particule de taille caractéristique a , occupant l'ouvert \mathcal{P} de surface S (voir Fig. 1) et orthotrope avec pour plans de symétrie les trois plans $x_1 = 0, x_2 = 0$ et $x_3 = 0$.

Le fluide newtonien, de masse volumique ρ et de permittivité magnétique μ_0 , baigne l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{P} \cup S)$. La particule affecte \mathbf{E} et le champ électrique devient $\mathbf{E} - \nabla\phi'$ dans \mathcal{P} et $\mathbf{E} - \nabla\phi$ dans Ω où les potentiels de perturbation ϕ et ϕ' vérifient

$$\nabla^2\phi' = 0 \text{ dans } \mathcal{P}, \quad \nabla^2\phi = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \nabla\phi \rightarrow \mathbf{0} \text{ si } r \rightarrow \infty \tag{1}$$

$$\phi = \phi' \text{ sur } S, \quad \sigma_s(\mathbf{E} - \nabla\phi') \cdot \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{E} - \nabla\phi) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } S \tag{2}$$

où \mathbf{n} est la normale sortante sur S . Désignant par U la vitesse typique des points de \mathcal{P} , nous supposons [4] que les nombres de Reynolds Re , de Reynolds magnétique Re_m et de Hartmann M sont tels que

$$Re = \frac{\rho U a}{\mu} \ll 1, \quad Re_m = \mu_0 \sigma U a \ll 1, \quad M = |\mathbf{B}| a \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^{1/2} \ll 1 \tag{3}$$

Ainsi, \mathbf{B} n'est pas altéré. La résultante \mathbf{F}' et le moment \mathbf{G}' par rapport à O de la force de Lorentz \mathbf{f}' appliquée dans \mathcal{P} , s'écrivent

$$\mathbf{F}' = \sigma_s \left[\int_{\mathcal{P}} (\mathbf{E} - \nabla\phi') \, dv \right] \wedge \mathbf{B}, \quad \mathbf{G}' = \sigma_s \int_{\mathcal{P}} \mathbf{OM} \wedge [(\mathbf{E} - \nabla\phi') \wedge \mathbf{B}] \, dv \tag{4}$$

De son côté, l'écoulement (\mathbf{u}, p) du fluide, de force massique de Lorentz $\mathbf{f} = \sigma(\mathbf{E} - \nabla\phi) \wedge \mathbf{B}$ et de tenseur des contraintes σ , est régi [5] par les équations de Stokes

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ et } \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p - \sigma(\mathbf{E} - \nabla\phi) \wedge \mathbf{B} \text{ dans } \Omega \tag{5}$$

$$(\mathbf{u}, p) \rightarrow (\mathbf{0}, \sigma[\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}] \cdot \mathbf{OM}) \text{ si } r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{u} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OM} \text{ sur } S \tag{6}$$

et exerce sur la surface S de la particule une force \mathbf{F} et un moment \mathbf{G} (par rapport à O) hydrodynamiques. Le mouvement $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$ d'une particule, d'inertie négligeable et de forme arbitraire (orthotrope ou non), s'obtient alors

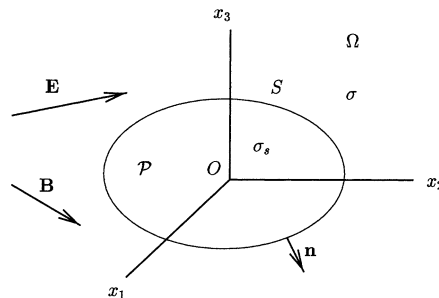


Fig. 1. Une particule solide, conductrice et orthotrope \mathcal{P} plongée dans (\mathbf{E}, \mathbf{B}) .
 Fig. 1. A solid, conducting and orthotropic particle \mathcal{P} embedded in (\mathbf{E}, \mathbf{B}) .

en imposant $\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$ et $\mathbf{G} + \mathbf{G}' = \mathbf{0}$. Des considérations de symétrie [5] montrent qu'une particule orthotrope ne tourne pas ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$) et admet, en posant $\delta = \sigma_s/\sigma$, une translation \mathbf{U} de la forme générale suivante

$$\mathbf{U} = \frac{\sigma}{\mu} S_{ijk}(\delta) [\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j] [\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_k] \mathbf{e}_i \quad \text{avec } S_{ijk}(\delta) = 0 \text{ si } \varepsilon_{ijk} = 0 \quad (7)$$

où ε_{ijk} est le tenseur des permutations. Dans un tel cas $\mathbf{G} = \mathbf{G}' = \mathbf{0}$ et le seul lien $\mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{0}$ procure \mathbf{U} (donc les 6 coefficients non nuls $S_{ijk}(\delta)$). La composante $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i$ s'obtient en appliquant le théorème de réciprocité étendu [6] (en présence de forces massiques) à (\mathbf{u}, p) et à l'écoulement de Stokes particulier $(\mathbf{u}_T^{(i)}, p_T^{(i)})$, de tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_T^{(i)}$ et de force massique $\mathbf{f}_T^{(i)}$ nulle, tel que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_T^{(i)} = 0 \quad \text{et} \quad \mu \nabla^2 \mathbf{u}_T^{(i)} = \nabla p_T^{(i)} \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{u}_T^{(i)} = \mathbf{e}_i \quad \text{sur } S \quad (8)$$

Puisque $\mathbf{f}_T^{(i)} = \mathbf{0}$ ce théorème de réciprocité s'écrit ici

$$\int_S [\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_T^{(i)} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] dS = - \int_{\Omega} \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad (9)$$

et procure alors l'expression (sans sommation des indices dans (10))

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_i = -\mu K_{ii} U_i - \sigma \left[\int_{\mathcal{P}} dv \right] \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} - \sigma \int_{\Omega} \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot [\nabla \phi \wedge \mathbf{B}] dv, \quad -\mu K_{ii} = \int_S \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_T^{(i)} \cdot \mathbf{n} dS < 0 \quad (10)$$

En posant $\mathbf{K} = K_{ii} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$, l'équation procurant \mathbf{U} s'écrit donc, d'après (8) et (10),

$$\mu \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \sigma \left\{ (\delta - 1) \mathcal{V} [\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}] - \delta \left[\int_{\mathcal{P}} \nabla \phi' dv \right] \wedge \mathbf{B} - \left[\int_{\Omega} \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot (\nabla \phi \wedge \mathbf{B}) dv \right] \mathbf{e}_i \right\} \quad (11)$$

où \mathcal{V} désigne le volume de la particule orthotrope. Une astuce similaire à celle employée dans [3] permettrait de convertir l'intégrale de volume sur Ω en une intégrale double sur S impliquant seulement les $\boldsymbol{\sigma}_T^{(i)} \cdot \mathbf{n}$ et les dérivées premières et secondes de ϕ . Ces quantités, jointes à la connaissance de $\nabla \phi'$ dans \mathcal{P} , permettent ainsi d'obtenir \mathbf{U} via (11) pour une particule orthotrope quelconque.

3. Solution analytique pour une particule ellipsoïdale

Considérons à présent une particule orthotrope ellipsoïdale telle que

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \frac{x_1/a_1^2 \mathbf{e}_1 + x_2/a_2^2 \mathbf{e}_2 + x_3/a_3^2 \mathbf{e}_3}{\{x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4 + x_3^2/a_3^4\}^{1/2}} \quad \text{si } M(x_1, x_2, x_3) \in S \quad (12)$$

Cherchons la solution de (1), (2). Dans ce but introduisons les constantes α_j telles que

$$\alpha_j = a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \frac{S(t) dt}{a_j^2 + t} \quad \text{où } S(t) = \{(a_1^2 + t)(a_2^2 + t)(a_3^2 + t)\}^{-1/2} \quad (13)$$

et, par superposition, choisissons d'abord $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_1$. En utilisant [7], nous prenons alors

$$\phi'(M) = -\frac{A \alpha_1 x_1}{a_1 a_2 a_3} \quad \text{dans } \mathcal{P}, \quad \phi(M) = -A \left[\int_{\beta(M)}^{\infty} \frac{S(t) dt}{a_1^2 + t} \right] x_1 \quad \text{dans } \Omega \cup S \quad (14)$$

où $\beta(x_1, x_2, x_3)$, définie dans $\Omega \cup S$, est telle que (sans sommation sur i dans (15))

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \beta} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \beta} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \beta} = 1, \quad \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_i} \right)_{\beta=0} = \frac{2x_i/a_i^2}{x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4 + x_3^2/a_3^4} \quad (15)$$

Les choix (14) assurent (1) et $\phi = \phi'$ sur la surface S associée à $\beta = 0$. La constante A est obtenue en écrivant que $\delta[E\mathbf{e}_1 - \nabla\phi'] \cdot \mathbf{n} = [E\mathbf{e}_1 - \nabla\phi] \cdot \mathbf{n}$ sur S , en exploitant la forme (12) de \mathbf{n} et (15). Quelques calculs élémentaires donnent $A = -a_1 a_2 a_3 D_1 E$ avec

$$D_1 = \frac{\delta - 1}{2 + (\delta - 1)\alpha_1}, \quad \nabla\phi' = \alpha_1 D_1 E \mathbf{e}_1 \quad \text{dans } \mathcal{P}, \quad \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = (\alpha_1 - 2) D_1 E \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } S \quad (16)$$

Pour le cas général $\mathbf{E} = E_j \mathbf{e}_j$ introduisons alors les coefficients $C_j(\delta)$ et les potentiels élémentaires ϕ_0^j , harmoniques dans Ω , tels que

$$C_j(\delta) = \frac{(\delta - 1)(\alpha_j - 2)}{2 + (\delta - 1)\alpha_j}, \quad \nabla\phi_0^j \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow \infty, \quad \nabla\phi_0^j \cdot \mathbf{n} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } S \quad (17)$$

Le résultat (11) adopte ainsi, en vertu des relations (16), la forme suivante

$$\mu \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = -\sigma \sum_{j=1}^3 C_j(\delta) \left\{ \nabla E_j \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{B} + E_j \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} \mathbf{u}_T^{(i)} \cdot (\nabla\phi_0^j \wedge \mathbf{B}) dv \right] \mathbf{e}_i \right\} \quad (18)$$

Remarquons que $C_j(0) = 1$ et que le potentiel ϕ_0^j est le potentiel régnant à l'extérieur de l'ellipsoïde non conducteur ($\delta = 0$) pour le champ $\mathbf{E} = \mathbf{e}_j$. A la lueur de (7) nous en déduisons le lien important $S_{ijk}(\delta) = C_j(\delta) S_{ijk}(0)$, où il n'y a pas de sommation sur l'indice j , qui permet de déduire la vitesse de l'ellipsoïde conducteur de celle du même ellipsoïde isolant. Ce dernier cas a été traité dans [3] qui fournit (sans sommation des indices i et j dans le résultat (19))

$$S_{ijk}(0) = \frac{\varepsilon_{ijk}}{12} \left\{ \frac{\alpha_j (2a_j^2 + \alpha_i a_i^2)}{\alpha_j - 2} - \alpha_i a_i^2 \right\} \quad (19)$$

Le mouvement $(\mathbf{U}, \boldsymbol{\Omega})$ de l'ellipsoïde s'écrit donc, en combinant (17) et (19),

$$\mathbf{U} = \frac{\sigma}{6\mu} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\varepsilon_{ijk} (\delta - 1) (\alpha_i a_i^2 + \alpha_j a_j^2)}{2 + (\delta - 1)\alpha_j} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j][\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_k] \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0} \quad (20)$$

où les coefficients géométriques α_i , définis par (13), ne dépendent pas de $\delta = \sigma_s/\sigma$.

4. Applications immédiates et conclusions

Considérons le cas d'une sphère de rayon a pour lequel, pour tout i , nous avons $a_i = a$ et $\alpha_i = 2/3$. L'application immédiate de (20) fournit

$$\mathbf{U} = \frac{\sigma a^2}{3\mu} \frac{\delta - 1}{\delta + 2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \quad (21)$$

en accord avec les prédictions disponibles [1,2] par le calcul direct (mais complexe) de l'écoulement dans tout le fluide. Comme pour la sphère, l'ellipsoïde décrit par $a'_i = \lambda a_i$ admet pour vitesse λ^2 fois la vitesse de l'ellipsoïde (a_1, a_2, a_3) et de même conductivité σ_s (il suffit, en utilisant (20), de noter que α_j est invariant lors de l'homothétie de rapport $\lambda > 0$ d'après (13)). Toutefois, si la sphère, particule isotrope, se translate parallèlement à $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ ce n'est plus nécessairement le cas pour un ellipsoïde ! Plus précisément, (20) montre immédiatement que :

- (i) Si $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{U} = \mathbf{0}$.
(ii) Si $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ nous pouvons avoir \mathbf{U} non parallèle à $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$. A titre d'exemple, prenons $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$ avec $B \neq 0$ et $E_3 = 0, E_1 \neq 0, E_2 \neq 0$. Sous ces hypothèses, il vient

$$\mathbf{U} = \frac{\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2}{6\mu} \left\{ \frac{\sigma B(\delta - 1)E_2 \mathbf{e}_1}{2 + (\delta - 1)\alpha_2} - \frac{\sigma B(\delta - 1)E_1 \mathbf{e}_2}{2 + (\delta - 1)\alpha_1} \right\}, \quad \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = B(E_2 \mathbf{e}_1 - E_1 \mathbf{e}_2) \quad (22)$$

Dès que $a_1 \neq a_2$ nous avons (voir (13)) $\alpha_1 \neq \alpha_2$ et \mathbf{U} n'est pas colinéaire à $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$.

- (iii) Notons cependant que si $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ est colinéaire au vecteur \mathbf{e}_i alors \mathbf{U} et $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ sont parallèles. En effet, on trouve aisément dans ce cas que $\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_j = 0$ si $j \neq i$.

Ainsi, la migration d'une particule ellipsoïdale dépend fortement de l'orientation des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} et de sa conductivité $\sigma_s \neq \sigma$. Toutefois, des ellipsoïdes différents peuvent adopter la même vitesse sous certaines conditions. A titre d'illustration, examinons le cas de deux sphéroïdes (ellipsoïdes de révolution) homothétiques, caractérisés par $(a_1 = a_2, a_3, \delta \neq 1)$ et $(\lambda a_1, \lambda a_1, \lambda a_3, \delta' \neq 1)$ respectivement, soumis aux champs électrique et magnétique du point (ii) précédent. Pour ces champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , (22) montre que les deux sphéroïdes se déplacent à la même vitesse, colinéaire à $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$, lorsque

$$\lambda^2 = \frac{[\delta - 1][2 + (\delta' - 1)\alpha_1]}{[\delta' - 1][2 + (\delta - 1)\alpha_1]} \quad (23)$$

puisque α_j est invariant lors de l'homothétie. Le résultat est sensible à l'orientation de \mathbf{E} et \mathbf{B} : si $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_3$ et $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_1$ la migration, parallèle à $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$, devient identique pour

$$\lambda^2 = \frac{[\delta - 1][2 + (\delta' - 1)\alpha_3]}{[\delta' - 1][2 + (\delta - 1)\alpha_3]} \quad (24)$$

Signalons enfin que la formule analytique (20) constitue un précieux moyen de valider, sur une configuration ellipsoïdale, un traitement numérique à développer pour le cas d'une particule conductrice de forme arbitraire.

Références

- [1] D. Leenov, A. Kolin, Theory of electromagnetophoresis. I. Magnetohydrodynamic forces experienced by spherical and symmetrically oriented cylindrical particles, *J. Chem. Phys.* 22 (1954) 683–688.
- [2] P. Marty, A. Alemany, Theoretical and experimental aspects of electromagnetic separation, in: H.K. Moffatt, M.R.E. Proctor (Eds.), *Metallurgical Applications of Magnetohydrodynamics*, Metals Society, pp. 245–259.
- [3] A. Sellier, Migration of an insulating particle under the action of uniform ambient electric and magnetic fields. Part 2. Boundary formulation and ellipsoidal particles, *J. Fluid Mech.*, submitted.
- [4] R. Moreau, *Magnetohydrodynamics*, Kluwer Academic, 1990.
- [5] H.K. Moffatt, A. Sellier, Migration of an insulating particle under the action of uniform ambient electric and magnetic fields. Part 1. General theory, *J. Fluid Mech.* 464 (2002) 279–286.
- [6] M. Teubner, The motion of charged colloidal particles in electric fields, *J. Chem. Phys.* 76 (11) (1982) 5564–5573.
- [7] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover, New York, 1945.