



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 277–282



Dynamique multi-contact d'un système de solides tridimensionnels rigides

Cédric Le Saux, Franck Cevaer, René Motro *

Laboratoire de mécanique et génie civil, UMR UMII-CNRS 5508, Université Montpellier II, CC 048, place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France

Reçu le 10 février 2003 ; accepté le 4 mars 2003

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Le cadre de cette étude est celui du calcul de l'évolution dynamique d'un système de solides tridimensionnels rigides, soumis à des liaisons unilatérales de contact avec frottement sec. On propose une formulation exacte (respect des lois de contact et de frottement sec) du problème posé à un instant donné, de la prédiction pour le mouvement subséquent (supposé régulier), de l'accélération du système et des statuts de contact. Une méthode numérique pour résoudre ce type de problème non linéaire est présentée. Notre approche fait ensuite l'objet d'une validation dans un cas simple multi-contact. *Pour citer cet article : C. Le Saux et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Multi-contact dynamics of a set of three-dimensional rigid bodies. This study is in keeping with the general pattern of dynamical simulations of a set of rigid three-dimensional bodies submitted to unilateral contact constraints with dry friction. An exact formulation (respecting the contact and friction laws) of the problem of predicting the system accelerations and the contact status, in further evolution is proposed. A numerical treatment of this kind of nonlinear problem is presented. This approach is applied to a simple multi-contact example, and yields results in agreement with those of analytical and numerical type, known for this example. *To cite this article: C. Le Saux et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; Dynamique ; Contacts unilatéraux ; Frottement sec ; Statuts de contact ; Accélération

Keywords : Computational solid mechanics; Dynamics; Unilateral contacts; Dry friction; Contact status; Accelerations

Abridged English version

A number of papers, since Delassus (1917) [8], have been devoted to a problem pertaining to the dynamics of a set of three-dimensional rigid bodies in contact in the presence of Coulomb friction. This problem, posed at a

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : motro@lmgc.univ-montp2.fr (R. Motro).

time-instant t^* , aims at predicting the accelerations of the system and *the contact status* (active or not, sliding or not) in further evolution. Recent studies, such as [1], are based on a polyhedral approximation of Coulomb's cone; a linear complementarity problem (LCP) is established and usually numerically solved by Lemke algorithm for which results of convergence are known.

In this study, an exact formulation of the problem, with account of contact and friction laws, and a numerical technique for its resolution are proposed. At instant t^* , the generalized coordinates \mathbf{q} and the velocities \mathbf{u} of the system, are assumed to be continuous functions of time; the system configurations in which velocity jumps may occur (collisions, singular situations [2]) are outside the scope of this study. Some contacts may break and other contacts which so far were sliding may stick, and vice versa. So, at this time, acceleration jumps may occur; we suppose that the function \mathbf{u} admits a right-derivative, and the contact forces, as functions of time, a limit on the right.

Firstly, we consider the case of a single contact, sliding at t^* . A one-dimensional LCP is formulated (Eq. (5)) for the local unknowns: the right-derivative \dot{g}_N^+ of the normal relative velocity (of the interacting bodies) at contact point, and the right-limit λ_N^+ of the normal contact force. The LCP admits a unique solution for a sufficiently small friction coefficient. The solution corresponds to either a transition from contact to separation ($\dot{g}_N^+ > 0$) or the persistence of the contact ($\dot{g}_N^+ = 0$).

Secondly, the case of a single contact, sticking at t^* , is treated. The unknowns of the established problem (8), the right-derivative \dot{g}^+ of the relative velocity (of the interacting bodies) at contact point, and the right-limit λ^+ of the contact force, are the roots of a Lipschitz continuous mapping \mathbf{G} . The problem is solved through a generalized Newton method [5]. In this context, to our knowledge, there is no result on the convergence of the generalized Newton method to be found in literature.

Then we deal with the general case of a system configuration involving several sliding and/or sticking contacts. To solve the established nonlinear problem (Eqs. (9), (10)), an iterative technique à la Gauss–Seidel [3] is used, which amounts to treating a succession of single-contact problems: of the type (5) if the contact is sliding; of the form (8) if it is sticking. The mathematical demonstration of the convergence of the nonlinear Gauss–Seidel algorithm, in the case of Coulomb friction has only been established in particular situations [6].

Finally, our procedure of predicting the accelerations and the contact status is applied to a multi-contact problem based on an example of Pfeiffer and Glocker [7]. The mechanical model, depicted in Fig. 1, consists of two identical cubic homogeneous bodies, S_1 and S_2 , one above the other. The two contacts, ground- S_1 and S_1 - S_2 , in presence of dry friction, are located at the centre of the lower face of each body. The system, under the influence of gravity, and applied forces \mathbf{F}_1 and \mathbf{F}_2 respectively at the centre of each block, has zero velocity at time t^* (sticking contacts). Firstly, we deal with transitions from contact to separation; forces \mathbf{F}_1 and \mathbf{F}_2 are applied vertically in \mathbf{Z}_0 direction and we study the influence of their intensities on the prediction of the new contact (normal) status. Then, transitions from sticking to sliding are considered; we apply forces \mathbf{F}_1 and \mathbf{F}_2 horizontally in \mathbf{X}_2 direction (Fig. 1), and we determine, for various intensities, the new contact (tangential) status. Our numerical procedure, for predicting contact status and the accelerations of the system, converged in all cases. The results, obtained by this procedure, are in agreement with analytical and numerical ones, known for this example [7].

This study has been completed within the Laboratory of Mechanic and Civil Engineering of the University of Montpellier II. It is in keeping with the general pattern of folding and deployment of three-dimensional reticulated constructive structures.

1. Introduction

Dans des domaines d'applications divers apparaît le besoin de calculer le mouvement de systèmes constitués de solides tridimensionnels supposés rigides, entre lesquels des contacts affectés de frottement sont susceptibles de s'établir ou de se rompre. La littérature propose différentes techniques numériques pour traiter ce type d'évolution. Les approches Event Driven consistent à identifier, en cours de simulation, les instants de transition comme par exemple l'apparition (collision) ou la disparition (décollement) d'un contact, de manière à déterminer les intervalles

de temps au cours desquels les statuts de chaque contact (actif ou non, glissant ou non) ne varient pas. Sur chacun de ces intervalles, l'évolution est régulière et calculée comme si les liaisons étaient bilatérales. Si le nombre global de transitions survenant pendant l'évolution du système n'est pas trop grand, cas par exemple de la dynamique des machines et en particulier des robots, ces techniques s'avèrent très efficaces. Elles permettent l'utilisation de méthodes numériques d'intégration d'ordre élevé fournissant des résultats précis et donnant la possibilité de se déplacer rapidement entre les transitions. Avec de telles approches, se pose à l'instant t^* d'une transition, le problème de la prédiction des nouveaux statuts des contacts et de l'accélération du système, pour la phase de mouvement à venir. La résolution de ce problème est au cœur de cette note excluant les phénomènes de collisions qui dans le cadre des techniques Event Driven font l'objet d'un traitement spécifique.

Si des travaux récents, tels que [1], reposent sur une approximation polyédrique du cône de Coulomb permettant la formulation d'un *problème de complémentarité linéaire* (LCP) usuellement résolu au moyen de l'algorithme de Lemke, on présente ici une formulation exacte du problème (respect des lois de contact et de frottement), ainsi qu'une technique numérique de résolution. Cette procédure qui repose sur une méthode de relaxation à la Gauss–Seidel, couplée avec une méthode de Newton généralisée, fait ensuite l'objet d'une validation dans un cas simple multi-contact.

2. Prédiction des statuts de contact et de l'accélération du système

Hormis le cas de situations singulières [2], à l'instant t^* , les paramètres \mathbf{q} et \mathbf{u} , de position et vitesse du système Ω , sont supposés fonctions continues du temps. On note $\dot{\mathbf{u}}^+$ la dérivée à droite, supposée exister, de \mathbf{u} et $g_{N\alpha}$ l'écart normal associé à un contact potentiel d'étiquette α entre deux solides. Pour un contact actif ($g_{N\alpha} = 0$), $\dot{\mathbf{g}}_\alpha = [\Phi^\alpha]\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{b}}_\alpha$ définit la vitesse relative au point de contact des solides en interaction, et $\ddot{\mathbf{g}}_\alpha^+$ sa dérivée à droite, qui s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{g}}_\alpha^+ = [\Phi^\alpha]\dot{\mathbf{u}}^+ + \bar{\mathbf{b}}_\alpha \quad (1)$$

Les applications $[\Phi^\alpha]$, $\tilde{\mathbf{b}}_\alpha$ et $\bar{\mathbf{b}}_\alpha$ sont supposées dépendre du temps de façon continue au point t^* .

2.1. Un contact glissant

Supposons le système Ω siège d'un seul contact, glissant ($g_N = \dot{g}_N = 0$, $\dot{\mathbf{g}}_T \neq \mathbf{0}$) à t^* . Vu l'équation de la dynamique, l'évolution ultérieure du système, supposée régulière est régie par :

$$[H]\dot{\mathbf{u}}^+ = \mathbf{F} + [\Phi]^T\boldsymbol{\lambda}^+ \quad (2)$$

où $[H]$ est la matrice d'inertie du système et $\boldsymbol{\lambda}^+$ la limite à droite de la réaction de contact. La fonction \mathbf{F} regroupe les composantes généralisées des efforts extérieurs donnés, ainsi que les termes inertiels en \mathbf{u} . A cette équation, sont jointes les conditions de complémentarité en accélération qui découlent de la loi de contact normale (condition de Signorini) :

$$\ddot{g}_N^+ \geq 0, \quad \lambda_N^+ \geq 0, \quad \ddot{g}_N^+ \cdot \lambda_N^+ = 0 \quad (3)$$

ainsi que les relations décrivant le frottement sec de la liaison de contact, régi par la loi de Coulomb : $\lambda_T^+ = -\mu \cdot \lambda_N^+ \dot{\mathbf{g}}_T / |\dot{\mathbf{g}}_T|$ où μ est le coefficient de frottement. Ici et dans la suite, les indices N et T font référence à des composantes normale et tangentielle dans un trièdre local défini au point de contact. En combinant les relations (1) et (2), $[H]$ étant supposée régulière, $\ddot{\mathbf{g}}^+$ s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{g}}^+ = \ddot{\mathbf{g}}_{ib}^+ + [W]\boldsymbol{\lambda}^+ \quad (4)$$

La matrice $[W] = [\Phi][H]^{-1}[\Phi]^T$ définit une application linéaire symétrique, usuellement définie positive, de \mathbb{R}^3 dans lui-même, appelée *opérateur de Delassus* [3].

Avec : $[W] = \begin{bmatrix} W_{NN} & W_{NT} \\ W_{TN} & W_{TT} \end{bmatrix}$, on se ramène au LCP suivant, concernant la direction normale au contact :

$$\ddot{g}_N^+ = \ddot{g}_{libN}^+ + \delta \cdot \lambda_N^+, \quad \ddot{g}_N^+ \geq 0, \quad \lambda_N^+ \geq 0, \quad \ddot{g}_N^+ \cdot \lambda_N^+ = 0, \quad \text{avec } \delta = \left([W_{NN}] - \mu [W_{NT}] \frac{\dot{g}_T}{|\dot{g}_T|} \right) \quad (5)$$

Il admet une solution unique $(\ddot{g}_N^+, \lambda_N^+)$ pour un coefficient de frottement suffisamment faible ($\delta > 0$). Selon le signe de \ddot{g}_{libN}^+ , la solution correspond soit à un décollement ($\ddot{g}_N^+ > 0$), soit à la possibilité de persistance du contact ($\ddot{g}_N^+ = 0$). Alors, de l'Éq. (2) on déduit l'accélération \dot{u}^+ .

Dans la suite, on omet pour alléger, l'indice + spécifiant une limite à droite.

2.2. Un contact non glissant

Soit à t^* , le cas d'un seul contact actif et non glissant ($g_N = \dot{g}_N = 0$, $\dot{g}_T = \mathbf{0}$). En ce cas la loi de Coulomb peut être écrite pour les accélérations, de même que la loi de contact normale (3). Au moyen de l'opérateur projection orthogonale «proj», cela donne :

$$\lambda_T = \text{proj}_{C_T}(\lambda_T - \rho_T \ddot{g}_T), \quad \rho_T > 0 \text{ arbitraire, avec } C_T = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| \leq \mu \lambda_N\} \quad (6)$$

$$\lambda_N = \text{proj}_{R^+}(\lambda_N - \rho_N \cdot \ddot{g}_N), \quad \rho_N > 0 \text{ arbitraire} \quad (7)$$

Le problème à résoudre est défini par les Éqs. (4), (6) et (7) ; notons \mathbf{G} l'application de \mathbb{R}^6 dans lui-même définie comme suit :

$$\mathbf{G}(\ddot{g}, \lambda) \rightarrow \mathbf{G}(\ddot{g}, \lambda)$$

$$\mathbf{G}_1(\ddot{g}, \lambda) = \ddot{g}_N - \ddot{g}_{libN} - [W_{NN}]\lambda_N - [W_{NT}]\lambda_T \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{G}_2(\ddot{g}, \lambda) = \ddot{g}_T - \ddot{g}_{libT} - [W_{TN}]\lambda_N - [W_{TT}]\lambda_T \in \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{G}_3(\ddot{g}, \lambda) = \lambda_N - \text{proj}_{R^+}(\lambda_N - \rho_N \cdot \ddot{g}_N) \in \mathbb{R} \quad \text{avec } \rho_N > 0, \text{ arbitraire}$$

$$\mathbf{G}_4(\ddot{g}, \lambda) = \lambda_T - \text{proj}_{C_T}(\lambda_T - \rho_T \ddot{g}_T) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{avec } \rho_T > 0, \text{ arbitraire}$$

On recherche donc un couple (\ddot{g}, λ) solution de :

$$\mathbf{G}(\ddot{g}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (8)$$

Dans le cas à 3 dimensions, ce problème ne possédant généralement pas de solution explicite, on a recours à une solution approchée. L'application \mathbf{G} est continue lipschitzienne, d'ailleurs «linéaire par rayons». Dans le cas des applications lipschitziennes, la notion de dérivée au sens de Clarke [4] permet de donner un sens à la méthode de Newton [5]. L'application \mathbf{G} est différentiable presque partout, sa dérivée $\partial \mathbf{G}$ est une application linéaire de \mathbb{R}^6 dans lui-même que l'on peut mettre sous la forme :

$$\partial \mathbf{G}(\ddot{g}, \lambda) = \begin{bmatrix} I_d & -W \\ A & B \end{bmatrix}$$

où $[I_d]$ est l'identité dans \mathbb{R}^3 et $[A]$, $[B]$ représentent des applications de \mathbb{R}^3 dans lui-même auxquelles correspondent différentes expressions, selon les valeurs de $(\lambda_N - \rho_N \cdot \ddot{g}_N)$ et $(\lambda_T - \rho_T \ddot{g}_T)$. Les itérations de la méthode de Newton sont définies par : $\partial \mathbf{G}(\ddot{g}^{(k)}, \lambda^{(k)}) \cdot (\ddot{g}^{(k+1)} - \ddot{g}^{(k)}, \lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}) = -\mathbf{G}(\ddot{g}^{(k)}, \lambda^{(k)})$; soit en développant :

$$\begin{aligned} \ddot{g}^{(k+1)} - \ddot{g}_{lib} - [W]\lambda^{(k+1)} &= \mathbf{0} \\ ([A^{(k)}] \cdot [W] + [B^{(k)}]) \cdot (\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}) &= -(\mathbf{G}_3(\ddot{g}^{(k)}, \lambda^{(k)}), \mathbf{G}_4(\ddot{g}^{(k)}, \lambda^{(k)})) \end{aligned}$$

A notre connaissance, dans le cas général tridimensionnel du frottement de Coulomb, il n'existe pas dans la littérature de résultats de convergence relatifs à la méthode de Newton généralisée.

2.3. Cas multi-contact

Dans le cas général de plusieurs contacts actifs au temps t^* , on définit les ensembles de contacts suivants : I_{nn} (contacts dits persistants : $g_{N\alpha} = \dot{g}_{N\alpha} = 0$) et ses deux sous-ensembles I_r (contacts non glissants : $\dot{\mathbf{g}}_{T\alpha} = \mathbf{0}$) et I_s (contacts glissants : $\dot{\mathbf{g}}_{T\alpha} \neq \mathbf{0}$). L'évolution ultérieure du système, supposée régulière, est régie par l'Éq. (2) étendue à tous les contacts de I_{nn} , soit :

$$[H]\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} + [\Phi]^T \boldsymbol{\lambda} \quad (9)$$

A laquelle sont jointes les relations exprimant les conditions de contact et de frottement :

$$\forall \alpha \in I_{nn} : \begin{cases} \lambda_{N\alpha} = \text{proj}_{R^+}(\lambda_{N\alpha} - \rho_N \cdot \ddot{g}_{N\alpha}), & \rho_N > 0 \text{ arbitraire} \\ \text{si } \alpha \in I_s, \text{ alors } \lambda_{T\alpha} = -\mu_\alpha \cdot \lambda_{N\alpha} \frac{\dot{\mathbf{g}}_{T\alpha}}{|\dot{\mathbf{g}}_{T\alpha}|} \\ \text{si } \alpha \in I_r, \text{ alors } \lambda_{T\alpha} = \text{proj}_{C_{T\alpha}}(\lambda_{T\alpha} - \rho_T \dot{\mathbf{g}}_{T\alpha}), & \rho_T > 0 \text{ arbitraire} \end{cases} \quad (10)$$

La méthode employée [3] pour la résolution numérique de ce problème non linéaire (Éqs. (9), (10)) consiste en itérations inspirées de la technique de Gauss–Seidel : supposons qu'une estimation $(\dot{\mathbf{u}}^{\text{est}}, \boldsymbol{\lambda}^{\text{est}})$ ait été obtenue et qu'elle satisfasse l'Éq. (9), on en déduit une approximation $(\dot{\mathbf{u}}^{\text{corr}}, \boldsymbol{\lambda}^{\text{corr}})$ en altérant seulement λ_α , autrement dit $\lambda_\beta^{\text{corr}} = \lambda_\beta^{\text{est}}$ si $\beta \neq \alpha$, qui vérifie elle aussi l'Éq. (9), c'est à dire par différence : $\dot{\mathbf{u}}^{\text{corr}} = \dot{\mathbf{u}}^{\text{est}} + [H]^{-1}[\Phi^\alpha]^T(\lambda_\alpha^{\text{corr}} - \lambda_\alpha^{\text{est}})$ ainsi que les conditions de contact et frottement d'étiquette α (Éqs. (10)), avec $\ddot{\mathbf{g}}_\alpha = [\Phi^\alpha]\dot{\mathbf{u}}^{\text{corr}} + \bar{\mathbf{b}}_\alpha$. Cette démarche équivaut au traitement d'un système qui présenterait un seul contact α . Si $\alpha \in I_s$, on résout un problème du type (5), si $\alpha \in I_r$ on résout un problème du type (8). Elle est appliquée cycliquement à tout α de I_{nn} et stoppée lorsque $|\lambda^{\text{corr}} - \lambda^{\text{est}}| < \varepsilon$, fixé. La démonstration mathématique de la convergence de l'algorithme de Gauss–Seidel non linéaire, n'a été faite que dans des cas particuliers [6].

3. Résultats numériques

Imitant un exemple plan multi-contact traité par Pfeiffer et Glocker [7], le système étudié (Fig. 1) est constitué de deux blocs cubiques homogènes identiques, S_1 et S_2 , de poids 10 N, posés l'un sur l'autre. Les deux contacts, sol- S_1 et S_1 - S_2 , en présence de frottement sec ($\mu_1 = \mu_2 = 1$), sont vus comme localisés au centre de la base inférieure de chaque bloc, respectivement en C_1 et C_2 . Le trièdre local $\mathfrak{R}_1 = (C_1, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{N}_1)$ est confondu avec le référentiel $(O_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0)$, alors qu'une rotation de $\pi/4$ autour de l'axe (O, \mathbf{Z}_0) définit l'orientation absolue de $\mathfrak{R}_2 = (C_2, \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2, \mathbf{N}_2)$. Le système, initialement au repos, est soumis à l'action de la pesanteur ainsi qu'aux forces, \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 , appliquées respectivement au centre de chaque bloc.

On s'intéresse tout d'abord aux transitions du type contact-décollement : \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 sont appliquées verticalement selon la direction de \mathbf{Z}_0 . On étudie la dépendance des nouveaux statuts de contact en fonction de l'intensité de \mathbf{F}_1 et de \mathbf{F}_2 . Ces statuts évoluent vers l'un des quatre états suivants : (I) 1 rompu, 2 rompu, (II) 1 persistant, 2 persistant, (III) 1 rompu, 2 persistant, (IV) 1 persistant, 2 rompu.

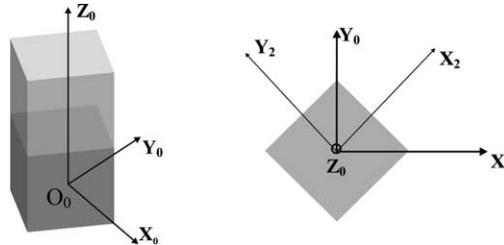


Fig. 1. Configuration du système.

Fig. 1. System configuration.

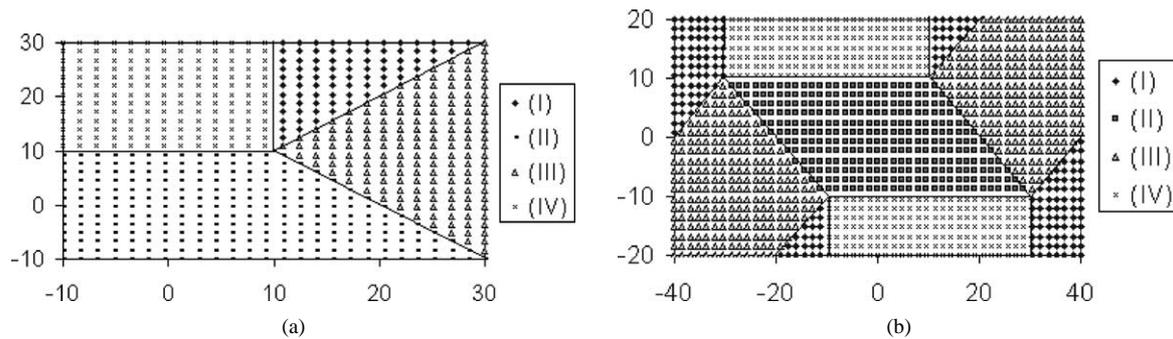


Fig. 2. Transitions : (a) contact–décollement ; (b) non glissement–glissement.

Fig. 2. Transitions: (a) from contact to separation; (b) from sticking to sliding.

Notre procédure numérique a convergé dans tous les cas : en moins de 22 itérations pour la méthode de Gauss–Seidel non linéaire et en moins de 4 itérations pour la méthode de Newton généralisée, et cela pour une précision de 10^{-5} . Les résultats numériques obtenus (Fig. 2(a)) par cette technique sont en accord avec les résultats analytiques connus pour cet exemple [7].

Ensuite, on s'intéresse aux transitions du type non glissement–glissement ; \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 , d'intensités variables, sont appliquées horizontalement selon la direction de \mathbf{X}_2 . Alors, pour la configuration du système décrite par la Fig. 1, même si le problème est à deux dimensions, on sollicite les trois directions locales de contact. Les statuts de contact évoluent vers l'un des quatre états suivants : (I) 1 glissant, 2 glissant, (II) 1 non glissant, 2 non glissant, (III) 1 glissant, 2 non glissant, (IV) 1 non glissant, 2 glissant. Ici aussi, notre procédure a convergé dans tous les cas (Fig. 2(b)). Le nombre d'itérations nécessaire est du même ordre que précédemment. On vérifie bien que l'on retrouve les mêmes résultats que Pfeiffer et Glocker [7], obtenus avec l'algorithme de Lemke.

4. Conclusion

Dans cette Note, nous avons proposé une formulation exacte du problème posé à un instant donné, de la prédiction, pour le mouvement subséquent (supposé régulier), des nouveaux statuts de contact et de l'accélération d'un système de solides tridimensionnels rigides, en contact en présence de frottement sec. Ensuite la technique numérique mise au point pour la résolution de ce type de problèmes non linéaires a été présentée et appliquée avec succès à un exemple simple pour lequel existent des résultats analytiques et numériques. Il s'agit d'une nouvelle méthode de résolution de ce type de problèmes qui suscitent l'intérêt des chercheurs depuis Delassus (1917) [8]. Ce travail s'insère dans le cadre d'une étude sur le pliage/dépliage de systèmes constructifs réticulés (LMGC, Université de Montpellier II).

Références

- [1] J.C. Trinkle, J.S. Pang, S. Sudarsky, G. Lo, On dynamic multi-rigid-body contact problems with Coulomb friction, *Z. Angew. Math. Mech.* 77 (4) (1997) 267–279.
- [2] F. Génot, B. Brogliato, New results on Painlevé paradox, *Eur. J. Mech. A Solids* 18 (4) (1999) 653–677.
- [3] J.J. Moreau, An introduction to unilateral dynamics, in: M. Frémond, F. Maceri (Eds.), *Novel Approaches in Civil Engineering*, Springer-Verlag, in press.
- [4] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983.
- [5] P. Alart, A. Curnier, A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 92 (1991) 353–375.
- [6] F. Jourdan, P. Alart, M. Jean, A Gauss–Seidel-like algorithm to solve frictional contact problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 155 (1998) 31–47.
- [7] F. Pfeiffer, C. Glocker, *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*, Wiley, New York, 1996.
- [8] E. Delassus, Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 34 (1917) 95–179.