



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 373–382



Optimisation de la forme de la trochoïde dans un engrenage droit

Mohamed El Houari Bouanane, Mohamed Bouchama

U.S.T.Oran, faculté de génie mécanique, département de génie mécanique, Oran, Algérie

Reçu le 18 septembre 2002 ; accepté le 18 novembre 2002

Présenté par Pierre Perrier

Résumé

En général, les avaries mécaniques de fonctionnement des engrenages résultent soit d'une fissuration au niveau du pied de dent, soit d'une pression de contact élevée entre les dents.

A partir du principe de la minimisation de masse nous développons une nouvelle formulation en terme de déplacements envisageant une autre forme du pied de dent plus résistante et éventuellement de moindre volume pour limiter la première cause de rupture qui se traduit à cet endroit par une concentration de contraintes. **Pour citer cet article : M.E.H. Bouanane, M. Bouchama, C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Optimization of the trochoid form in spur wheels. Generally, mechanical damage in gear wheels results from either cracks at the base of the tooth or from high contact pressure between the teeth.

Starting from the principle of mass minimization, this Note develops a new formulation in terms of displacement, calling on a new, more resistant and less voluminous form for the base of the teeth. As a result, the first cause of the breakages which happen at this point because of a concentration of constraints are limited. **To cite this article: M.E.H. Bouanane, M. Bouchama, C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; Engrenages ; Contraintes ; Pression de contacts ; Eléments finis ; Optimisation

Keywords: Computational solid mechanics; Gear wheels; Constraints; Contact pressure; Finite element analysis; Optimization

1. Introduction

Le contour d'une dent d'engrenage cylindrique droit comporte deux parties : la partie engrènement définie par une développante de cercle (cf. Fig. 1) pour des raisons cinématiques et la base de la dent de forme trochoïdale ; bien que cette dernière ne participe pas à « l'engrènement » proprement dit et de ce fait si l'on conserve la forme en développante on n'est plus astreint à respecter la trochoïde en pied de dent qui est l'endroit de la ruine de cette dernière par fatigue en flexion [1].

Il est donc naturel d'envisager une autre forme plus résistante et éventuellement de moindre volume. On est ainsi conduit à un problème d'optimisation de forme qui partant du principe de la minimisation de masse nous dévelop-

Adresse e-mail : bmhouari@algeriecom.com (M.E.H. Bouanane).

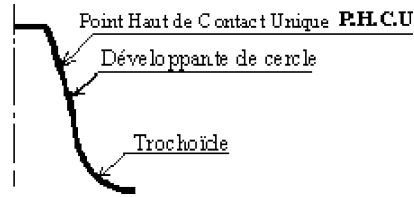


Fig. 1. Profil d'une dent d'engrenage droit.

pons dans cette étude une nouvelle formulation en terme de déplacements envisageant une autre forme de la trochoïde plus résistante et éventuellement de moindre volume pour limiter la concentration de contrainte à cet endroit.

2. Formulation du problème d'optimisation de forme

La formulation ne concerne que la mécanique et ce de façon discrétisée. Le lien entre le problème continu et discrétisé a été étudié par Masmoudi [2].

On introduit une fonction coût notée $J(\Omega, U)$ présentée sous forme intégrale et que l'on cherche à minimiser. Elle dépend du domaine Ω et du champ de déplacement U . On note X abscisse du point générique et $A(X)$ la matrice de rigidité. Le déplacement U_X est solution de l'équation d'état $A(X) \cdot U(X) = B(X)$. Le vecteur $B(X)$ est représentatif des forces.

La dérivée de la fonction coût (dérivation par rapport au domaine) s'écrit : $dx J(X, U_X) = \delta x \cdot J(X, U_X) + \delta U(X, U_X) \cdot \delta x \cdot U_X \delta x \cdot U_X$ est inconnue : c est la variation du déplacement par rapport au domaine.

- $[\delta x \cdot A(X)]U_X + A(X) \cdot \delta x \cdot U_X = \delta x \cdot B(X)$ qui permet donc de calculer $\delta x \cdot U_X$ puisque A est régulière [3].

La difficulté essentielle concerne le problème de la dérivation qui est primordiale en optimisation de forme. On introduit une perturbation $X \rightarrow X + t \cdot V(X)$, le paramètre t pouvant être assimilé à un temps. $V(X)$ est la perturbation dans ce cas homogène à une vitesse.

Comme en mécanique des fluides On calcule la dérivée par rapport au temps t d'intégrales de volume et de surface [4]. Les variables relatives à l'état initial sont notées x_i et à l'état final (ou optimisé) X_i (il y a lieu de ne pas confondre état initial et état déformé sous l'effet du chargement et l'état optimisé).

Soit f une fonction à valeur scalaire suffisamment régulière $f(x_1, x_2, x_3)$, après une perturbation elle devient :

$$f[x_1 + tV_1(x_1, x_2, x_3), x_2 + tV_2(x_1, x_2, x_3), x_3 + tV_3(x_1, x_2, x_3)]$$

on a : $\delta f / \delta x_i = \sum_j (\delta f / \delta X_j) (\delta_{ij} + tV_{j,i})$. Ce qui entraîne : $\delta f / \delta X_i = \delta f / \delta x_i - (\delta f / \delta X_j) tV_{j,i}$.

Avec $X_j = x_j + tV_j(x_1, x_2, x_3)$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker, Et de façon générale : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\delta f / \delta X_i - \delta f / \delta x_i] = -f_{,j} \cdot V_{j,i}$. Cette forme de dérivation n'est pas liée à celle obtenue par transport par convection [5]. On peut trouver une démonstration générale et rigoureuse dans Rousselet [6].

A titre d'illustration considérons une fonction d'une seule variable $f(x)$. On pose $F(x + tV(x)) = f(x)$.

- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [F'(x) - f'(x)] = -f'(x) dV/dx$ et si $t \rightarrow 0$ les valeurs de f sont identiques mais pas les dérivées.

Si $f = U_e$ composante de rang e d'un vecteur on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [U_{e,i}^F - U_{e,i}^I] = -U_{e,p} \cdot V_{p,i} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [U_{e,i}^F - U_{e,i}^I] = -U_{e,p}^I \cdot V_{p,i}$$

« $U_{e,i}$ » concerne les variables X et le second « $U_{e,i}$ » les variables x . L'indice F désigne l'état final ou optimisé et I l'initial.

- $U_{e,i}^F = U_{e,i}^I - U_{e,p}^I \cdot C_{p,i}$ avec $C_p = tV_p$ et t « petit ».

3. Critiques et une nouvelle approche heuristique

L'étude que nous avons résumé indépendamment des difficultés de dérivation n'est valable que si la fonction coût se présente sous une forme intégrale. Il n'en est pas ainsi en général.

La fonction coût en mécanique est souvent liée à un critère de résistance qui doit être vérifié en chaque point du milieu.

Il est délicat de la présenter sous forme intégrale [7] à moins d'utiliser un procédé de régularisation ce qui doit alourdir les calculs et à notre connaissance n'a pas été envisagé.

Le problème est ainsi « déplacé » et ceci de façon peu rigoureuse sur le plan mécanique car l'intégration est effectuée sur le contour ; or il est classique en mécanique des contacts de montrer que les défauts de résistance apparaissent dans le volume (bien que très près du contour). Cette constatation a été mise en évidence par Hertz.

En ce qui nous concerne nous poserons le problème d'optimisation de la façon suivante :

- L'augmentation de matière est la plus petite possible. Elle peut être éventuellement négative, c'est la fonction coût. On désigne par dJ cette quantité qui doit être minimisée.
- Il faut s'assurer qu'un critère de résistance doit être satisfait en chaque point du milieu optimisé.

On utilise en général le critère de von Mises donné par la relation : $\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \leq \alpha G_0$ avec : $G_0 = K^2/3$, K la limite à la traction et α le coefficient de sécurité pour renforcer la structure.

Où G_0 est une constante donnée et K est la limite élastique à la traction.

4. Le problème discrétisé

4.1. Fonction coût

On désigne la fonction coût par la quantité dJ et par Ω_F et Ω_I le volume final et initial de la structure.

$$J = \int_{\Omega} dV \Rightarrow \dot{J} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\int_{\Omega_F} dV^F - \int_{\Omega_I} dV^I \right]$$

Le problème étant plan, ce qui ne restreint pas la généralité, on pose : $X_F = X_I + t\alpha(x, y)$ et $Y_F = Y_I + t\beta(x, y)$.

- $\dot{J} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\int_{\Omega_F} dX^F - \int_{\Omega_I} dx \right]$.

Notons par C la perturbation infinitésimale inconnue. $\vec{C} = (C_x = \alpha t, C_y = \beta t)$. On obtient :

$$dJ = \underbrace{\int_{\Omega_I} \left[\frac{\delta C_x}{\delta x} + \frac{\delta C_y}{\delta y} \right] ds}_{\text{volume}} = \underbrace{\int_{\Omega_I} \vec{C} \vec{U} dl}_{\text{surface}}$$

\vec{C} vecteur de déplacement d'un point quelconque.

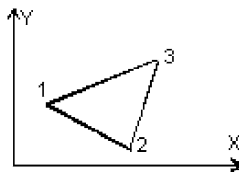


Fig. 2. Élément du maillage.

L'expression précédente montre que dJ peut être approximée soit par le volume soit par la surface. La structure initiale est maillée par la méthode des éléments finis avec des éléments triangulaires [8] (cf. Fig. 2).

On introduit ensuite la fonction de forme R_i relative à chaque triangle définie par exemple pour l'indice 1 [9] :

$$R_1 = \frac{(y_3 - y_2)(x_2 - x) - (x_3 - x_2)(y_2 - y)}{(y_3 - y_2)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)} \quad (1)$$

(x_i, y_i) désignent les coordonnées d'un nœud du triangle ($i = 1, 2, 3$) (cf. Fig. 2). Les fonctions R_2 et R_3 s'obtiennent par permutation des indices 1, 2 et 3.

Soit \vec{C} le vecteur déplacement d'un point quelconque de ce triangle. On peut l'exprimer en fonction des déplacements « C_j » respectifs des nœuds et des fonctions de forme « R_i » :

$$C_j = R_K C_{Kj} \quad (2)$$

$$\Rightarrow C_{j,i} = R_{K,i} C_{Kj} \quad (3)$$

j : indice relatif à la composante x et y ($j = 1, 2$) et K : indice du nœud du triangle ($K = 1, 2$ ou 3).

La fonction coût pour un triangle du maillage devient :

$$dJ = \int_{\Omega} C_{j,i} ds \Rightarrow dJ = R_{K,i} C_{Kj} \text{Aire} \quad (4)$$

Avec « Aire » l'aire du triangle concerné. La fonction coût totale s'obtient manifestement en sommant sur tous les triangles du maillage et c'est une forme linéaire par rapport aux inconnues C_{Kj} .

4.2. Critère de résistance

Le critère adopté est celui de von Mises, par définition quadratique, et qui est donné par :

Critère de von Mises : $\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \leq \alpha G_0$.

En envisageant la Loi de comportement moyen réduit [4], l'état des contraintes est donné par :

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} + (1-\nu) \varepsilon_{\alpha\beta}]$$

Avec E module de Young et ν coefficient de Poisson.

Dans un cas plan α et β varient de 1 à 2 et les contraintes suivantes sont nulles : $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$.

On en déduit

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{21} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix}$$

avec : $\mu = E/(2(1+\nu))$ le coefficient de Lamé homogène à une pression et

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

une matrice constante.

Donc : $S = \mu H \varepsilon$ et le critère de résistance s'explique sous forme matricielle et en chaque point du milieu par :

$$\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} \mu^2 \varepsilon^T H^T H \varepsilon \quad (6)$$

Sachant que la déformation ε_{ij} linéarisée se met sous la forme : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$. D'autres part la formule de dérivation matérielle reliant les états de déformation initiale et finale, permet d'écrire :

$$\varepsilon_{ij}^F = \varepsilon_{ij}^I - U_{i,p} \cdot C_{p,j} - U_{j,p} \cdot C_{p,i} \quad (7)$$

Avec I : état initial et F : état final.

Finalement on peut écrire cette relation sous forme condensée :

$$\varepsilon^F = \varepsilon^I + \dot{U}\dot{C} \quad (8)$$

avec $\dot{C} = C_{i,j}$.

Finalement la relation (6) se traduit par :

$$\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon^T)^F L \varepsilon^F \quad (9)$$

avec $L = \mu^2 H^T H$.

En introduisant la relation (8) dans (9), le critère de résistance dans le *milieu optimisé* devient :

$$\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\varepsilon^T L \varepsilon}_1 + \underbrace{\varepsilon^T L \dot{U} \dot{C} + \dot{C}^T \dot{U}^T L \varepsilon}_2 + \underbrace{\dot{C}^T \dot{U}^T L \dot{U} \dot{C}}_3 \right] \quad (10)$$

Le premier terme 1 est connu, le second 2 est une forme linéaire par rapport à C et le dernier terme 3 est une forme quadratique. La valeur du critère de résistance est donc une combinaison linéaire de fonctions convexes à coefficients positifs et est donc convexe.

5. Conclusions

En utilisant les éléments isoparamétriques on peut écrire, de façon générale pour un élément triangulaire, que :

$$Q_j = R_K Q_{Kj} \Rightarrow Q_{j,i} = R_{K,i} Q_{Kj} \quad (11)$$

avec $j = 1$ à 2 cas plan et $K = 1, 2$ ou 3 numéro du nœud et les coefficients $Q_{K,j}$ ayant déjà été définis sont constants.

On note par $[R]$ cette matrice qui n'a pas de propriétés particulières.

On peut remarquer que la fonction coût dépend de $R_{K,j}$ et de C_{Kj} et il en est de même pour le critère de résistance qui se résume alors en posant $\dot{C} = RC$

$$\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon^T L \varepsilon + \varepsilon^T L \dot{U} RC + C^T R^T \dot{U}^T L \varepsilon + \underbrace{C^T R^T \dot{U}^T L \dot{U} RC}_3 \right]$$

On ne prenant pas en compte le terme 3, le problème d'optimisation devient linéaire par rapport aux inconnues C_{Kj} .

On détermine C_{Kj} tels que dJ soit minimum avec des contraintes convexes relatives au critère de résistance linéarisé. Ceci revient à trouver le minimum de :

$$\text{fonction coût globale } \Sigma dJ = \min \Sigma (R \cdot C \cdot \text{Aire}) \quad (12)$$

$$\text{contraintes } \frac{1}{2} (\varepsilon^T L \varepsilon + \varepsilon^T L \dot{U} RC + C^T R^T \dot{U}^T L \varepsilon) \leq \alpha G_0$$

La solution existe et est unique car le nombre des contraintes est inférieur au nombre d'inconnues. En général le nombre d'inconnues est égal à 2 fois le nombre de nœuds dans un cas plan et en tenant compte des conditions aux limites (encastrement par exemple) ce nombre se réduit encore.

Cependant sur le plan théorique (sans discrétisation) le problème reste ouvert.

Les coefficients C_{Kj} étant infinitésimaux, l'expression 3 n'est pas prise en compte (ce n'est pas une nécessité).

6. Formulation matricielle du problème

6.1. Calcul matriciel du coût

Au départ la structure est maillée par la méthode des éléments finis en triangles isoparamétriques à 3 nœuds et est chargée pour avoir des déplacements de tous les nœuds.

Chaque triangle est défini par la position de ses nœuds (x_k, y_k) ainsi que leurs déplacements U_{kj} (cf. Fig. 3). De (1) on déduit la dérivée

$$[R] = \begin{vmatrix} R_{1,1} & R_{2,1} & R_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{1,2} & R_{2,2} & R_{3,2} \\ R_{1,2} & R_{2,2} & R_{3,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{1,1} & R_{2,1} & R_{3,1} \end{vmatrix}$$

Ainsi on en déduit la fonction coût de chaque triangle

$$d_j = [R] \cdot \begin{vmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{12} \\ C_{22} \\ C_{32} \end{vmatrix} \cdot \text{Aire}$$

La fonction coût globale de la structure à minimiser sera :

$$J = \Sigma dJ = \min[\Sigma(R \cdot \text{Aire})]C_{Kj} \quad (13)$$

Et sous forme matricielle : $\min[\text{Mat} \cdot C][C]$.

6.2. Calcul matriciel des contraintes

Partant des déplacements U_1, U_2 et U_3 des nœuds d'un triangle et en utilisant la matrice $[R]$, on en déduit la matrice $[\dot{U}]$.

$$[\dot{U}] = [R][U] \quad (14)$$

Ainsi on évite de faire des calculs de dérivées. Chaque triangle de la structure est soumis à la contrainte : $\frac{1}{2}(\varepsilon^T L \varepsilon + \varepsilon^T L \dot{U} R C + C^T R^T \dot{U}^T L \varepsilon) \leq \alpha G_0$ et sous forme matricielle $[\text{Mat} \cdot A][C] \leq [\text{Mat} \cdot B]$.

6.3. Application du problème d'optimisation à un engrenage à dentures droites

La courbe de raccordement du pied de dent d'un profil de dent d'engrenage à optimiser dans cette étude est celle d'un pignon de 25 dents à profil actif en développante de cercle, auquel on applique une force $F_n = 10$ daN au point le Plus Haut de Contact Unique (cf. Fig. 1) et dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes :

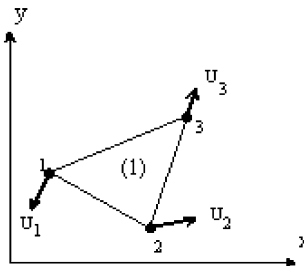


Fig. 3. Triangle à 3 nœuds.

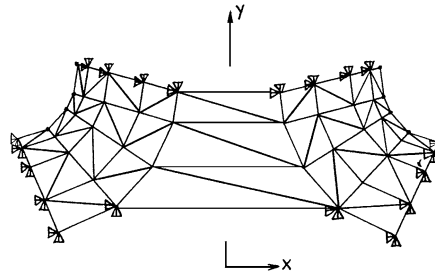


Fig. 6. Partie à optimiser.

Comme la partie à optimiser ne concerne que la trochoïde en utilisant des éléments triangulaires, on a divisé tous les éléments quadrilatères de cette partie pour avoir à faire à des triangles et on a limité la structure sur cette partie en imposant des encastrements sur le contour frontalier avec le reste de la dent (cf. Fig. 6) [11,12].

Ainsi notre étude d'optimisation ne comportera que 70 éléments et 50 nœuds dont 20 sont encastres.

8. Formulation des contraintes

En se rappelant l'équation des contraintes (12) et en utilisant les déplacements des nœuds suivant x et y ainsi que la matrice $[R]$, on en déduit la matrice dérivée $[\dot{U}]$ sans faire de véritables dérivées en utilisant la relation (14). L'ensemble de ces termes fonction des C_{KJ} nous constitue la matrice $[\text{Mat} \cdot A]$.

On assemble les $\alpha G_0 - \frac{1}{2}\varepsilon^T L\varepsilon$ de chaque triangle pour former $[\text{Mat} \cdot B]$.

9. Résolution du problème d'optimisation

Le nombre de nœuds est de 50, ce qui nous donne 100 inconnues C_{Kj} à déterminer et regroupées dans la matrice $[x]$. L'encastrement est effectué au niveau de 20 nœuds (cf. Fig. 6), on va avoir ainsi 40 inconnues en moins à déterminer.

Le problème posé devient sous forme matricielle :

$$\begin{cases} [\text{Mat} \cdot A][X] \leq [\text{Mat} \cdot B] \\ \min[\text{Mat} \cdot C][X] \end{cases} \Rightarrow \text{Solution } [X]$$

Le résultat nous donne la matrice des inconnues $[x]$ correspondant au déplacement des nœuds dans la trochoïde.

9.1. Maillage de la dent optimisée

Dans la Fig. 8 on observe la différence entre la nouvelle forme (dent optimisée) et la forme initiale. (cf. Fig. 8).

Soulignons que tous les procédés d'optimisation de forme sont incrémentaux. *Dans notre cas le deuxième incrément n'a pas été significatif. (On trouve sensiblement les mêmes résultats.)*

9.2. Contraintes au pied de la dent optimisée

En reprenant cette nouvelle forme obtenue avec le maillage de la Fig. 7 et le même chargement ($F_n = 10$ daN) au même point que celui de la dent initiale (P.H.C.U), on calcule la contrainte de von Mises en pied de dent.

La Fig. 9 nous montre la répartition de cette contrainte avec indication de la valeur maximale au point critique.

10. Interprétation et comparaison des résultats

Commentons les résultats obtenus en envisageant cette nouvelle forme.

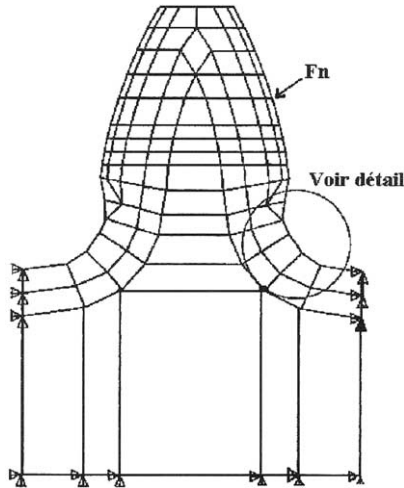


Fig. 7. Cas optimisé $F_n = 10$ daN au point P.H.C.U.

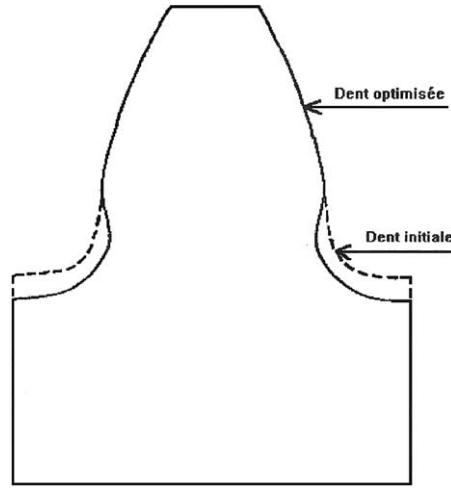


Fig. 8. Dent initiale et optimisée.

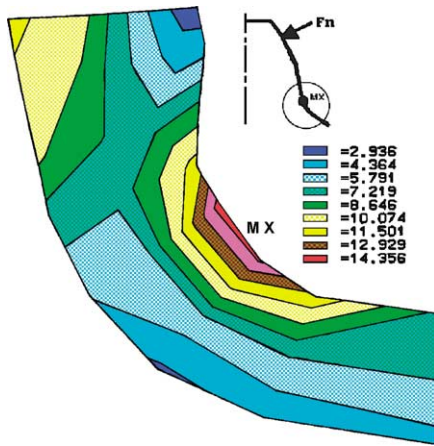


Fig. 9. Répartition des contraintes au pied de la dent optimisée.

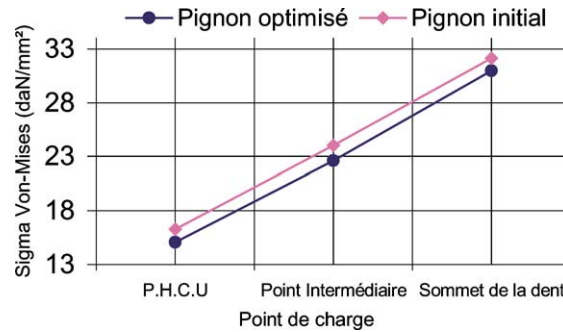


Fig. 10. Contrainte maximale de von Mises au pied de la dent initiale et optimisée.

10.1. La nouvelle forme

Sur la Fig. 8 on ne distingue pas bien la différence de forme entre la trochoïde du côté opposé de la charge « côté gauche » et celui de charge « côté droit », mais d'après les valeurs des déplacements infinitésimaux obtenues les deux côtés de la trochoïde ne sont pas parfaitement symétriques.

Les résultats obtenus nous montrent que les déplacements se sont faits vers l'intérieur du pignon mais le côté « gauche » de la trochoïde s'est creusé plus que le côté « droit » ce qui est logique d'un point de vue mécanique puisque le côté de la charge étant soumis à une traction et le côté opposé à une compression.

Ces valeurs sont tout de même très voisines et on peut considérer que la dent est symétrique.

10.2. La contrainte de von Mises

On remarque que la contrainte maximale de von Mises dans la dent optimisée ($\sigma_{\text{optimisation}} = 15.07 \text{ daN/mm}^2$) est inférieure à celle obtenue dans la dent initiale ($\sigma_{\text{initiale}} = 16.28 \text{ daN/mm}^2$).

En plus de ces valeurs on s'est intéressé à la contrainte de von Mises le long de la développante (pour simuler l'engrènement entre deux dents d'engrenages) pour une charge de $F_n = 10 \text{ daN}$ appliquée sur le pignon initial et optimisé. L'évolution de cette contrainte est représentée sur la Fig. 10.

11. Conclusions

On voit bien que la contrainte de von Mises au pied de la dent optimisée est inférieure à celle obtenue dans le pignon initial.

Cette nouvelle formulation du problème d'optimisation est encourageante puisqu'on a constaté une diminution de volume au niveau de la trochoïde tout en conservant au pignon sa résistance mécanique.

Le pignon ainsi optimisé, soumis au même chargement qu'un pignon classique, voit sa contrainte maximale de flexion en pied de dent diminuer.

Avec cette nouvelle approche d'optimisation on peut envisager une généralisation relative à une dent complète afin de définir une nouvelle forme de pignon ayant un rayon de raccordement du pied de dent calculé à partir des résultats obtenus.

L'élaboration d'une telle approche laisse une porte ouverte à la recherche pour caractériser une nouvelle crémaillère génératrice et surtout fournit un cadre à la réalisation d'engrenages en matière plastiques ainsi qu'à des recherches d'ordre mathématique sur l'optimisation de forme.

Références

- [1] G. Henriot, Traité théorique des engrenages, Tome 1, Dunod, 1979.
- [2] M. Masmoudi, Outils pour la conception optimale de formes, Thèse docteur ès sciences mathématiques, Université de Nice, juin 1987.
- [3] V. Braibant, Optimisation de forme des structures en vue de la conception assistée par ordinateur, Université de Liège, 1986.
- [4] P. Germain, P. Muller, Introduction à la mécanique des milieux continus, Masson, 1980.
- [5] P. Germain, Cours de mécanique des milieux continus, Tome 1, Masson, 1973.
- [6] B. Rousselet, Introduction to shape sensitivity three dimensional and surface systems, Université de Nice, 1983.
- [7] P.H. Trompette, J.L. Marcelin, C. Lallemand, Optimal shape design of axysymmetric structures, Instituts de la promotion des sciences de l'ingénieur, Paris, 9–11 septembre 1987.
- [8] M.H. Bouanane, Méthodologie de caractérisation mécanique des engrenages cylindriques droits, Thèse docteur en génie mécanique, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, janvier 1995.
- [9] O. Zienkiewicz, La méthode des éléments finis, 3ème édition, McGraw-Hill, 1979.
- [10] Engineering Analysis System, Swanson Analysis System, Inc, Houston, PA, USA, 1990, Version 4.3, 4.4 et 4.4A.
- [11] G. Caracci, Optimisation quadratique. Application à des problèmes technologiques dans un contexte de C.A.O., Thèse docteur ès-sciences, Université Paul Sabatier, Toulouse, juin 1988.
- [12] Chabert–Delfos–Mathis, Evaluation des contraintes et de la flexion des dents d'engrenages cylindriques droits sous charge, Mémoires techniques du CETIM n° 15.