



## Amortissement visqueux d'un résonateur mécanique en environnement gazeux

Damien Perret<sup>a</sup>, Jean-Paul Garandet<sup>a,\*</sup>, Alain Jeanroy<sup>b</sup>

<sup>a</sup> CEA-Grenoble, DRT/DTEN/SMP/LESA, 17, rue des Martyrs, 38054 Grenoble cedex 9, France

<sup>b</sup> SAGEM, 72–74, rue de la Tour Billy, BP 72, 95101 Argenteuil cedex, France

Reçu et accepté le 24 mars 2003

Présenté par René Moreau

---

### Résumé

Nous étudions les phénomènes de dissipation liés à la présence d'un environnement gazeux, entraînant l'amortissement de l'amplitude des oscillations d'un système vibrant (type résonateur mécanique). Dans un régime de pression dit « visqueux » ( $p$  compris entre  $10^{-3}$  mbar et 1 bar), nous proposons un modèle simple qui permet une analyse des ordres de grandeur des mécanismes de dissipation. Ce modèle, basé sur la formulation classique de l'équation de conservation de l'énergie en mécanique des fluides, prédit pour la dissipation une loi de variation en  $p^{1/2}$ . En parallèle, nous présentons les résultats d'expériences en bon accord avec les prévisions du modèle. *Pour citer cet article : D. Perret et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Viscous damping of a mechanical resonator in a gaseous environment.** We study dissipation phenomena due to the presence of a gaseous environment, leading to the damping of the oscillations in vibrating systems such as mechanical resonators. In the so-called “viscous” pressure region ( $p$  ranging between  $10^{-3}$  mbar and 1 bar), we suggest a simple model allowing an order of magnitude analysis of the dissipation mechanisms. This model, based on the classical form of the energy conservation equation in fluid mechanics, leads to a  $p^{1/2}$  variation scale for the dissipation. In addition, we present experimental results that are found to be in good agreement with the predictions of the model. *To cite this article: D. Perret et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Mécanique des fluides ; Résonateur mécanique ; Amortissement visqueux ; Analyse des ordres de grandeur ; Facteur de qualité

*Keywords:* Fluid mechanics; Mechanical resonator; Viscous damping; Scaling analysis; Quality factor

---

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [garandet@chartreuse.cea.fr](mailto:garandet@chartreuse.cea.fr) (J.-P. Garandet).

### Abridged English version

The dissipation of the energy of a mechanical resonator, leading to the damping of an imposed oscillation, has many sources [1–4]. The quality factor  $Q$  which can be defined by the ratio of the mechanical energy of the vibration  $W_0$  to the dissipated energy  $\Delta W$  during one period [3]. Thus, the quantity:

$$Q = \frac{2\pi W_0}{\Delta W} \quad (1)$$

permits the quantitative evaluation of the damping. We study dissipation phenomena due to the presence of a gaseous environment around an hemispherical resonator. In the case of a Newtonian and incompressible fluid (with a viscosity  $\eta$  and a density  $\rho_f$ ), the Navier–Stokes equation can be expressed by:

$$\rho_f \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho_f (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (2)$$

where  $\vec{u}$  is the velocity field and  $p$  the pressure in the fluid. It is well established that the most part of the vibration field within the hemispherical resonator is localized in an equatorial crown of thickness  $e$  and height  $h$  as shown in Fig. 1. Considering an oscillation of pulsation  $\omega$  the main hypothesis is that the viscous dissipation occurs in the volume given by  $2\pi\delta hR$ ,  $\delta$  being the typical length of the propagation of the flow perturbation. The energy dissipated by viscosity during the period  $2\pi/\omega$  in the volume  $V$  of the cavity,  $\int_V [\int_0^{2\pi/\omega} \vec{u} \cdot \eta \nabla^2 \vec{u} dt] dV$ , can be expressed by  $\Delta W = \eta(u_c^2/\delta^2)(2\pi\delta hR)(2\pi/\omega)$  where  $u_c$  is a characteristic value of the resonator surface velocity. The mechanical energy, supposed to be constant during a cycle, can be expressed as  $W_0 = \frac{1}{2}\rho_r(2\pi ehR)u_c^2$  where  $2\pi ehR$  is the crown volume and  $\rho_r$  the density of the resonator. The quality factor can thus be written as:

$$Q_{\text{visq}} = 2\pi \frac{W_0}{\Delta W} \approx 2\pi \frac{(1/2)\rho_r(2\pi ehR)u_c^2}{\eta(u_c^2/\delta^2)(2\pi\delta hR)(2\pi/\omega)} \quad \text{or} \quad Q_{\text{visq}}^{-1} = \frac{2\eta}{\rho_r e \omega \delta} \quad (3)$$

The thickness of the hydrodynamic boundary layer  $\delta$  in front of the resonator surface can be taken as the typical length scale of the viscosity perturbation:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\pi\eta}{\omega\rho_f}} \quad (4)$$

Plugging in the perfect gas equation to express the density  $\rho_f$  of the fluid as a function of its molecular weight  $M_g$ , we have for the viscous dissipation:

$$Q_{\text{visq}}^{-1} = \frac{1}{\rho_r e} \sqrt{\frac{2\eta M_g p}{\pi R T \omega}} \quad (5)$$

The quality factors have been experimentally determined by the measure of the decay time of the free oscillations after an excitation of the hemispherical resonator shown in Fig. 1. As shown in Fig. 2 the predictions of our theoretical model, both regarding the order of magnitude and the  $p^{1/2}$  variation scale, are in good agreement with experimental values, for pressures ranging between  $10^{-3}$  mbar and 1 bar. Below  $10^{-3}$  mbar the damping of the oscillations is due to intrinsic dissipation mechanisms of the resonator that are independent of the residual pressure. Independently of the influence of these intrinsic dissipation mechanisms, it is important to stress that our dissipation model is only valid in the viscous region, when the mean free path of the gas molecules is small compared with the typical length of the cavity. By evaluating the characteristic Knudsen number [6], we find that the transition between the molecular and the viscous regimes occurs around  $10^{-3}$  mbar in our installation.

## 1. Introduction

Les résonateurs mécaniques sont des systèmes basés sur le maintien d'un champ vibratoire dans une structure. Une application importante est le Gyroscope à Résonateur Hémisphérique, instrument utilisé dans le domaine du guidage-navigation. La dissipation de l'énergie mécanique d'un système vibratoire (type résonateur mécanique) a plusieurs origines, intrinsèques au matériau, ou ne dépendant que des conditions expérimentales (environnement gazeux, pertes dans les encastremets par exemple). Toutes ces causes ont été largement étudiées dans la littérature [1–4]. D'un point de vue théorique, on appelle facteur de qualité la grandeur sans dimension  $Q$  définie par le rapport [3] :

$$Q = \frac{2\pi W_0}{\Delta W} \quad (1)$$

avec  $W_0$  l'énergie mécanique de vibration et  $\Delta W$  l'énergie dissipée pendant une période. La grandeur  $Q$ , ou son inverse  $Q^{-1}$ , permet de quantifier l'amortissement de l'amplitude de vibration du résonateur. Dans la pratique expérimentale, on peut déterminer le facteur de qualité  $Q$  en mesurant le temps caractéristique  $\tau$  de l'amortissement de l'amplitude des vibrations après excitation par choc. En effet, si l'amplitude s'amortit exponentielle, le facteur de qualité  $Q$  peut être relié à  $\tau$ , temps au bout duquel l'amplitude de vibration a été divisée d'un facteur  $e$ , par la relation :

$$Q = \frac{\omega\tau}{2} \quad (2)$$

Dans l'expression précédente,  $\omega$  représente la pulsation de la vibration du système. Pour les applications de type guidage-navigation, le facteur de qualité  $Q$  doit prendre des valeurs élevées, on doit donc s'intéresser au domaine des faibles amortissements. Cette étude propose l'analyse d'un mécanisme de dissipation particulier, non intrinsèque au matériau : l'amortissement du au gaz environnant, dans le cas où les échantillons se présentent sous la forme d'une coquille hémisphérique (Fig. 1). On présente en particulier une analyse par ordre de grandeur du mode de dissipation par pertes visqueuses dans le gaz et des résultats expérimentaux permettant de valider le modèle.

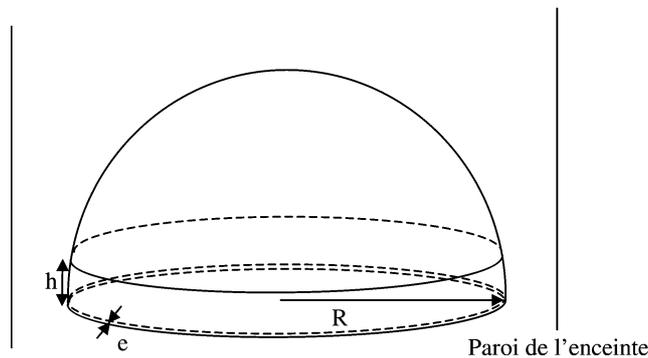


Fig. 1. Modèle géométrique permettant d'évaluer quantitativement la dissipation en régime visqueux, dans le cas d'un échantillon en forme de coquille hémisphérique.

Fig. 1. Geometrical model allowing the quantitative evaluation of the viscous dissipation, in the case of an hemispherical shell-shaped sample.

## 2. Modèle théorique d'amortissement du au gaz environnant

### 2.1. Modèle de dissipation en régime visqueux

Dans le cas où un fluide peut être considéré comme newtonien (de viscosité  $\eta$ ) et incompressible, l'équation de Navier–Stokes peut être mise sous la forme :

$$\rho_f \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho_f (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (3)$$

$\rho_f$  étant la masse volumique du fluide considéré,  $\vec{u}$  le champ de vitesses et  $p$  la pression du fluide. Notons que l'hypothèse d'incompressibilité de l'air est acceptable dans notre cas, les vitesses mises en jeu lors de la vibration, de l'ordre du centimètre par seconde, étant faibles devant la vitesse de propagation du son.

Dans la pratique expérimentale, il est communément admis que la majeure partie du champ de vibration est localisée dans une couronne d'épaisseur  $e$ , de hauteur  $h$  et de rayon  $R$  (Fig. 1). Considérons donc les oscillations de pulsation  $\omega$  effectuées par cette couronne dans un espace limité par les parois de l'enceinte. L'hypothèse de base est de supposer que la dissipation visqueuse se fait dans un volume  $2\pi \delta h R$ ,  $\delta$  représentant la valeur caractéristique de l'étendue de la propagation d'une perturbation de l'écoulement, pendant une durée correspondant à la période d'oscillation.

En remplaçant, dans le terme laplacien, les opérateurs de différentiation par une division par  $\delta$ , l'énergie dissipée pendant un cycle de période  $2\pi/\omega$  sur le volume  $V$  de l'enceinte  $\int_V [\int_0^{2\pi/\omega} \vec{u} \cdot \eta \nabla^2 \vec{u} dt] dV$  peut se mettre sous la forme  $\Delta W = \eta (u_c^2 / \delta^2) (2\pi \delta h R) (2\pi / \omega)$ ,  $u_c$  représentant une valeur caractéristique de la vitesse de surface du résonateur. Une valeur typique de l'énergie mécanique, supposée constante pendant un cycle, est  $W_0 = \frac{1}{2} \rho_f (2\pi e h R) u_c^2$ , la quantité  $(2\pi e h R)$  représentant le volume de la couronne considérée et  $\rho_f$  la masse volumique du résonateur. Le facteur de qualité peut donc s'exprimer sous la forme :

$$Q_{\text{visq}} = 2\pi \frac{W_0}{\Delta W} \approx 2\pi \frac{(1/2) \rho_f (2\pi e h R) u_c^2}{\eta (u_c^2 / \delta^2) (2\pi \delta h R) (2\pi / \omega)} \quad \text{soit} \quad Q_{\text{visq}}^{-1} = \frac{2\eta}{\rho_f e \omega \delta} \quad (4)$$

En utilisant comme échelle de temps la période  $2\pi/\omega$ , l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite hydrodynamique [5] en amont du résonateur peut être identifiée à la longueur caractéristique de la perturbation de viscosité :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\pi \eta}{\omega \rho_f}} \quad (5)$$

La masse volumique  $\rho_f$  du fluide peut s'exprimer en utilisant l'équation d'état d'un gaz parfait de masse atomique molaire  $M_g$ ,  $\rho_f = p M_g / (RT)$ , ce qui donne pour l'expression de la dissipation en régime visqueux :

$$Q_{\text{visq}}^{-1} = \frac{1}{\rho_f e} \sqrt{\frac{2\eta M_g p}{\pi R T \omega}} \quad (6)$$

En supposant la viscosité du gaz indépendante de la pression, hypothèse bien justifiée aux faibles pressions typiques de notre étude, on obtient donc une loi de dépendance  $Q_{\text{visq}}^{-1} \propto p^{1/2}$ .

### 2.2. Confrontation du modèle avec les résultats expérimentaux

Les facteurs de qualité  $Q$  expérimentaux ont été déterminés en fonction de la pression mesurée dans l'enceinte pour un résonateur de forme similaire à celle reportée en Fig. 1. La gamme de pression étudiée s'étend de  $6 \times 10^{-5}$  mbar à 1 bar. La méthode utilisée est une mesure du temps caractéristique  $\tau$  de l'amortissement de l'amplitude des vibrations du résonateur après excitation par choc. Les valeurs expérimentales représentées en Fig. 2 sont en accord avec les prédictions de notre modèle d'évaluation de la dissipation, au moins pour des pressions comprises entre  $10^{-3}$  mbar et 1 bar. En effet, les ordres de grandeur sont satisfaisants, et la loi de variation de la dissipation  $Q_{\text{visq}}^{-1}$  en  $p^{1/2}$  prédite par notre modèle semble être vérifiée.

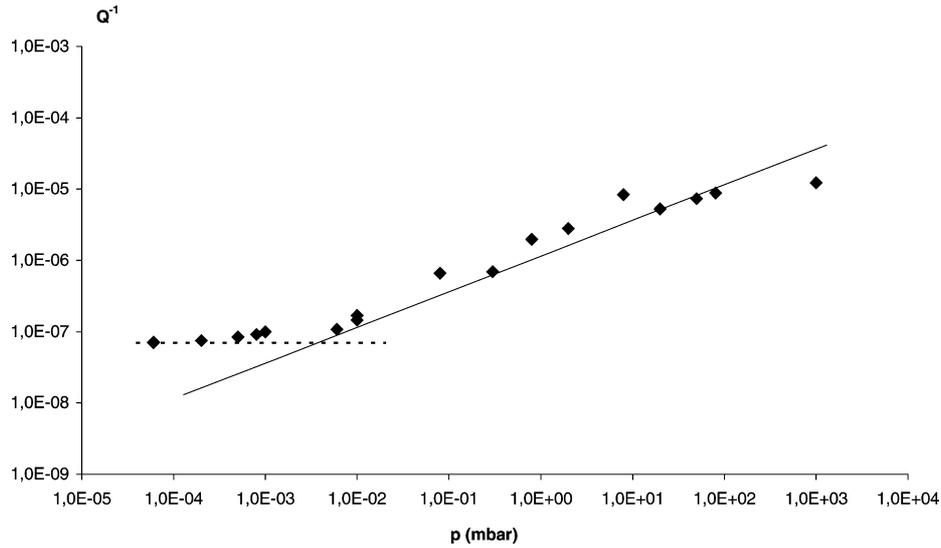


Fig. 2. Variation de  $Q^{-1}$ , inverse du facteur de qualité, en fonction de la pression dans l'enceinte pour un résonateur hémisphérique. Confrontation du modèle théorique (trait plein) et des points expérimentaux.

Fig. 2. Variation of  $Q^{-1}$ , inverse of the quality factor, as a function of the pressure within the cavity for an hemispherical resonator. Comparison of the theoretical model (full line) with experimental measurements.

### 2.3. Discussion, validité du modèle

L'étude de nos résultats expérimentaux montre que pour des pressions inférieures à  $10^{-3}$  mbar, la dissipation mesurée n'est plus déterminée par l'environnement gazeux. En dessous de cette pression, l'influence du gaz devient très faible et la valeur mesurée tend vers une valeur limite indépendante de la pression, déterminée uniquement par les autres mécanismes de dissipation. Dans le cas particulier des résultats de la Fig. 2, la faible valeur de  $Q^{-1}$  semble indiquer que l'amortissement est lié aux propriétés intrinsèques du matériau. Indépendamment de l'influence de ces mécanismes de dissipation intrinsèques, il est important de souligner que notre modèle de dissipation en régime visqueux n'est de toute façon valable que dans une gamme limitée de pression. En effet, lorsque le libre parcours moyen  $l$  des molécules de gaz devient de l'ordre ou supérieur à la dimension caractéristique  $L$  de l'enceinte, la validité d'un modèle à l'échelle du continu devient discutable et le régime doit alors être considéré comme moléculaire. Typiquement, la frontière entre ces deux régimes peut être estimée à l'aide du nombre sans dimension Kn, dit nombre de Knudsen [6] :

$$\text{Kn} = \frac{l}{L} \quad (7)$$

le libre parcours moyen  $l$  étant estimable à partir de la théorie cinétique des gaz. Par convention, le régime est dit moléculaire si  $\text{Kn} > 1$  et visqueux si  $\text{Kn} < 10^{-2}$ . Dans notre cas, où l'environnement gazeux est l'air et où les dimensions de l'enceinte sont de l'ordre de la dizaine de cm, ce calcul conduit à  $\text{Kn} = 10^{-2}$  pour  $p = 3 \times 10^{-2}$  mbar et  $\text{Kn} = 1$  pour  $p = 3 \times 10^{-4}$  mbar à température ambiante. Comme le montre la Fig. 2, l'amortissement intrinsèque du résonateur ne permet pas, dans nos conditions expérimentales, d'observer le régime moléculaire. En effet, il faudrait pour cela que le facteur de qualité  $Q$  du résonateur soit au moins égal à  $10^8$ . . . Comme nous ne savons pas à l'heure actuelle réaliser des résonateurs hémisphériques en silice possédant des facteurs de qualité aussi élevés à température ambiante, une méthode pour observer la loi de variation de la dissipation en régime moléculaire pourrait être de déplacer la frontière entre les deux régimes vers des pressions plus élevées. Comme le montre l'Éq. (7), ceci devrait être possible en diminuant la dimension caractéristique  $L$  de l'enceinte. Ainsi, la validité de

l'expression de la dissipation  $Q^{-1}$  en régime moléculaire proposée dans la littérature, dans le cas d'un dôme en vibration [7] :

$$Q_{\text{molec}}^{-1} = \sqrt{\frac{32M_g}{\pi RT}} \frac{p}{\rho e \omega} \quad (8)$$

devrait pouvoir être vérifiée. Enfin, il est intéressant de noter qu'en égalant les relations (6) et (8), on situe le changement de régime aux environs de  $10^{-3}$  mbar, ce qui est en accord avec l'estimation donnée par le nombre de Knudsen (7).

### 3. Conclusions

Nous présentons dans ce travail un modèle approché permettant d'évaluer l'ordre de grandeur de la quantité d'énergie dissipée par viscosité dans le gaz environnant un résonateur hémisphérique. Nous montrons que ce modèle permet de rendre compte des résultats expérimentaux pour le domaine de pression compris entre  $10^{-3}$  mbar et 1 bar. Nous discutons également les limites de validité de notre modèle, tant par rapport aux propriétés intrinsèques du matériau que par rapport à la validité de l'hypothèse de milieu continu.

### Remerciements

Nous tenons à remercier les personnes de la DGA (L. Beylat, E. Pleska, J.L. Derep, J.C. Mahaut, P. Thomine, F. Petit), de SAGEM (J.M. Caron) et du CEA (J.L. Santailier) qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

### Références

- [1] C. Zener, *Elasticity and Anelasticity of Metals*, The University of Chicago Press, Chicago, 1948.
- [2] L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité*, MIR, Moscow, 1967.
- [3] A.S. Nowick, B.S. Berry, *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*, in: *Materials Science Series*, Academic Press, New York, 1972.
- [4] V.B. Braginsky, V.P. Mitrofanov, V.I. Panov, *Systems with Small Dissipation*, The University of Chicago Press, Chicago, 1985.
- [5] E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, InterEditions, Paris, 1991.
- [6] S. Dushman, J.M. Lafferty, *Scientific Foundations of Vacuum Technique*, 2nd edition, Wiley, New York, 1962.
- [7] H. Fima, *Propriétés des vibrations de flexion des poutres et des coques appliquées à la réalisation d'accéléromètres et de gyromètres*, Thèse Sci., UFR des Sciences et Techniques de l'Université de Franche-Comté, 1995.