



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE  DIRECT<sup>®</sup>

C. R. Mecanique 331 (2003) 271–276



# Détermination du critère de rupture macroscopique d'un milieu poreux par homogénéisation non linéaire

Jean-François Barthélémy, Luc Dormieux

LMSGC, CNRS/ENPC/LCPC, 77455 Marne-la-Vallée, France

Reçu le 31 mai 2002 ; accepté après révision le 5 novembre 2002

Présenté par Pierre Suquet

---

## Résumé

On propose une méthode de détermination des états de contrainte situés sur la frontière du domaine des contraintes macroscopiques admissibles pour un milieu poreux à matrice solide parfaitement plastique. On utilise une technique d'homogénéisation basée sur l'équivalence, dans certaines conditions, entre le problème de calcul à la rupture et un problème d'élasticité non linéaire bien choisi. On se penche en particulier sur le cas où la matrice solide a un comportement de Drucker-Prager, pour lequel on donne une détermination analytique de la frontière du critère macroscopique. *Pour citer cet article : J.-F. Barthélémy, L. Dormieux, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Determination of the macroscopic strength criterion of a porous medium by nonlinear homogenization.** A porous medium, which matrix is a perfectly plastic solid, is considered. This paper proposes a method to determine the macroscopic admissible stress states. The method is based on a homogenization technique which takes advantage of the equivalence, under certain conditions, between a problem of limit analysis and a fictitious nonlinear elastic problem. The particular case of a Drucker-Prager solid matrix is considered. The method provides an analytical expression for the complete macroscopic strength criterion. *To cite this article: J.-F. Barthélémy, L. Dormieux, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

*Mots-clés :* Solides et structures ; Micromécanique ; Homogénéisation non linéaire ; Plasticité ; von Mises ; Drucker-Prager

*Keywords:* Solids and structures; Micromechanics; Nonlinear homogenization; Plasticity; von Mises; Drucker-Prager

---

## Abridged English version

The macroscopic strength criterion of a porous medium with a random distribution of pores can theoretically be obtained by a set of problems of limit analysis on a representative elementary volume. Since the composite is to be treated as random, these problems can not be solved with the classical static and kinematic approaches. The method proposed herein consists in transforming the limit analysis problem into a fictitious nonlinear elastic one.

---

*Adresses e-mail :* barthelemy@lmsgc.enpc.fr (J.-F. Barthélémy), dormieux@lmsgc.enpc.fr (L. Dormieux).

Indeed, the matrix is given a fictitious equivalent nonlinear elastic behavior characterized by a potential. The latter is defined in such a way that the local stress tensor fulfills the microscopic strength criterion and that its expression is equal to the support function of the criterion. According to this last condition, the displacement field solution of the nonlinear elastic problem can be regarded as a free plastic flow. The constitutive law of the equivalent matrix can be written by means of secant moduli and a prestress (1). The macroscopic strength criterion can then be estimated with the help of a nonlinear homogenization technique based on an effective strain concept. It relates the macroscopic stress tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  to the macroscopic strain tensor  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . When  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  tends towards infinity on a radial strain path,  $\underline{\underline{\sigma}}$  tends towards the boundary of the macroscopic strength criterion. First, this method is implemented on a von Mises matrix to the case of an isotropic loading. Then the method is applied to a Drucker–Prager matrix for which an appropriate nonlinear elastic behavior is proposed in (12). The limit pressure of a Drucker–Prager hollow sphere under isotropic compression (20), is then compared to the prediction of the nonlinear homogenization scheme (19) (see Fig. 1). Finally, the complete strength criterion is derived (21).

## Introduction

Dans le cas des matériaux hétérogènes présentant une répartition aléatoire des phases, la détermination des charges limites et des mécanismes d'écoulement au moyen des techniques de calcul à la rupture s'avère souvent très difficile. Pour traiter cette question, on s'appuie sur une équivalence formelle entre un problème de calcul à la rupture et un problème d'élasticité non linéaire que l'on traite dans le cadre de l'homogénéisation non linéaire. On revient brièvement sur le cas des milieux poreux à matrice de von Mises pour lesquels des résultats sont déjà disponibles [1]. L'originalité de cette note réside plus particulièrement dans le cas où la matrice présente un comportement de Drucker–Prager. On illustre la démarche proposée par la détermination de la contrainte limite en compression isotrope.

## 1. Approche par homogénéisation non linéaire

### 1.1. Principe de l'approche

On considère un volume élémentaire représentatif  $\Omega$  d'un milieu poreux de porosité  $\varphi$ . La matrice solide de ce milieu possède un comportement parfaitement plastique qu'il s'agit d'approcher par un comportement élastique  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$  non linéaire bien choisi dans le domaine des grandes déformations. Le critère de plasticité de la matrice s'écrit  $g(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ , l'idée consiste à imposer à la relation  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$  la condition  $g(\lim_{\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \infty} \underline{\underline{\sigma}}) = 0$ . La notation  $\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \infty$  est évidemment symbolique. Tous les développements qui suivent sont effectués en géométrie fixe.

Dans le but d'utiliser ultérieurement la méthode sécante d'homogénéisation non linéaire, on se donne, pour la partie solide, un comportement élastique non linéaire isotrope dérivant d'un potentiel convexe  $\psi$  ne dépendant que de la déformation volumique  $\varepsilon_v = \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}$  et de la norme de la déformation déviatorique  $\varepsilon_d = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}$ . La loi de comportement  $\underline{\underline{\sigma}} = \partial \psi / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$  peut alors s'écrire à l'aide de modules sécants  $\mu$  et  $k$  et d'une précontrainte sphérique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = k(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \underline{\underline{\varepsilon}}_d + \sigma_p(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \underline{\underline{1}} \quad \text{avec} \quad k\varepsilon_v + \sigma_p = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_v}; \quad 2\mu\varepsilon_d = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_d} \quad (1)$$

Le choix du potentiel dépend évidemment du comportement plastique que l'on souhaite approcher. Il s'agit, d'une part, d'assurer la saturation du critère par le tenseur des contraintes et, d'autre part, de conférer au champ de déplacement solution du problème d'élasticité non linéaire un statut d'écoulement plastique libre. A cet effet, on choisit le potentiel égal à la fonction d'appui du critère ou tendant vers celle-ci.

Le domaine  $\Omega$  est soumis à des conditions aux limites portant sur le champ de déplacement  $\underline{\xi}$  de type « déformations homogènes au contour » :

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (2)$$

L'idée consiste à augmenter de manière monotone  $\underline{\underline{E}}$  sur un chemin radial  $\underline{\underline{E}} = \gamma \underline{\underline{E}}_0$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$ . Dans l'hypothèse où la déformation locale est uniformément grande lorsque  $\gamma \rightarrow \infty$ , la contrainte macroscopique  $\underline{\Sigma}$ , définie comme la moyenne du champ de contraintes, peut s'interpréter comme une charge limite du v.e.r. et le champ de déplacement comme un mécanisme d'écoulement plastique libre.

Le principe de la méthode sécante d'homogénéisation non linéaire consiste à se ramener au cas linéaire en définissant dans le solide des déformations effectives  $\varepsilon_v^{\text{eff}}$  et  $\varepsilon_d^{\text{eff}}$  représentatives du champ hétérogène des déformations et qui dépendent donc du niveau de sollicitation  $\underline{\underline{E}}$ . On considère alors, dans le solide, un comportement élastique linéaire équivalent dont les modules et la précontrainte sont les valeurs prises par les modules sécants pour les déformations effectives :  $k^{\text{eq}} = k(\varepsilon_v^{\text{eff}}, \varepsilon_d^{\text{eff}})$ ,  $\mu^{\text{eq}} = \mu(\varepsilon_v^{\text{eff}}, \varepsilon_d^{\text{eff}})$  et  $\sigma_p^{\text{eq}} = \sigma^p(\varepsilon_v^{\text{eff}}, \varepsilon_d^{\text{eff}})$ . Le comportement macroscopique du v.e.r. est ensuite obtenu à l'aide d'un schéma linéaire approprié (cf. [5]). Dans la suite, on utilise le schéma correspondant aux bornes supérieures de Hashin–Shtrikman (cf. [2]) pour un milieu poreux. Il donne des résultats acceptables lorsque la phase poreuse est répartie de manière isotrope et discontinue. Les modules homogénéisés de compression  $k^{\text{hom}}$  et de cisaillement  $\mu^{\text{hom}}$  sont alors donnés par :

$$k^{\text{hom}} = k^{\text{eq}} \frac{4(1-\varphi)\mu^{\text{eq}}}{3\varphi k^{\text{eq}} + 4\mu^{\text{eq}}} \quad \text{et} \quad \mu^{\text{hom}} = \mu^{\text{eq}} \frac{(1-\varphi)(9k^{\text{eq}} + 8\mu^{\text{eq}})}{k^{\text{eq}}(9 + 6\varphi) + \mu^{\text{eq}}(8 + 12\varphi)} \quad (3)$$

La non linéarité du problème est prise en compte à travers le fait que les déformations effectives se calculent, dans le cadre du schéma d'homogénéisation linéaire adopté, comme des fonctions de  $k^{\text{eq}}$ ,  $\mu^{\text{eq}}$  et  $\sigma^{\text{eq}}$ , ces paramètres étant eux-mêmes, par construction, des fonctions des déformations effectives.

### 1.2. Choix et calcul des déformations effectives

La méthode dite modifiée proposée par Suquet (cf. [1]) est basée sur une approche variationnelle. Dans cette méthode, les valeurs effectives des invariants de la déformation  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_d$  sont calculées comme des moyennes quadratiques des champs solutions du problème linéaire associé aux modules équivalents :

$$\bar{\varepsilon}_v = \sqrt{\langle (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^2 \rangle_V} \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon}_d = \sqrt{\langle \underline{\underline{\varepsilon}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d \rangle_V} \quad (4)$$

Il convient à présent de se pencher sur l'effet du terme de précontrainte dans (1) sur la valeur des déformations effectives. Par superposition de problèmes, on montre que le champ de déformation issu du problème défini par le chargement  $\underline{\underline{E}}$  et la précontrainte  $\sigma_p^{\text{eq}}$  dans le solide est identique au champ issu du problème défini par le chargement  $\underline{\underline{E}}$ , une précontrainte nulle dans le solide et la pression  $\sigma_p^{\text{eq}}$  dans les pores. On est alors ramené au problème traité dans [3] dont on tire l'expression de  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_d$ . Ainsi, si le comportement macroscopique est isotrope, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-\varphi)\bar{\varepsilon}_v^2 &= \frac{\partial \mu^{\text{hom}}}{\partial k^{\text{eq}}} E_d^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial k^{\text{hom}}}{\partial k^{\text{eq}}} \left( E_v + \frac{\sigma_p^{\text{eq}}}{k^{\text{eq}}} \right)^2 - \frac{k^{\text{hom}}}{k^{\text{eq}} \sigma_p^{\text{eq}}} E_v + \frac{1}{2} \left( 1 - \varphi - 2 \frac{k^{\text{hom}}}{k^{\text{eq}}} \right) \left( \frac{\sigma_p^{\text{eq}}}{k^{\text{eq}}} \right)^2 \\ (1-\varphi)\bar{\varepsilon}_d^2 &= \frac{\partial \mu^{\text{hom}}}{\partial \mu^{\text{eq}}} E_d^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial k^{\text{hom}}}{\partial \mu^{\text{eq}}} \left( E_v + \frac{\sigma_p^{\text{eq}}}{k^{\text{eq}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

## 2. Cas du matériau de von Mises

### 2.1. Construction de la loi élastique non linéaire équivalente

On suppose, dans cette partie, que la phase solide obéit à une loi de comportement parfaitement plastique de critère de von Mises (de limite  $\sigma_0$  en compression simple). On construit le comportement élastique équivalent de la forme (1) sans précontrainte, avec un module de déformation volumique  $k$  constant non nul et un module de cisaillement choisi de manière à saturer le critère de von Mises :

$$\lim_{\varepsilon_d \rightarrow \infty} \sqrt{\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon_d \rightarrow \infty} \mu(\varepsilon_d) \varepsilon_d = \frac{\sigma_0}{\sqrt{6}} \quad (6)$$

## 2.2. Compaction isotrope

La méthode exposée au Paragraphe 1.1 est appliquée pour le matériau de von Mises. Dans le cas d'un chargement sphérique  $\underline{\underline{E}} = -E\underline{\underline{1}}$ , on détermine l'état de contrainte limite de la forme  $\underline{\underline{\Sigma}} = -P^{\lim}\underline{\underline{1}}$  avec :

$$P^{\lim} = \frac{2}{3}\sigma_0 \frac{1-\varphi}{\sqrt{\varphi}} \quad (7)$$

On peut comparer ce dernier résultat avec l'expression de la charge limite de la sphère creuse égale à  $-2/3\sigma_0 \ln \varphi$  (cf. Fig. 1(a)). Dans le domaine des petites porosités, l'écart entre les deux courbes s'explique par l'imprécision commise en utilisant cette méthode d'homogénéisation non linéaire basée sur une déformation effective homogène dans toute la matrice alors que des hétérogénéités importantes apparaissent au voisinage des cavités. Il est toutefois possible d'améliorer cette méthode en procédant à une subdivision de la phase solide par exemple en zones concentriques autour des pores et en déterminant une déformation effective par zone [4].

L'intérêt de la présente démarche qui consiste à construire un comportement saturant le critère réside dans ses perspectives d'extension à d'autres critères comme celui de Drucker–Prager qui fait l'objet du paragraphe suivant.

## 3. Cas du matériau de Drucker–Prager

### 3.1. Construction de la loi élastique non linéaire équivalente

Dans cette partie, le critère choisi pour la phase solide est celui de Drucker–Prager :

$$g(\underline{\underline{\sigma}}) = T(\sigma_m - H) + \sigma_d \quad \text{avec } \sigma_m = \frac{\text{tr } \underline{\underline{\sigma}}}{3} \text{ et } \sigma_d = \sqrt{(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{1}}) : (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{1}})} \quad (8)$$

Pour le matériau élastique non linéaire équivalent, on a  $\sigma_m = \partial \psi / \partial \varepsilon_v$  et  $\sigma_d = \partial \psi / \partial \varepsilon_d$ . Le tenseur des contraintes sature le critère (8) si et seulement si :  $\partial \psi / \partial \varepsilon_d = T(H - \partial \psi / \partial \varepsilon_v)$ . Ceci impose alors à  $\psi$  de s'écrire sous la forme :

$$\psi(\varepsilon_v, \varepsilon_d) = f(\varepsilon_v - T\varepsilon_d) + H\varepsilon_v \quad (9)$$

On choisit pour  $f$  une fonction convexe décroissante car on peut montrer que ces propriétés sont suffisantes pour assurer la convexité de  $\psi$ . Les problèmes de calcul à la rupture et d'élasticité non linéaire deviennent équivalents si le potentiel dont on vient de déterminer la forme tend vers la fonction d'appui  $\pi(\underline{\underline{\varepsilon}})$  relative au critère de Drucker–Prager donnée par (10).

$$\begin{cases} \pi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = +\infty & \text{si } \varepsilon_v < T\varepsilon_d \\ \pi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = H\varepsilon_v & \text{si } \varepsilon_v \geq T\varepsilon_d \end{cases} \quad (10)$$

La «fonction»  $f$  doit donc valoir 0 pour un argument positif et  $+\infty$  pour un argument strictement négatif. On introduit une famille paramétrée de fonctions de classe au minimum  $C^2$  :  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}_+}$  valant 0 pour un argument positif et tendant vers  $+\infty$  lorsque l'argument tend vers  $-a$  par valeurs supérieures, l'idée étant de faire tendre ensuite  $a$  vers 0 dans les résultats obtenus avec  $f_a$ . L'équivalence entre les problèmes de calcul à la rupture et d'élasticité non linéaire est obtenue de façon asymptotique lorsque  $a \rightarrow 0$ .

Avec ce choix de fonction et la notation  $X = \varepsilon_v - T\varepsilon_d$ , le comportement local de la phase solide est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = f'_a(X) \left( \underline{\underline{1}} - T \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}_d}{\varepsilon_d} \right) + H\underline{\underline{1}} \quad (11)$$

qu'il est possible de réarranger sous la forme (1) en posant :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\frac{f'_a(X)}{X} \varepsilon_v \underline{\underline{1}}}_{k} + \underbrace{\left( -\frac{f'_a(X)T}{\varepsilon_d} \right) \underline{\underline{\varepsilon}}_d}_{2\mu} + \underbrace{\left( H - \frac{f'_a(X)\varepsilon_d T}{X} \right) \underline{\underline{1}}}_{\sigma_p} \quad (12)$$

On note que la positivité des modules  $k$  et  $\mu$  est assurée dès lors que la fonction  $f_a(X)$  est décroissante sur l'intervalle  $]-a, 0]$ .

### 3.2. Compaction isotrope

Le chargement est le même que celui décrit au Paragraphe 2.2. L'état de contrainte macroscopique se compose d'une partie dépendant linéairement de  $\underline{E}$  et d'une précontrainte macroscopique obtenue par la formule de Levin qui donne  $\underline{\Sigma}_p = (k^{\text{hom}}/k^{\text{eq}})\sigma_p^{\text{eq}}\underline{1}$ . La pression limite s'écrit donc :

$$P^{\text{lim}} = \lim_{E \rightarrow \infty} -k^{\text{hom}} \left( E_v + \frac{\sigma_p^{\text{eq}}}{k^{\text{eq}}} \right) = \lim_{E \rightarrow \infty} k^{\text{hom}} \left( 3E - \frac{\sigma_p^{\text{eq}}}{k^{\text{eq}}} \right) \quad (13)$$

où  $k^{\text{hom}}$ ,  $\sigma_p^{\text{eq}}$  et  $k^{\text{eq}}$  dépendent de  $E$  par leurs expressions (12) à travers les déformations effectives.

Les problèmes liés au choix de  $\bar{\varepsilon}_v$  comme déformation effective ont été décrits dans [3] ; cette déformation effective masque en effet les éventuelles variations de signe du champ  $\varepsilon_v$  au sein de la phase solide et il est, en général, préférable d'utiliser la moyenne directe de la déformation volumique  $\bar{\varepsilon}_v$ . Toutefois, pour le matériau de Drucker–Prager, le potentiel a été construit de manière à assurer asymptotiquement la relation locale de dilatance  $\varepsilon_v = T\varepsilon_d$  impliquant ainsi la positivité du champ  $\varepsilon_v$ . Dans la situation présente d'un chargement sphérique et du schéma (3), on peut vérifier que  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_v$  (14) sont identiques.

$$(1 - \varphi)\bar{\varepsilon}_v = \frac{k^{\text{hom}}}{k^{\text{eq}}}E_v + \frac{\sigma_p^{\text{eq}}}{k^{\text{eq}}} \left( \frac{k^{\text{hom}}}{k^{\text{eq}}} - (1 - \varphi) \right) \quad (14)$$

On note  $\tilde{X} = \bar{\varepsilon}_v - T\bar{\varepsilon}_d$ . D'après les expressions de  $\sigma_p^{\text{eq}}$  et de  $k^{\text{eq}}$  fournies par (12), on déduit :

$$k^{\text{eq}}\bar{\varepsilon}_v + \sigma_p^{\text{eq}} = f'_a(\tilde{X}) + H \quad (15)$$

La relation (14) peut ainsi être réécrite sous la forme :

$$k^{\text{hom}} \left( E_v + \frac{\sigma_p^{\text{eq}}}{k^{\text{eq}}} \right) = (1 - \varphi)(k^{\text{eq}}\bar{\varepsilon}_v + \sigma_p^{\text{eq}}) = (1 - \varphi)(f'_a(\tilde{X}) + H) \quad (16)$$

L'expression (5) de  $\bar{\varepsilon}_d$  dans laquelle on adopte le schéma (3) pour  $k^{\text{hom}}$  et la définition (12) de  $\mu^{\text{eq}}$  fournit l'équation suivante :

$$(Tf'_a(\tilde{X}))^2 = \frac{3}{2}\varphi(f'_a(\tilde{X}) + H)^2 \quad (17)$$

Le signe négatif de  $f'_a(\tilde{X})$  ainsi que celui de  $(f'_a(\tilde{X}) + H)$  (qui découle de la positivité de  $P^{\text{lim}}$  et de (16)) conduisent à :

$$f'_a(\tilde{X}) = -\frac{H}{1 - \sqrt{2/(3\varphi)}T} \quad (18)$$

L'expression de  $P^{\text{lim}}$  découle alors de (13), (16) et (18) :

$$P^{\text{lim}} = -(1 - \varphi)(H + f'_a(\tilde{X})) = H \frac{1 - \varphi}{\sqrt{3\varphi/2}(1/T) - 1} \quad (19)$$

Ce résultat repose sur le choix des expressions de  $k$  et  $\sigma_p$  dans (12) uniquement via la relation (15). Un autre choix de  $k$  et  $\sigma_p$  pourrait être envisagé sans modifier le résultat (19) sous réserve de vérifier la compatibilité avec la loi de comportement élastique non linéaire (15) ainsi que la positivité du module de compressibilité.

La charge limite (19) peut être comparée à celle obtenue par le calcul à la rupture sur la sphère creuse de Drucker–Prager dont l'expression analytique vaut :

$$P^+ = H \left( \frac{1}{\varphi(\sqrt{2/3}T)/(1-\sqrt{2/3}T)} - 1 \right) \quad (20)$$

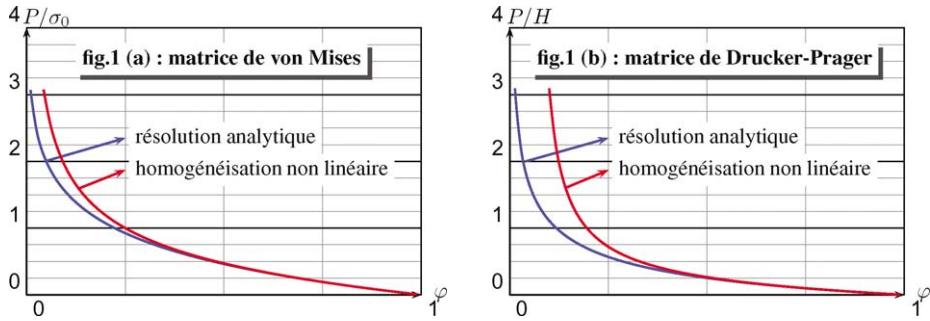


Fig. 1. Pressions limites par homogénéisation non linéaire et par résolution analytique de la sphère creuse ( $T = 0,3$ ).

Fig. 1. Pressure limit by nonlinear homogenization, and by analytical resolution of the hollow sphere ( $T = 0.3$ ).

On constate à nouveau sur la Fig. 1(b) que les charges limites obtenues par résolution analytique ou par homogénéisation non linéaire sont très proches au voisinage de  $\varphi = 1$ . En ce point, les deux premiers ordres de leurs développements limités sont identiques. La raison de la différence entre les deux approches pour des porosités plus petites est la même que dans le cas du matériau de von Mises (forte hétérogénéité du champ réel au voisinage de la cavité que gomme l'utilisation d'une déformation effective uniforme). Le défaut principal de (19) réside dans l'existence d'une branche infinie pour  $P^+$  pour la valeur  $\varphi = 2T^2/3$ . Cette limitation peut être levée en utilisant une subdivision de la phase solide.

### 3.3. Critère macroscopique

La méthode exposée au Paragraphe 3.2, basée sur les déformations effectives  $\bar{\varepsilon}_v$  et  $\bar{\varepsilon}_d$ , dans le cas d'une compaction isotrope peut également s'appliquer à la détermination d'un état limite comportant une partie déviatorique. On montre en effet que le critère de résistance macroscopique fait intervenir deux invariants du tenseur de contrainte macroscopique, la contrainte moyenne  $\Sigma_m$  et la norme de sa partie déviatorique  $\Sigma_d = \sqrt{\underline{\Sigma}_d : \underline{\Sigma}_d}$ , et qu'il s'écrit :

$$F(\underline{\Sigma}, \varphi) = \frac{1 + (2/3)\varphi}{T^2} \Sigma_d^2 + \left( \frac{3\varphi}{2T^2} - 1 \right) \Sigma_m^2 + 2(1 - \varphi)H \Sigma_m - (1 - \varphi)^2 H^2 = 0 \quad (21)$$

Vis-à-vis du critère, le tenseur  $\underline{E}$  joue le rôle de taux de déformation macroscopique. On peut montrer, à l'aide notamment de (14) et (15), qu'il est orienté suivant la normale extérieure au domaine  $\partial F/\partial \underline{\Sigma}$ .

## Références

- [1] P. Suquet, Effective behavior of nonlinear composites, in: *Continuum Micromechanics*, Springer, 1997, pp. 197–264.
- [2] Z. Hashin, S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids* 11 (1963) 127–140.
- [3] L. Dormieux, A. Molinari, D. Kondo, Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials, *J. Mech. Phys. Solids* 50 (10) (2002) 2203–2231.
- [4] N. Bilger, M. Bornert, F. Auslender, A. Zaoui, R. Masson, Surface d'écoulement macroscopique des milieux poreux : modification du critère de Gurson par une approche micromécanique, *XVème Congrès Français de Mécanique*, 2001.
- [5] A. Zaoui, *Matériaux hétérogènes et composites*, Cours de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1997.