



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 551–556



Sur la fermeture des termes rapides pour des écoulements moyens rotationnels

Jean Piquet

Laboratoire de mécanique des fluides, UMR 6598 CNRS, École centrale de Nantes, BP92101, 44321 Nantes cedex, France

Reçu le 4 mars 2003 ; accepté après révision le 6 juin 2003

Présenté par Pierre Perrier

Résumé

La modélisation des écoulements turbulents homogènes rotationnels en moyenne, abordée dans Lumley (Adv. Appl. Mech. 18 (1978) 123–176), est effectuée sous la forme $\mathbf{M}^* = M[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$ en fonction des anisotropies en composantes et en dimensions, \mathbf{b} et \mathbf{y} et de la stropholyse symétrisée. Une technique systématique de développement est mise en place. Des conditions nécessaires de réalisabilité sont ensuite appliquées. Il est montré qu'aucune fonctionnelle M isotrope par rapport à ses arguments n'est réalisable. *Pour citer cet article : J. Piquet, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On the closure of rapid terms for rotational mean flows. The modelling of homogeneous turbulent flows with mean rotation, considered in a previous Note, is handled under the form $\mathbf{M}^* = M[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$ in terms of componental and dimensional anisotropies, and of the symmetrized stropholysis. A systematic technique of expansion is proposed. The necessary realisability conditions are then applied. It is shown that there exists no realisable functional M which would be isotropic with respect to its arguments. *To cite this article: J. Piquet, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Turbulence ; Réalisabilité ; Pression-déformation

Keywords: Fluid mechanics; Turbulence; Realisability; Pressure-strain

Abridged English version

The homogeneous turbulence modelling of the pressure-strain tensor, T_{ij} , is usually based on the splitting [1]. This Note is concerned with the study of rapid term models based on M_{ijpq} as defined by (2) or, equivalently on its fully symmetrized part $\mathbf{M}_{(}$ as given by (3), under the form $\mathbf{M}_{(} = M[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$. Besides the anisotropy, \mathbf{b} , of Reynolds stresses, other arguments are the dimensional anisotropy, \mathbf{y} , and the purely symmetric stropholysis, \mathbf{Q}^* . The general closure takes the form (7). Besides contributions which depend only on \mathbf{b} or \mathbf{y} , one can identify a third

Adresse e-mail : Jean.Piquet@ec-nantes.fr (J. Piquet).

1631-0721/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

doi:10.1016/S1631-0721(03)00124-4

contribution which does not depend on \mathbf{Q}^* . A diagram technique is presented to obtain contributions that depend simultaneously on \mathbf{b} , \mathbf{y} , \mathbf{Q}^* , in an isotropic way. How the trace-free form, \mathbf{M}^* , associated to $\mathbf{M}_{(\cdot)}$, as deduced from the diagrams is shown on the expansion valid to the second order in terms of the small parameter h which characterizes anisotropy. It is shown that componental realisability, which amounts to writing (12) together with $M_{1jpp}^* + M_{1jpp}^g = 0$ in principal axii of \mathbf{b} , when $b_{11} = -1/3$, yields a polynomial expression for M_{1jpp}^* in terms of $\mathbf{X} := \{b_{22}, y_{11}, y_{22}, y_{12}, y_{13}, y_{23}, Q_{222}^*, Q_{333}^*\}$. The condition that terms quadratic in \mathbf{X} must vanish for all values of \mathbf{X} leads to the fact that M_{1jpp}^* is free from terms that are either linear in \mathbf{X} or independent of \mathbf{X} . Since M_{1jpp}^g is involved only with such terms, it follows that there is no isotropic functional of the form $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$ which is realisable.

1. Introduction

La modélisation du tenseur des corrélations pression-déformation T_{ij} est un enjeu important en turbulence homogène. Elle s'effectue à travers la décomposition [1] en partie lente, $T_{ij}^{(s)}$, et partie rapide proportionnelle au gradient, $V_{p,q}^{(a)}$, de vitesse moyenne absolue. On est alors conduit classiquement à :

$$2K T_{ij} := \rho^{-1} \overline{p(u_{i,j} + u_{j,i})} = 2K T_{ij}^{(s)} + 4K (M_{ipqj} + M_{jppqi}) V_{q,p}^{(a)} \quad (1)$$

Le problème de fermeture se pose alors pour $T_{ij}^{(s)}$ et pour le tenseur du quatrième ordre M_{ijppq} , défini comme une intégrale sur tous les nombres d'onde \mathbf{k} dans l'espace spectral :

$$2K M_{ijppq} := \int \frac{k_p k_q}{k^2} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (2)$$

qui mesure la sensibilité au gradient de vitesse moyenne des corrélations linéaires pression-déformation. $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ est le tenseur spectral des corrélations doubles de vitesse, K l'énergie cinétique de la turbulence. L'objet de cette Note est de formuler une loi de fermeture pour la partie, $\mathbf{M}_{(\cdot)}$, totalement symétrisée de \mathbf{M} ,

$$M_{(ijppq)} := \frac{1}{6} \langle M_{ijppq} \rangle; \quad \langle M_{ijppq} \rangle := M_{ipjq} + M_{ipqj} + M_{iqjp} + M_{pjij} + M_{qjip} + M_{pqij} \quad (3)$$

sous la forme $\mathbf{M}_{(\cdot)} = \mathbf{M}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$ – les crochets $\langle \dots \rangle$ désignent l'opération de symétrisation totale, son nombre de termes dépend des symétries partielles de la quantité avant symétrisation. Les arguments de la fonctionnelle \mathbf{M} mettent en jeu la stropholyse symétrisée [2] :

$$Q_{ijk}^* := \frac{1}{6} \langle Q_{ijk} \rangle \quad \text{où} \quad Q_{ijk} := -\overline{u_j \psi_{ik}} / 2K = \varepsilon_{ipq} M_{jqpk} \quad (4)$$

où ψ désigne le potentiel vecteur des fluctuations de vitesse \mathbf{u} . En turbulence homogène, \mathbf{Q} a toutes ses traces partielles nulles, et il génère les tenseurs des corrélations doubles et de dimensionnalité et les anisotropies correspondantes \mathbf{b} et \mathbf{y} en accord avec (5) :

$$\overline{u_i u_j} / 2K = \frac{1}{3} \delta_{ij} + b_{ij} =: \varepsilon_{imp} Q_{mj p} = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} / 2K \quad (5a)$$

$$Y_{ij} / 2K := \overline{\psi_{k,i} \psi_{k,j}} / 2K =: \frac{1}{3} \delta_{ij} + y_{ij} = \varepsilon_{imp} Q_{pmj} = \int \frac{k_i k_j}{k^2} \Phi_{kk}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} / 2K \quad (5b)$$

Nous avons vu dans [3] qu'il était plus simple d'étudier la fermeture sous la forme $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$, dans la mesure où toutes les traces partielles de \mathbf{M}^* sont nulles :

$$M_{ijppq}^* := M_{(ijppq)} - \left[\frac{1}{45} \langle \delta_{ij} \delta_{pq} \rangle + \frac{1}{42} \langle \delta_{ij} (b_{pq} + y_{pq}) \rangle \right] \quad (6)$$

2. La fonctionnelle symétrisée $M[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$

Nous nous restreignons au cas d’une fonctionnelle M isotrope de ses arguments et nous la développons en puissances d’un (petit) paramètre h caractéristique de l’anisotropie, $\mathbf{b} = O(h)$, $\mathbf{y} = O(h)$, $\mathbf{Q}^* = O(h)$, sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ijpq}^* \equiv M_{ijpq} &= M_{ijpq}^{(0)}[\mathbf{b}] + M_{ijpq}^{(0)}[\mathbf{y}] + M_{ijpq}^x[\mathbf{b}, \mathbf{y}] + M_{ijpq}^{(1)}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*] + M_{ijpq}^{(2)}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*] \\ &+ M_{ijpq}^{(3)}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*] + M_{ijpq}^{(4)}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*] + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

où l’indice supérieur (i) désigne l’ordre en stropholyse. La limitation au quatrième ordre en stropholyse est consistante avec la limitation retenue à h^4 du développement de la fonctionnelle. Cette particularisation est fixée pour éviter d’avoir à tenir compte des développements en \mathbf{b} , \mathbf{y} d’ordre supérieur à deux. A cause du théorème de Cayley–Hamilton appliqué à $\mathbf{b} + \Lambda \mathbf{y}$ ($\forall \Lambda$) – voir Appendice A –, les déviateurs \mathbf{b} et \mathbf{y} génèrent un ensemble, \mathcal{L}_2 , de 12 tenseurs indépendants du second ordre d’extension deux, un ensemble, \mathcal{L}_3 , de deux tenseurs indépendants d’extension trois et un ensemble, \mathcal{L}_4 , de quatre tenseurs indépendants d’extension quatre [4]. Par exemple :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &:= \{\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{b}^2, \mathbf{y}^2, \mathbf{b}\mathbf{y}, \mathbf{y}\mathbf{b}, \mathbf{b}^2\mathbf{y}, \mathbf{y}\mathbf{b}^2, \mathbf{b}\mathbf{y}^2, \mathbf{y}^2\mathbf{b}, \mathbf{b}^2\mathbf{y}^2, \mathbf{y}^2\mathbf{b}^2\} \\ \mathcal{L}_3 &:= \{\mathbf{b}^2\mathbf{y}\mathbf{b}, \mathbf{y}^2\mathbf{b}\mathbf{y}\}, \quad \mathcal{L}_4 := \{\mathbf{b}\mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{y}, \mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{y}\mathbf{b}, \mathbf{b}\mathbf{y}\mathbf{b}^2\mathbf{y}^2, \mathbf{y}\mathbf{b}\mathbf{y}^2\mathbf{b}^2\} \end{aligned} \quad (8)$$

Notons enfin $Skw(2)$ l’ensemble des tenseurs antisymétriques du second ordre et $Lin(2)$ son complément, $Sym(2)$ l’ensemble des tenseurs symétriques du second ordre.

Les deux premiers termes (unidépendants) de (7) se composent de trois contributions. Par exemple :

$$\begin{aligned} M_{ijpq}^{(0)}(\mathbf{b}) &= C_1^{(0)}(\langle b_{ij}b_{pq} \rangle - \frac{2}{7}\langle \delta_{ij}b_{.pq}^2 \rangle - \frac{4}{35}\Pi(\delta_{ij}\delta_{pq})) + C_2^{(0)}(\langle b_{ij}b_{.pq}^2 \rangle + \frac{6}{7}\Pi(\delta_{ij}b_{pq}) - \frac{4}{35}\text{III}(\delta_{ij}\delta_{pq})) \\ &+ C_3^{(0)}(\langle b_{.ij}^2b_{.pq}^2 \rangle - \frac{2}{7}\text{III}(\delta_{ij}b_{pq}) + 2\Pi(\langle b_{ij}b_{pq} \rangle)) \end{aligned} \quad (9)$$

La forme (9), dite forme unidépendante, est la seule contribution à laquelle se réduit M dans le cas d’un écoulement moyen irrotationnel. Elle dépend de trois scalaires, $C_a^{(0)}$, $a = 1, 2, 3$, fonctions des invariants de \mathbf{b} , $\Pi := -\{\mathbf{b}^2\}/2$, $\text{III} := \{\mathbf{b}^3\}/3$, où $\{\cdot\}$ désigne l’opération trace. Le troisième terme est un terme d’interaction entre anisotropies. Si l’on considère deux tenseurs différents arbitraires, \mathbf{B} & $\mathbf{C} \in Sym(2)$, la contribution à traces nulles du produit $B_{ij}C_{pq}$ à M_{ijpq}^x est nécessairement de la forme (10) :

$$\langle B_{ij}C_{pq} \rangle - \frac{2}{7}\langle \delta_{ij}(B_{kp}C_{kq} + C_{kp}B_{kq}) \rangle + \frac{2}{5}(\frac{2}{7}\{\mathbf{B}\mathbf{C}\} - \{\mathbf{B}\}\{\mathbf{C}\})\langle \delta_{ij}\delta_{pq} \rangle \quad (10)$$

Il suffit alors restreindre \mathbf{B} et \mathbf{C} à l’ensemble $Sym(2) \cap \mathcal{L}_2$ dans la mesure où les parties symétriques des extensions d’ordre plus élevé ne sont pas indépendantes. Il est alors facile de vérifier que la modélisation $M_{ijpq} = M_{ijpq}^{(0)}(\mathbf{b}) + M_{ijpq}^{(0)}(\mathbf{y}) + M_{ijpq}^x(\mathbf{b}, \mathbf{y})$ n’est pas réalisable, ce qui justifie la présence des termes $\mathbf{M}^{(i)}$, $i \geq 1$, dépendant de \mathbf{Q}^* . Ecrivons pour cela la contrainte de réalisabilité dimensionnelle sur \mathbf{M} . Le point de départ est :

$$M_{1jpp} = 0 \text{ si } b_{1k} = -\delta_{1k}/3 \text{ en axes principaux de } \mathbf{b}, \forall \mathbf{Q} \text{ tel que } Q_{i1k} = 0, Q_{2j3} = Q_{3j2}, \forall \mathbf{y} \quad (11)$$

Utilisant la décomposition canonique de \mathbf{Q} , nous trouvons que la limite $2C$ impose que :

$$Q_{1ik}^* = -\frac{1}{18}\varepsilon_{1ik} - \frac{1}{3}[\varepsilon_{1ip}y_{pk} - \varepsilon_{1pk}(y_{pi} + b_{pi})] \text{ en axes principaux de } \mathbf{b} \quad (12)$$

Ainsi, deux composantes indépendantes seulement de \mathbf{Q}^* restent arbitraires dans la limite $2C$, $q_2 := Q_{222}$ et $q_3 := Q_{333}$. Les autres composantes indépendantes valent, en axes principaux de \mathbf{b} :

$$Q_{111} = 0, \quad Q_{112}^* = -\frac{1}{3}y_{13}, \quad Q_{113}^* = \frac{1}{3}y_{12}, \quad Q_{122}^* = -\frac{2}{3}y_{23}, \quad Q_{123}^* = -\frac{1}{18} + \frac{1}{3}(y_{11} + 2y_{22} + b_{22}) \quad (13)$$

On vérifie que la réalisabilité dimensionnelle résulte de

$$Q_{1jk}^* [b_1 = -\frac{1}{3}, \mathbf{y}]_{\mathbf{b}} = -Q_{1jk}^* [y_1 = -\frac{1}{3}, \mathbf{b}]_{\mathbf{y}}$$

Chaque coté est pris en axes propres de \mathbf{b} or \mathbf{y} indiqués par la notation $[]_{\mathbf{b}}$ or $[]_{\mathbf{y}}$, respectivement. La décomposition canonique pour $\mathbf{M}_{()}$ donne :

$$M_{ijpq} = M_{ijpq}^* + M_{ijpq}^g \quad \text{avec} \tag{14a}$$

$$M_{ijpq}^g = \frac{1}{2}(\varepsilon_{zpj} Q_{zic}^* - \varepsilon_{zic} Q_{zpj}^*) + M_{ijpq}^{(0)} + \frac{1}{45}(\delta_{ij}\delta_{pq}) + \frac{1}{42}(\delta_{ij}(b_{pq} + y_{pq})) \tag{14b}$$

$$M_{ijpq}^{(0)} = \frac{1}{6}[\frac{1}{3}(2\delta_{pq}\delta_{ij} - \delta_{pj}\delta_{iq} - \delta_{qj}\delta_{ip}) + 3(\delta_{qp}b_{ji} + \delta_{ij}y_{pq}) + (\delta_{qp}y_{ji} + \delta_{ij}b_{pq}) - \delta_{pj}(y_{qi} + b_{qi}) - \delta_{iq}(y_{jp} + b_{jp}) - \delta_{qj}(y_{pi} + b_{pi}) - \delta_{ip}(y_{jq} + b_{jq})] \tag{14c}$$

si bien que la réalisabilité « en composantes » pour \mathbf{M}^* , traduite par

$$M_{1jpp}^* = -M_{1jpp}^g = -M_{1pjq}^g \tag{15}$$

met en jeu les composantes indépendantes de la stropholyse :

$$M_{1111}^g = \frac{2}{105} + \frac{1}{7}y_{11}; \quad M_{1112}^g = \frac{1}{14}y_{12}; \quad M_{1113}^g = \frac{1}{14}y_{13}; \quad M_{1122}^g = \frac{1}{70} - \frac{1}{7}(y_{11} + y_{22} + b_{22});$$

$$M_{1123}^g = -\frac{1}{7}y_{23}; \quad M_{1222}^g = \frac{1}{2}q_3 + \frac{1}{14}y_{12}; \quad M_{1223}^g = \frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{7}y_{13} \tag{16}$$

Les conditions de trace nulle fixent les autres composantes de \mathbf{M}^* devant s'annuler. Il en résulte que si \mathbf{M}^* ne dépend pas de q_2 et q_3 (en repère principal de \mathbf{b}) et donc de \mathbf{Q}^* , la réalisabilité en composantes ne peut être satisfaite. Nous avons donc démontré la nécessité de $M^{(i)}$.

3. La technique de diagrammes et l'absence de fonctionnelle isotrope réalisable

Introduisons maintenant une méthode de diagrammes pour construire les termes $M^{(i)}$. Nous notons tout d'abord les tenseurs $B_{ij} \in \text{Sym}(2)$ par une barre $i \text{ --- } j$, et les tenseurs $B_{ij} \in \text{Lin}(2)$ par une barre orientée $i \rightarrow j$. L'alternateur et la stropholyse symétrisée sont identifiés par les diagrammes ci-dessous :

$$\varepsilon_{ijk} = i \text{ --- } \begin{array}{l} \diagup j \\ \diagdown k \end{array} \quad Q_{ijk}^* = i \text{ --- } \begin{array}{l} \diagup j \\ \diagdown k \end{array} \quad W_i^{(B)} := Q_{ijk}^* B_{jk} = i \text{ --- } \begin{array}{l} \diagup j \\ \diagdown k \end{array} \tag{17}$$

Alors que la representation diagrammatique de $M^{(0)}$ et de M^x est triviale (elle consiste en un ensemble de deux barres), les représentations pour les termes $M^{(i)}$ ne le sont pas. On constate tout d'abord qu'il n'existe pas de diagramme $O(h)$ et qu'il existe un seul diagramme $O(h^2)$ alors qu'il existe cinq diagrammes d'ordre trois (voir Appendice B) et douze diagrammes d'ordre quatre (omis pour des raisons de place) :

$$\langle \varepsilon_{kim} Q_{pqk}^* B_{mj} \rangle \sim \begin{array}{c} p \\ \diagup \\ \text{Q}^* \\ \diagdown \\ q \end{array} \text{ --- } \varepsilon \text{ --- } \begin{array}{c} \text{B} \\ \text{---} \\ j \end{array} \text{ --- } i \tag{18a,b}$$

A partir de chaque diagramme – tel (18b) – et de son générateur associé – tel (18a) –, il est possible d'obtenir la base fonctionnelle définissant chaque contribution $M^{(i)}$. Pour ce faire, le générateur est combiné avec des groupements tensoriels renfermant des δ – voir par exemple les termes $[\dots]$ dans (19) – de façon à obtenir un groupement totalement symétrique dont toutes les traces sont nulles. La dernière étape est de construire à partir de chaque type

convenable, le développement complet. Détaillons à titre d'exemple la procédure sur l'ordre h^2 . La forme adéquate correspondant au générateur (18a) s'écrit :

$$M_{ijpq}^{(1)}[\mathbf{B}] := \langle \varepsilon_{kim} Q_{pqk}^* B_{mj} \rangle - \frac{2}{7} [\varepsilon_{krm} B_{mr} \langle \delta_{ij} Q_{pqk}^* \rangle - B_{mr} \langle \delta_{ij} (\varepsilon_{kpm} Q_{krq}^* + \varepsilon_{kqm} Q_{krp}^*) \rangle] \quad (19)$$

si bien qu'il existe deux termes dans le développement correspondant respectivement à $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{y}$. La même procédure peut être utilisée pour calculer les termes quadratiques en \mathbf{Q}^* . Un seul diagramme existe, il correspond au générateur $\langle q_{ijpq}^{(4)} \rangle$ où l'on a défini :

$$q_{ijpq}^{(4)} := Q_{ijk}^* Q_{pqk}^*; \quad q_{ij}^{(2)} := Q_{imk}^* Q_{jmk}^* - \frac{1}{3} Q^{*2} \delta_{ij}; \quad Q^{*2} := Q_{imk}^* Q_{imk}^*$$

Le seul groupement quadratique en \mathbf{Q}^* s'écrit :

$$M_{ijpq}^{(2)}[\mathbf{Q}^*] := \langle q_{ijpq}^{(4)} \rangle - \frac{2}{7} \langle \delta_{ij} q_{pq}^{(2)} \rangle + \frac{2}{15} \langle \delta_{ij} \delta_{pq} \rangle Q^{*2} \quad (20)$$

Le modèle complet au second ordre, qui dépend de six fonctions scalaires des invariants de \mathbf{b} et de \mathbf{y} , s'écrit alors :

$$\begin{aligned} M_{ijpq} &= C_1^{b(0)} [\langle b_{ij} b_{pq} \rangle - \frac{2}{7} \langle \delta_{ij} b_{pq}^2 \rangle - \frac{4}{35} \Pi \langle \delta_{ij} \delta_{pq} \rangle] + C_1^{b(1)} M_{ijpq}^{(1)}[\mathbf{b}] \\ &+ C_1^{y(0)} [\langle y_{ij} y_{pq} \rangle - \frac{2}{7} \langle \delta_{ij} y_{pq}^2 \rangle - \frac{4}{35} \Pi_y \langle \delta_{ij} \delta_{pq} \rangle] + C_1^{y(1)} M_{ijpq}^{(1)}[\mathbf{y}] \\ &+ C_1^{b(0)} [\langle b_{ij} y_{pq} \rangle - \frac{2}{7} \langle \delta_{ij} (b_{kp} y_{kq} + b_{kq} y_{kp}) \rangle] + \frac{4}{35} \{\mathbf{b}\mathbf{y}\} \langle \delta_{ij} \delta_{pq} \rangle + C_0^Q M_{ijpq}^{(2)}[\mathbf{Q}^*] \end{aligned} \quad (21)$$

A l'ordre h^3 , on trouve 21 termes indépendants résultant des diagrammes donnés dans l'Appendice B (et donc 21 fonctions scalaires des invariants, conjoints ou non) et 142 termes à l'ordre h^4 (certains sont toutefois redondants en raison du théorème de Cayley–Hamilton [3] pour \mathbf{Q}^*). Si nous substituons (12), (13) dans les Éqs. (19)–(21), nous obtenons pour M_{ijpq}^* un polynôme du second degré par rapport aux variables indépendantes $\mathbf{X} := \{b_{22}, y_{11}, y_{22}, y_{12}, y_{13}, y_{23}, q_2, q_3\}$. Pour que la condition (15) soit satisfaite $\forall \mathbf{X}$, les termes quadratiques en \mathbf{X} d'un tel polynôme doivent être tous nuls. A elle-seule, cette contrainte impose ipso-facto que les termes constants ou linéaires par rapport à \mathbf{X} dans M_{ijpq}^* s'annulent tous en axes principaux de \mathbf{b} . Ce résultat, obtenu à l'aide de MAPLE[®], est valable pour les trois fonctionnelles M jusqu'à l'ordre h^4 inclus. A l'ordre h^2 , (21) conduit en particulier à :

$$C_1^{b(0)} = C_1^{b(1)} = C_1^{y(0)} = C_1^{y(1)} = C_1^{b(0)} = C_0^Q = O(\Delta_p) \quad (22)$$

Comme M_{ijpq}^g est linéaire en \mathbf{X} , il s'en suit que la condition (15) ne peut être satisfaite et donc qu'il n'existe pas de fonctionnelle M_{ijpq} , isotrope par rapport à ses arguments, qui soit componentalement réalisable. L'argument reste également valable si l'on exige seulement la condition (moins exigeante) de réalisabilité au sens de Lumley, $M_{11pq}^* = 0$ en axes principaux de \mathbf{b} , dans la limite $b_{11} = -1/3$ (condition nécessaire pour que $db_{11}/dt = 0$).

4. Conclusion

Nous avons établi dans cette Note une méthode systématique d'expansion d'une fonctionnelle isotrope par rapport à plusieurs arguments, au moyen d'une technique diagrammatique. La réalisabilité apparaît concerner deux conditions distinctes, dites «en composantes» et dimensionnelle. Contrairement à ce qu'il est possible de démontrer dans le cas unidépendant, $\mathbf{M} = \mathbf{M}[\mathbf{b}]$, une fonctionnelle multidépendante isotrope de la forme $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}[\mathbf{b}, \mathbf{y}, \mathbf{Q}^*]$ ne peut être réalisable.

Appendice A. Théorème de Cayley–Hamilton

Si l’on applique le théorème de Cayley–Hamilton à $\mathbf{b} + \Lambda \mathbf{y}$ ($\forall \Lambda$), le résultat est un polynome d’ordre trois en Λ qui doit être identiquement nul. Il en résulte la condition :

$$b_{qn}y_{nk}b_{kp} + b_{.iq}^2y_{qk} + b_{.pk}^2y_{kq} = \{\mathbf{by}\}b_{qp} - \text{II}y_{pq} + \{\mathbf{b}^2\mathbf{y}\}\delta_{pq} \tag{A.1}$$

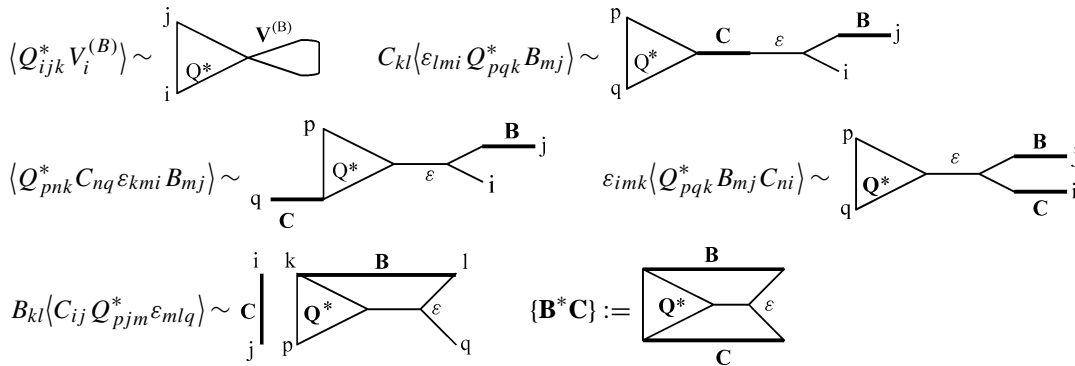
On trouve par prémultiplication de (A.1) par b_{iq} que :

$$b_{.in}^2y_{nk}b_{kp} + b_{iq}y_{qk}b_{.kp}^2 = \{\mathbf{by}\}b_{.ip}^2 + \{\mathbf{b}^2\mathbf{y}\}b_{ip} - \text{III}y_{ip} \tag{A.2}$$

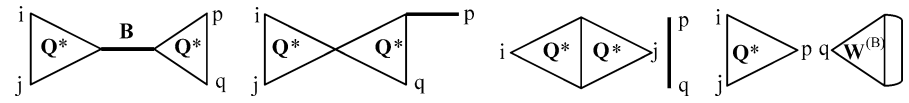
qui montre que l’une des deux extensions du troisième ordre dans (A.2) s’exprime en fonction de l’autre. Les autres relations nécessaires se déduisent de façon analogue de (A.1) en remplaçant \mathbf{b} ou \mathbf{y} par un autre tenseur de trace nulle (par exemple, \mathbf{b} par $\mathbf{b}^2 + 2\text{II}\delta/3$) ou par échange de \mathbf{b} et de \mathbf{y} (et donc de II et de $\text{III} := -\{\mathbf{y}^2\}/2$).

Appendice B. Diagrammes d’ordre trois

Considérons tout d’abord les *termes linéaires en \mathbf{Q}^** . Cinq diagrammes peuvent être formés. Le vecteur $V_i^{(B)} = \varepsilon_{ijk}B_{jk}$, $\mathbf{B} \in \text{Skw}(2)$, remplacé par $W_i^{(B)} = Q_{ijk}^*B_{jk}$, $\mathbf{B} \in \text{Lin}(2)$, fournit un diagramme d’ordre trois quadratique en \mathbf{Q}^* . L’invariant $\{\mathbf{B}^*\mathbf{C}\} := \varepsilon_{ijk}Q_{pqk}^*B_{ip}C_{jq}$ est un invariant conjoint $O(h^3)$, linéaire en stropholyse.



Les termes quadratiques en \mathbf{Q}^* mettent en jeu quatre diagrammes, dont les générateurs sont omis. Le dernier a la même forme que le premier des diagrammes quadratiques.



Il existe un seul diagramme cubique en stropholyse. Il est donné par (18b) avec $\mathbf{B} = \mathbf{q}^{(2)}$.

Références

[1] J.L. Lumley, Computational modeling of turbulent flows, Adv. Appl. Mech. 18 (1978) 123–176.
 [2] S.C. Kassinos, W.C. Reynolds, M.M. Rogers, One-point turbulent structure tensors, J. Fluid Mech. 428 (2001) 213–248.
 [3] J. Piquet, L’équation de la stropholyse, C. R. Mecanique 331 (2003) sous presse.
 [4] G.F. Smith, On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors, Intern. J. Eng. Sci. 9 (1981) 899–914.