



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



C. R. Mecanique 331 (2003) 537–544



# Pont entre les « micro » et « méso » mécaniques des composites stratifiés

Pierre Ladevèze, Gilles Lubineau

*LMT-Cachan (ENS de Cachan/Université Paris 6/CNRS), 61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France*

Reçu le 10 avril 2003 ; accepté le 20 juin 2003

Présenté par André Zaoui

---

## Résumé

Un pont relativement complet est construit entre la vision micromécanique des composites stratifiés pour laquelle il existe de très nombreux travaux tant théoriques qu'expérimentaux et la mésomécanique des composites stratifiés introduite et développée en particulier à Cachan depuis plus de 15 ans. A l'échelle « méso », le pli et l'interface sont homogénéisés. **Pour citer cet article : P. Ladevèze, G. Lubineau, C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Relationships between 'micro' and 'meso' mechanics of laminated composites.** A relatively complete bridge is built between the micromechanics of laminates for which there are numerous theoretical and experimental works and the mesomechanics of laminates introduced and developed in particular at Cachan for more than 15 years. At the 'meso' scale, the ply and the interface are homogenized. **To cite this article: P. Ladevèze, G. Lubineau, C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Endommagement ; Microfissuration ; Stratifiés ; Micromécanique ; Mésomécanique

*Keywords:* Damage; Microcracks; Laminates; Micromechanics; Mesomechanics

---

## Abridged English version

Today, the modeling and simulation of the damage mechanisms until fracture of laminated composite structures under complex loading is still a challenge. Damage refers to the more or less progressive growth of microvoids or microcracks which lead to macrocracks and, finally, to fracture. This Note deals with the modeling problem for which, in previous works we proposed a mesomodel for laminates with continuous fibers [4]. This mesomodel for which microcracks and microdebondings have been homogenized, has been identified on numerous materials for aeronautics and aerospace applications. Micromechanics has also been developed for laminates. There are numerous theoretical and experimental works published in the last twenty years [9,1,2,10]. However, up to present,

---

*Adresses e-mail :* [ladeveze@lmt.ens-cachan.fr](mailto:ladeveze@lmt.ens-cachan.fr) (P. Ladevèze), [lubineau@lmt.ens-cachan.fr](mailto:lubineau@lmt.ens-cachan.fr) (G. Lubineau).

1631-0721/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

doi:10.1016/S1631-0721(03)00130-X

micromechanics for laminates has been far from being complete for final fracture and localization prediction. The objective of this Note is to build a rather general bridge between the micromechanics and the mesomechanics of laminates.

The main concept on which this damage mesomodel is based is the use of an intermediary scale related to the scale of the laminate. On this intermediary scale, which we call *mesoscale*, the material is described by means of two basic mesoconstituents: the single layer and the interface. Damage mechanics and qualitative microanalysis are used to describe the degradation of the mesoconstituents. Mesodamage indicators are linked to the stiffness variation of the mesoconstituents. Aside from fiber breakage, the damage mechanisms taken into consideration are matrix microcracking, fiber/matrix debonding and delamination. The interface is a surface entity which depends of the relative orientations of the adjacent plies; it transfers displacements and normal stresses from one ply to another. ( $0^\circ/0^\circ$ ) interfaces are not considered as interfaces in our sense. Preliminary identifications of each mesoconstituent were done in previous works ([5,13] for the single layer; [11] for the interface).

Another important point is that the state of damage is assumed to be uniform within the thickness of each mesoconstituent [12]. The state of damage is described as constant throughout the thickness of the single layer; of course, the state of damage can vary from one layer to the next in the laminate. Thus, by using models of these two mesoconstituents, it is possible to reproduce the behavior of any laminate for any loading. To get a consistent model, damage models with delay effects combined with dynamic analysis are used [12].

The idea that a complete bridge between ‘micro’ and ‘meso’ mechanics of laminates should exist is not shared by people working in micromechanics even if some partial results have been obtained. A first attempt to build such a bridge was made recently [6,8] for plane macrostresses dealing with transverse microcracking mechanism with or without ‘diffuse’ delamination microcracks which originate at the tips of the transverse cracks and the fiber/matrix debonding mechanism. The mesomodel was found to be fully compatible with these damage micromechanisms. Micro-meso relations have also been derived; they introduce quantities or relations which we call ‘approximately ply-material’, which are intrinsically related to the cracked ply’s characteristics and, therefore, independent of the characteristics of the other plies. The bridge is defined by a 2D elasticity problem for a particular stacking sequences. The proof is based on numerous simulations of different possible stacking sequences, thicknesses,.... This Note goes further, introducing the basis of a complete bridge considering stresses which are not plane. The investigation method stays the same: numerous numerical experiments involving possible stacking sequence, thicknesses,.... are performed. It is shown that the microdamage inside the layers and the interfaces can be homogenized; relations between the ‘micro’ and ‘meso’ quantities are derived. Such a complete link between the mesomechanics and micromechanics of laminates lies on the solving of two basic problems. One is the extension to non-plane stresses of the previously introduced 2D problem for a particular stacking sequence. A new problem defining the homogenized interface has to be introduced. It is a 3D problem with periodic conditions which can be approximated by two 2D problems. Several meso quantities can be easily interpreted in term of the exact 3D solution; the plane part of the meso strain is a mean value and it is the same for the the out-of-plane part of the stress. It is worth noting that the micro-meso relations have been validated for problems with delamination macro cracks. In particular, they give an answer to a present open question which is how to model the coupling between transverse microcracking in the plies and the damage at the interfaces.

## 1. Les mécanismes de dégradation à l’échelle micro

Le scénario 1 associé à la microfissuration transverse est caractérisé par  $1/\rho$  qui est la densité de microfissures [1,2]. Le scénario 2 met en jeu des délaminages en pointes de fissures paramétrés par  $\tau^+$  et  $\tau^-$ . Ce scénario, et le scénario 4, peuvent conduire, par coalescence sous l’effet des contraintes hors-plan induites par un accident de géométrie (trou ou bord par exemple) à un délaminage interlaminaire macroscopique. De la même façon, le scénario 1, toujours par localisation, peut conduire à une macrofissure transverse. Ces phénomènes de localisation/rupture n’entrent pas dans le cadre de cette étude.

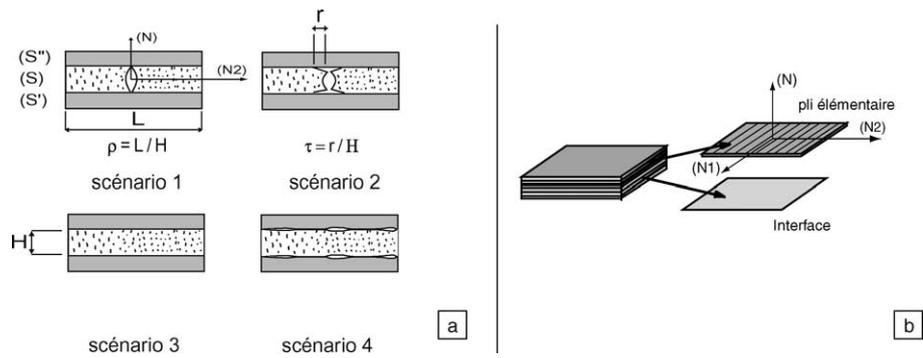


Fig. 1. (a) Les mécanismes de dégradation à l'échelle micro ; (b) Modélisation d'un stratifié à l'échelle méso.

Fig. 1. (a) The mechanisms of degradation on the microscale; (b) the laminated composite on the mesoscale.

Le scénario 3 qui n'est usuellement pas introduit au niveau micro est naturellement homogénéisé à l'échelle « méso » [3]; il s'interprète comme une dégradation des interfaces fibres-matrice au sein du pli. Quant au scénario 4, représentant une dégradation diffuse de l'interface, il peut lui-aussi être considéré comme homogénéisé à l'échelle méso.

Toutes les grandeurs relatives aux scénarios « diffus » (3 et 4) (endommagements, modules endommagés, etc.) seront affectées de la notation ( $\tilde{\cdot}$ ). La notation ( $\dot{\cdot}$ ) sera associée aux scénarios 1 et 2. Les grandeurs associées au matériau sain seront notées ( $^{\circ}$ ).

L'enchaînement des mécanismes est le suivant. Ce sont les scénarios 3 et 4 qui interviennent en premier. Suite à un phénomène de percolation, le scénario 1 s'installe. Il y a alors compétition dans le cadre du scénario 2 entre la microfissuration transverse et le microdélaminage en pointe des microfissures. Dès que ce dernier prend le pas, il y a saturation du nombre de fissures et une évolution catastrophique du délaminage.

**Remarque 1.** Les déformations anélastiques sont dues à la matrice et au scénario 3. Ici, nous les considérons comme décrites correctement à l'échelle méso [4,5]. Des travaux en cours concernent leur description à une échelle plus fine.

## 2. Le mésomodèle d'endommagement des stratifiés

La première hypothèse majeure est que le comportement d'une structure stratifiée quelconque peut être reconstruit à partir de deux constituants élémentaires, la couche élémentaire et l'interface, considérés comme des milieux continus homogénéisés. Cette échelle dite « méso » est caractérisée par l'épaisseur du pli. Le modèle du pli décrit les mécanismes d'endommagement et les déformations inélastiques. Quant à l'interface, c'est une entité surfacique qui assure le transfert des déplacements et des contraintes entre les plis adjacents. A priori, les interfaces  $0^{\circ}/0^{\circ}$  ne sont pas introduits. Une seconde hypothèse tout aussi importante est que l'état d'endommagement est imposé uniforme dans l'épaisseur du pli (mais pas dans l'épaisseur du stratifié). En conséquence, les macrofissures que nous pouvons décrire sont soit traversantes pour le pli élémentaire soit des fissures de délaminage (et bien sur leur combinaison). Remarquons également que les variables internes décrivant l'endommagement s'interprètent comme des variations de rigidité.

Nous nous plaçons dans le cadre classique de la mécanique des milieux continus où une structure est décrite comme l'assemblage de sous-structures (les couches) reliées entre elles par des interfaces.

Le modèle de l'interface  $j$  est basé sur trois variables d'endommagement d'interface ( $d_I, d_{II}, d_{III}$ )( $j$ ) ; les forces d'endommagement associées sont :

$$Y_I(j) = \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{2k_I^0(j)(1-d_I(j))^2}, \quad Y_{II}(j) = \frac{\sigma_{13}^2}{2k_{II}^0(j)(1-d_{II}(j))^2}, \quad Y_{III}(j) = \frac{\sigma_{23}^2}{2k_{III}^0(j)(1-d_{III}(j))^2} \quad (1)$$

Soit  $\underline{N}_1$  la direction des fibres de la couche considérée,  $\underline{N}_2$  la direction transverse et  $\underline{N}$  la direction orthogonale au plan ( $\underline{N}_1, \underline{N}_2$ ). La densité d'énergie de déformation de la couche ( $i$ ) ( $i \in [1, \dots, n]$ ) est, dans le cas d'un chargement de contraintes « macro » planes :

$$e_{cp}(i, \pi \varepsilon \pi) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_{11}^2}{E_1^0} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} \frac{1}{1-d'} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_-^2}{E_2^0} + \sigma_{11} \sigma_{22} \left( \frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} + \frac{\nu_{21}^0}{E_2^0} \right) + \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0} \frac{1}{1-d} \right] \quad (2)$$

où  $d'$  et  $d$  sont les variables d'endommagement (à noter que, écrites sous cette forme, les variables d'endommagement  $d'$  et  $d$  renferment à la fois l'endommagement du au scénario 3, et celles associées aux scénarios 1 et 2). La variable principale est  $\pi \varepsilon \pi$ . La relation entre la partie plane de la déformation et la contrainte « macro » est, pour ( $\sigma_{22} \geq 0$ ) :

$$\pi \varepsilon \pi = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^0} & -\frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}^0}{E_2^0} & \frac{1}{E_2^0(1-d')} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}^0(1-d)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\nu_{13}^0}{E_1^0} \\ -\frac{\nu_{23}^0}{E_2^0} \\ 0 \end{bmatrix} [\sigma_{33}] \quad (3)$$

où  $\pi$  est la projection sur le plan ( $\underline{N}_1, \underline{N}_2$ ). Pour ( $\sigma_{22} \leq 0$ ), la relation précédente est à prendre pour ( $\tilde{d}, \tilde{d}' = (0, 0)$ ).

La partie de l'énergie due aux contraintes hors-plan n'a jusqu'ici été décrite que de façon grossière ; aussi nous posons ici l'écriture de la densité d'énergie de déformation suivante :

$$e(i, \pi \varepsilon \pi, \sigma \underline{N}) = e_{cp}(i, \pi \varepsilon \pi) + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{2E_3(1-d_3)} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_-^2}{2E_3} + \frac{\sigma_{23}^2}{2G_{23}(1-d_{23})} + \frac{\sigma_{13}^2}{2G_{13}(1-d_{13})} \quad (4)$$

où  $d_3, d_{23}$  et  $d_{13}$  traduisent des variations de rigidité qui seront définies en fonction des indicateurs d'endommagement.  $\pi \varepsilon \pi$  et  $\sigma \underline{N}$  sont des quantités méso à définir.

### 3. Le modèle micro de référence

Tous les scénarios sont présents. Les scénarios 3 et 4 sont naturellement homogénéisés ; ils sont donc à la fois « micro » et « meso ». Pour le pli, il est supposé un comportement isotrope transverse d'axe  $\underline{N}_1$  défini par les indicateurs d'endommagement  $\tilde{d}, \tilde{d}'$  et  $\tilde{d}_{23}$  ( $\tilde{d}_3 = \tilde{d}', \tilde{d}_{13} = \tilde{d}$ ).

Pour l'interface  $j$  ( $j \in [1, \dots, n+1]$ ), la densité d'énergie prise en compte est :

$$e_{\text{interface}(j)}(\sigma \underline{N}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_I^0(1-\tilde{d}_I)} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_-^2}{k_I^0} + \frac{\sigma_{13}^2}{k_{II}^0(1-\tilde{d}_{II})} + \frac{\sigma_{23}^2}{k_{III}^0(1-\tilde{d}_{III})} \right] \quad (5)$$

En pratique, on prend souvent  $k_{II}^0 = k_{III}^0$  et  $\tilde{d}_{II} = \tilde{d}_{III}$ .

Se rajoutent aux scénarios 3 et 4, des microfissures avec ou sans délaminage. L'hypothèse centrale et légitime dans la plupart des situations pratiques est de supposer que la densité de microfissuration  $\rho(i)$  dans la couche ( $i$ ) est représentable par une fonction du point courant de la surface de référence  $\Sigma_m$ . Nous supposons qu'il en est de même de  $\tau(j)$  ( $j \in [1, \dots, n+1]$ ). Il s'agit là d'une première homogénéisation. Il s'en suit que les dégradations du stratifié associées à ces nouveaux endommagements sont définies par :

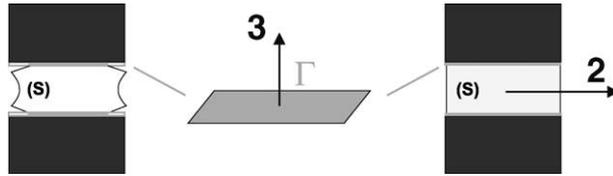


Fig. 2. Lien micro-méso dans le cadre général : moyennes sur l'interfaces interlaminaire.

Fig. 2. The micro-meso links in the general case: averages on the interlaminar interfaces.

pour la couche  $i$ :  $(\rho(i), \tau^+, \tau'^+, \tau^-, \tau'^-)$  ( $i \in [1, \dots, n]$ ) où  $(\tau^+, \tau'^+)$  et  $(\tau^-, \tau'^-)$  sont les délaminages existant dans les interfaces respectivement supérieure et inférieure à la couche  $(i)$ .

pour l'interface  $j$ :  $((\tau'H', \rho')(j), (\tau H, \rho)(j))$  ( $j \in [1, \dots, n + 1]$ ), où  $(\tau'H', \rho')$  et  $(\tau H, \rho)$  représentent les quantités attachées respectivement aux couches adjacentes supérieure et inférieure de l'interface.

Une autre hypothèse également légitime est de supposer que localement les distributions des microfissures dans les plis et les interfaces sont périodiques.

Le problème « micro » de référence est alors complètement défini; il décrit le comportement élastique d'une structure microfissurée, l'état de la dégradation étant figé. Ce problème se décline en deux volets. Le premier est de calculer pour la structure composite considérée soumise aux charges données, la solution du problème dans la situation où seuls les endommagements dus aux scénarios 3 et 4 ont été introduits. Le second est associé à l'introduction des scénarios 1 et 2 qui induisent des discontinuités et donc des résidus mettant en jeu  $\tilde{\sigma}(j)\underline{N}$  à l'interface  $(j)$  et  $\tilde{\sigma}(i)\underline{N}_2$  dans le pli  $(i)$ , résidus qui sont supposés avoir une répartition périodique. Le rééquilibrage élastique de ces résidus constitue donc le second et central volet du problème « micro » de référence.

#### 4. Le passage micro-méso

La résolution du second volet du problème « micro » de référence est faite de façon approchée. En fait, elle passe par la résolution de deux problèmes de base représentatifs de l'ensemble des situations rencontrées. Le premier est associé à la couche et le second à l'interface; leur solution est notée  $(\bar{U}, \bar{\sigma})$ . Le principe suivi dans le passage micro-méso est d'effectuer l'équivalence en énergie. Il est montré, et c'est un point majeur, que les quantités « méso » s'interprètent comme des moyennes des quantités « micro » solutions du problème « micro » de référence :

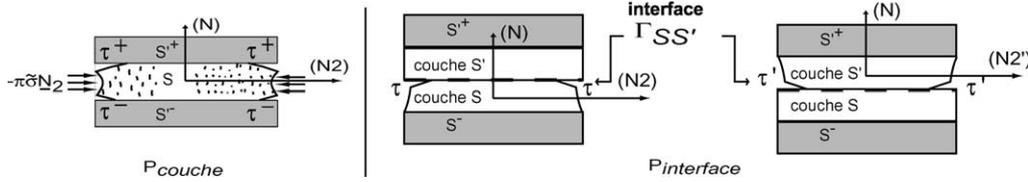
$$\begin{aligned} \pi \varepsilon \pi |_{\Gamma} &= \langle \pi (\tilde{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}) \pi \rangle |_{\Gamma} \\ \sigma \underline{N} &= \langle (\tilde{\sigma} + \bar{\sigma}) \underline{N} \rangle |_{\Gamma} \end{aligned} \tag{6}$$

où  $\Gamma$  est l'interface entre  $(S)$  et le pli adjacent (Fig. 2).

##### 4.1. Le problème de base ( $P_{\text{couche}}$ )

Ce problème de base est associé à la couche (Fig. 3(a)). La couche étudiée  $S$  est supposée située entre deux couches homogénéisées. Les paramètres sont la densité normalisée  $(1/\rho)$  et les paramètres de délaminage  $\tau^+$  et  $\tau^-$ . Des conditions de périodicité suivant 2 de la cellule fissurée sont mises sur les bord  $S'^+$  et  $S'^-$ . Le résidu appliqué sur les fissures traversantes est  $\pi \tilde{\sigma} \underline{N}_2$  à droite et  $-\pi \tilde{\sigma} \underline{N}_2$  à gauche. En effectuant des essais « numériques » sur une grande variété de séquences avec des épaisseurs différentes, nous avons montré dans [6], et c'est un point majeur, que l'énergie de la cellule était avec une excellente approximation, localisée dans la couche fissurée  $S$  et que la variation d'énergie de la couche  $S$  s'écrit :

$$-2\Delta e_{\text{couche}} = \frac{\bar{d}'}{E_2} \tilde{\sigma}_{22}^2 + \frac{\bar{d}}{G_{12}} \tilde{\sigma}_{12}^2 \tag{7}$$

Fig. 3. (a) Problème de base ( $P_{couche}$ ); (b) problème de base ( $P_{interface}$ ).Fig. 3. (a) Basic problem ( $P_{couche}$ ); (b) basic problem ( $P_{interface}$ ).

où  $\bar{d}$  et  $\bar{d}'$  sont les variables d'endommagement « méso », associées aux scénarios 1 et 2.  $\bar{d}$  et  $\bar{d}'$  sont des fonctions intrinsèques à la couche des variables « micro »  $\rho$ ,  $\tau^+$ ,  $\tau^-$ . Les caractéristiques élastiques surmontées de la notation ( $\bar{\cdot}$ ) indiquent que le matériau est éventuellement endommagé de manière homogène par le scénario 3.

**Remarque 2.** Les couches supérieures et inférieures nécessitent un traitement particulier [7]; grosso-modo, elles se comportent sur le plan de l'endommagement comme des demi-couches.

**Remarque 3.** En pratique, les fonctions  $\bar{d}'$ ,  $\bar{d}$  de  $\rho$ ,  $\tau^+$ ,  $\tau^-$  peuvent être calculées sur une séquence particulière.

Pour la partie hors plan, on considère ici les résidus associés à  $\tilde{\sigma}_{23}$  et ceux uniquement sur la partie délaminée relatifs à  $\tilde{\sigma}_{13}$  et  $\tilde{\sigma}_{33}$ . Numériquement, on montre que la variation de la densité d'énergie de la couche peut être approximée par :

$$2\Delta e_{couche} = \frac{\bar{d}_3}{\tilde{E}_3} \tilde{\sigma}_{33}^2 + \frac{\bar{d}_{13}}{\tilde{G}_{13}} \tilde{\sigma}_{13}^2 + \frac{\bar{d}_{23}}{\tilde{G}_{23}} \tilde{\sigma}_{23}^2 \quad (8)$$

où  $\bar{d}_3$ ,  $\bar{d}_{13}$ ,  $\bar{d}_{23}$  sont des fonctions de  $\rho$ ,  $\tau^+$  et  $\tau^-$  intrinsèques à la couche.

#### 4.2. Le problème de base ( $P_{interface}$ )

Le problème de base associé à l'interface est défini par la Fig. 3(b).  $\underline{N}_1$  et  $\underline{N}'_1$  désignent les directions des fibres des plis adjacents.

La cellule est 3D avec conditions de périodicité.  $S'^+$  et  $S^-$  sont supposées être homogénéisées. Les paramètres qui décrivent l'interface sont  $(\rho, \tau)$  et  $(\rho', \tau')$ , densités de défauts issus des couches adjacentes. Les résidus à l'interface sont définis à partir de  $\tilde{\sigma} \underline{N}$ . Là aussi, des « essais » numériques sur une grande variété de séquences avec des épaisseurs différentes ont été effectués. Numériquement, on montre avec une très bonne approximation que la variation d'énergie est localisée sur l'interface  $\Gamma_{SS'}$  et sur  $S'$  et  $S$ . Précisément, on obtient que :

$$2\Delta e_{interface} = \frac{\bar{d}_{33}}{\tilde{k}_I} \tilde{\sigma}_{33}^2 + (\pi \tilde{\sigma} \underline{N}_3)^t \cdot \mathbf{D} (\pi \tilde{\sigma} \underline{N}_3) \quad (9)$$

où  $\bar{d}_{33}$  et  $\mathbf{D}$  se calculent en fonction de  $(\rho, \tau)$  et  $(\rho', \tau')$ . Une bonne approximation est obtenue en séparant les contributions associées au problème en déformation plane ( $P'_{interface}$ ). Ce problème est défini à partir du problème ( $P_{couche}$ ) où on prend  $\tau^- = 0$  et on place les résidus  $\tilde{\sigma} \underline{N}_3$  sur la partie délaminée. Pour ce problème la variation de densité d'énergie de l'interface vaut :

$$2\Delta e_{interface} = \frac{\bar{D}_{33}}{\tilde{k}_I} \tilde{\sigma}_{33}^2 + \frac{\bar{D}_{13}}{\tilde{k}_{II}} \tilde{\sigma}_{13}^2 + \frac{\bar{D}_{23}}{\tilde{k}_{III}} \tilde{\sigma}_{23}^2 \quad (10)$$

où  $\bar{D}_{33}$ ,  $\bar{D}_{13}$ ,  $\bar{D}_{23}$  sont des fonctions de  $\tau$  et  $\rho$ .

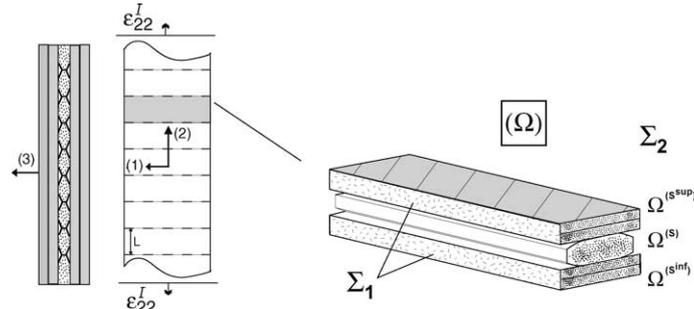


Fig. 4. Réseau de microfissuration-délaminage diffus débouchant sur un bord libre.

Fig. 4. Microcracking and diffuse delamination with free edge.

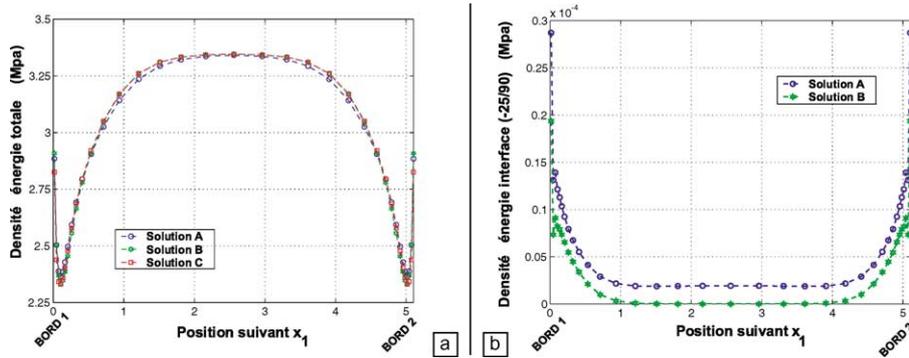


Fig. 5. (a) Densité d'énergie hors-plan dans le pli endommagé; (b) densité d'énergie dans l'interface  $(-25/90)$ . Solution A : calcul micro exact ; Solution B : calcul méso ; Solution C : solution micro reconstruite à partir de la solution B.

Fig. 5. (a) Out-of-the-plane energy density in the damaged ply; (b) energy density in the interface  $(-25/90)$ .

En revenant au problème  $(P_{interface})$ , il apparaît que la variation relative de l'interface s'écrit :

$$\left(\frac{\bar{D}_{33}}{\tilde{k}_I} + \frac{\bar{D}'_{33}}{\tilde{k}'_I}\right)\tilde{\sigma}_{33}^2 + \left(\frac{\bar{D}_{13}}{\tilde{k}_{II}} + \frac{\bar{D}'_{13}}{\tilde{k}'_{II}}\right)\tilde{\sigma}_{13}^2 + \left(\frac{\bar{D}_{23}}{\tilde{k}_{III}} + \frac{\bar{D}'_{23}}{\tilde{k}'_{III}}\right)\tilde{\sigma}_{23}^2 \quad (11)$$

où  $(\bar{D}_{33}, \bar{D}_{13}, \bar{D}_{23})$  dépendent de  $(\tau, \rho)$  et  $(\bar{D}'_{33}, \bar{D}'_{13}, \bar{D}'_{23})$  de  $(\tau', \rho')$ . Les relations sous-jacentes sont approximativement intrinsèques ; elles seront détaillées dans un article à venir.

**Remarque 4.** Une simplification importante supplémentaire est associée à l'apparition du mécanisme de délaminage en pointe des fissures traversantes. S'il est activé, il est brutal et l'interface peut être considéré comme quasiment détruit [8].

**Remarque 5.** La prise en compte de la fermeture et de l'ouverture des microfissures est faite comme classiquement à partir des contraintes « méso ».

## 5. Validité du modèle dans des zones avec effet de bord

Les propriétés de localisation des variations d'énergie, montrées numériquement, justifient la démarche qui s'appuie uniquement sur les deux problèmes de base pour représenter l'ensemble des situations rencontrées. Bien sûr, de nombreuses vérifications directes ont été faites comme celle ci-après qui met en jeu des effets de bord.

Considérons le problème décrit par la Fig. 4, où un stratifié présentant un réseau de microfissuration et de délaminage diffus est soumis à une déformation macro  $\varepsilon_{22}^I$  dans la direction longitudinale (2), le bord de normale (1) étant libre.

Les résultats ci-après (pour l'exemple, le stratifié est un  $[25/-25/90_2/-25/25]$  affecté par ( $\frac{1}{\rho} = 0.5$ ;  $\tau = 0.5$ )) montrent qu'au niveau des énergies dans les couches et interfaces le modèle « méso » fonctionne bien. De plus, les valeurs exactes et les valeurs calculées par le modèle méso du taux de restitution d'énergie sont très proches.

## 6. Conclusion

Cette Note jette les bases d'un pont relativement complet entre micromécanique et mésomécanique des stratifiés. Des améliorations conséquentes des mésomodèles initialement introduits, quant aux contributions des contraintes hors-plan, en résultent. Son exploitation devrait conduire à une description des lois d'évolution de l'état d'endommagement bâtie à partir des caractéristiques des constituants de base que sont la fibre, la matrice et les interfaces.

## Références

- [1] J.A. Nairn, The strain energy release rate of composite microcracking: a variational approach, *J. Composite Mater.* 23 (1989) 1106–1129.
- [2] Z. Hashin, Analysis of cracked laminates: a variational approach, *Mech. Mater.* 4 (1985) 121–136.
- [3] F. Lagattu, M. Lafarie-Frénot, Variation of PEEK matrix crystallinity in APC-2 composite subjected to large shearing deformation, *Composites Sci. Technol.* 60 (2000) 605–612.
- [4] P. Ladevèze, Sur la mécanique de l'endommagement des composites, in: C. Bathias, D. Menkès (Eds.), *Comptes-rendus des JNC5*, Pluralis Publication, 1986, pp. 667–683.
- [5] P. Ladevèze, E. Le Dantec, Damage modeling of the elementary ply for laminated composites, *Composites Sci. Technol.* 43 (3) (1992) 257–267.
- [6] P. Ladevèze, G. Lubineau, On a damage mesomodel for laminates: micro-meso relationships, possibilities and limits, *Composites Sci. Technol.* 61 (15) (2001) 2149–2158.
- [7] P. Ladevèze, G. Lubineau, On a damage mesomodel for laminates: micromechanics basis and improvement, *Mech. Mater.* 35 (2003) 763–775.
- [8] P. Ladevèze, G. Lubineau, An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics, *Composites Sci. Technol.* 62 (2002) 533–541.
- [9] J.M. Berthelot, J.F. Le Corre, A model for transverse cracking and delamination in cross-ply laminates, *Composites Sci. Technol.* 60 (2000) 1055–1066.
- [10] L.N. McCartney, G.A. Schoeppner, W. Becker, Comparison of models for transverse ply cracks in composite laminates, *Composites Sci. Technol.* 60 (2000) 2347–2369.
- [11] O. Allix, P. Ladevèze, Interlaminar interface modelling for the prediction of laminate delamination, *Composite Struct.* 22 (1992) 235–242.
- [12] P. Ladevèze, About a damage mechanics approach, in: D. Baptiste (Ed.), *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composite and Multimaterials*, MEP, 1989, pp. 119–142.
- [13] P. Ladevèze, O. Allix, J.F. Deu, D. Lévêque, A mesomodel for localisation and damage computation in laminates, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 183 (2000) 105–122.