



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



C. R. Mecanique 331 (2003) 557–562



# Analytical model for thermal resistance due to multiple moving circular contacts on a coated body

Abderrahmane Baïri

LEEE, EA 387, Université Paris X, IUT Ville d'Avray, département GTE, 1, chemin Desvallières, 92410 Ville d'Avray, France

Received 27 May 2003; accepted 1 July 2003

Presented by Évariste Sanchez-Palencia

---

## Abstract

The heat transfer at the interface of two solids in sliding/rolling contact depends on the constriction phenomenon which occurs at the vicinity of asperities. In order to study this problem, the micro-contacts are represented by multiple moving circular heat sources on the surface of a body. The studied body is constituted of a substrate and a surface coating. The thermal constriction resistance due to those contacts is determined analytically in this paper. The solution is developed by using the integral Fourier transforms, and it is valid regardless of the velocity and the relative contact size values. *To cite this article: A. Baïri, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Published by Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

## Résumé

**Modèle analytique pour la résistance thermique due à des contacts circulaires mobiles multiples à la surface d'un solide revêtu.** Le transfert de chaleur à l'interface de deux solides en contact glissant/roulant dépend des phénomènes de constriction qui ont lieu au voisinage des aspérités. Pour étudier ce problème, les micro-contacts sont représentés par de multiples sources de chaleur circulaires mobiles à la surface du solide. Celui-ci est constitué d'un substrat et d'un revêtement. La résistance thermique de constriction due à ces contacts est déterminée analytiquement dans cet article. La solution est développée à partir des transformées intégrales de Fourier. Elle est valable quelles que soient la vitesse et la taille relative du contact. *Pour citer cet article : A. Baïri, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Published by Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

**Keywords:** Heat transfer; Thermal constriction resistance; Thermal contact resistance; Heat conduction; Circular heat sources; Coating; Interface; Film

**Mots-clés :** Transferts thermiques ; Résistance thermique de constriction ; Résistance thermique de contact ; Conduction de la chaleur ; Sources de chaleur circulaires ; Revêtement ; Interface ; Film

---

## Version française abrégée

Le transfert de chaleur à travers l'interface de deux solides en glissement/roulement est un phénomène important dans les systèmes de friction tels que la transmission de puissance par engrenages, le freinage, l'usinage, etc. Etant

---

*E-mail address:* [dahmane.baïri@cva.u-paris10.fr](mailto:dahmane.baïri@cva.u-paris10.fr) (A. Baïri).

1631-0721/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Published by Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

doi:10.1016/S1631-0721(03)00132-3

données les irrégularités et l'usure des surface frottantes, ce type de contact est thermiquement imparfait. Pour tenir compte de ce caractère imparfait du contact, Bardon [1] a introduit deux paramètres macroscopiques dans le couplage thermique entre les solides en situation de frottement sec. Les valeurs de ces paramètres sont étroitement liées à celles des résistances thermiques de constriction  $R_{cs}$ . De nombreux modèles ont été développés dans la littérature pour calculer la  $R_{cs}$  dans la configuration des contacts mobiles [2,3]. La théorie des sources mobiles [4,5] est souvent utilisée pour déterminer la distribution des températures dans les solides soumises à une source de chaleur mobile. Souvent les sources de chaleurs sont supposées de forme de bande ou rectangulaire [2–7]. Les sources circulaires mobiles ont fait l'objet de peu d'études. Archard [8] a proposé une modélisation adaptée uniquement au cas asymptotique de grande valeur du nombre de Peclet (grande vitesse) pour un contact circulaire unique. Tian et Kennedy [9] ont proposé une corrélation qui couvre toute la gamme de valeurs du nombre de Peclet. Plus récemment, Laraqi [10] a développé une solution analytique exacte pour ce problème.

Nous proposons dans cet article une solution analytique explicite exacte adaptée à des contacts circulaires multiples (ces contacts peuvent également être elliptiques), de rayon  $a$ , disposés selon un réseau carré ( $2L \times 2L$ ) à la surface d'un milieu semi-infini, revêtu d'un film de matériau différent (épaisseur  $d$ ) et mobile à une vitesse constante  $V$  par rapport aux sources (Fig. 1). Cette solution permet de calculer la distribution tridimensionnelle de la température et la  $R_{cs}$ . Elle peut être également généralisée à des contacts elliptiques tels que ceux rencontrés dans les engrenages, les galets ou les roulements à billes.

Après avoir choisi une cellule unique qui vérifie les conditions de périodicité suivant  $x$  et de symétrie suivant  $y$ , nous écrivons les équations qui gouvernent les transferts de chaleur dans le solide et son revêtement (voir Éqs. (1)–(5)). On applique ensuite à ces équations les transformées intégrales de Fourier, données par (6) et (7). L'une des difficultés des calculs réside dans l'application de ces transformées intégrales à l'aire de contact ( $z = 0$ ,  $r \leq a$ ) pour laquelle les bornes d'intégration sont inter-dépendantes. Les détails de ces calculs sont donnés dans le texte (calcul de  $\tilde{q}$ ). Le système, ainsi transformé, se réduit à la résolution d'une simple équation différentielle de second ordre (Éqs. (8) et (9)). En appliquant enfin les transformées inverses correspondantes (Éqs. (13) et (14)) on déduit une expression explicite de la distribution tridimensionnelle  $T_j(x, y, z)$  de la température dans le substrat ( $j \equiv 2$ ) et le revêtement ( $j \equiv 1$ ).

De l'expression de la température (14), on déduit celle de la  $R_{cs}$  (16) par intégration de la température surfacique sur l'aire de contact.

Lorsqu'il s'agit d'un contact unique, on prendra  $a/L$  petit (typiquement 0,01) en prévoyant environ 800 termes pour les séries. Par ailleurs, si on considère un milieu homogène statique ( $V = 0$ ) l'expression de  $R_{cs}$  devient très simple (car  $\beta$  devient réel) et on retrouve la relation établie dans [12,13] pour cette configuration particulière.

## 1. Introduction

Heat transfer through the interface between two sliding/rolling solids is an important phenomenon in frictional systems (e.g., power transmission by gears, braking systems, cutting,...). Taking into account of surface defects and wear, this type of contact is imperfect. In order to describe the heat transfer at the interface between two solids in dry friction, two macroscopic thermal contact parameters have been introduced by Bardon [1]. These parameters are closely dependent on the thermal constriction resistance  $R_{cs}$ . Some analytical models have been developed in the literature [2,3] in order to calculate  $R_{cs}$  as a function of the velocity (or Peclet number) and the relative contact size (for the multiple contacts case). The temperature distribution is usually calculated by using the moving heat sources theory. The most studied contact have a strip or rectangular shape [2–7]. The moving circular contact has studied by Archard [8] for the asymptotic case with a large Peclet number. Tian and Kennedy [9] have proposed an accuracy correlation for all values of Peclet number. More recently, Laraqi [10] has developed an exact analytical solution for the moving circular contact.

In this paper, multiple circular contacts are considered. The developed formalism can be used for elliptic contacts (as in gears or ball bearing contacts). An exact solution is developed in order to calculate the three-dimensional temperature and the thermal constriction resistance as a function of geometrical and physical parameters.

### 2. Problem description

Consider a semi-infinite body (Fig. 1) constituted of a substrate (2) and a coating (1), with  $d$  thickness. The contact with another body is simulated by multiple circular heat sources, with radius  $a$  and uniform heat flux  $q$ . The sources are assumed identical and regularly distributed over the contact plane, following a square network, with  $2L$  width. The body is moving at a constant velocity  $V$  with respect to heat sources referential. Taking into account of these assumptions, the calculation can be limited to an elementary cell ( $2L \times 2L$ ) with a periodicity condition with respect to  $x$ -direction, and a symmetry condition with respect to  $y$ -direction. The reference temperature is zero, and the materials properties are independent of the temperature.

### 3. Problem formulation

According to the notations referred in Fig. 1(b), and by denoting  $\lambda$  and  $\alpha$  the thermal conductivity and the thermal diffusivity respectively, the governing equations of the steady state heat transfer in the body can be written as follows

– Equation of heat

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} - \frac{V}{\alpha_j} \frac{\partial T_j}{\partial x} = 0 \quad (j \equiv 1, 2) \tag{1}$$

– Periodicity conditions with respect to  $x$ -direction

$$(T_j)_{x=-L} = (T_j)_{x=L}, \quad \left(\frac{\partial T_j}{\partial x}\right)_{x=-L} = \left(\frac{\partial T_j}{\partial x}\right)_{x=L} \tag{2}$$

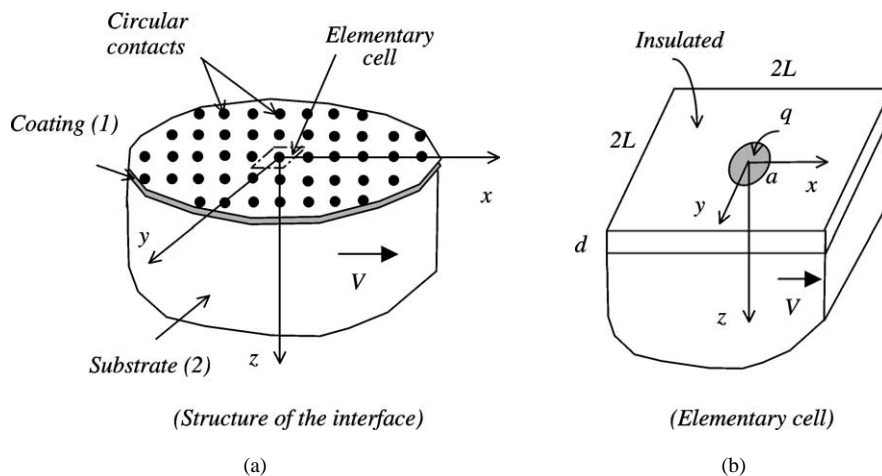


Fig. 1. Moving coated body with multiple circular contacts.  
 Fig. 1. Solide revêtu mobile avec des contacts circulaires multiples.

– Symmetry conditions with respect to  $y$ -direction

$$\left(\frac{\partial T_j}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial T_j}{\partial y}\right)_{y=L} = 0 \quad (3)$$

– Boundary conditions with respect to  $z$ -direction

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)_{z=0} = \begin{cases} q & (r \leq a), \\ 0 & (r > a), \end{cases} \quad (T_2)_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (4)$$

– Interface between coating and substrate

$$(T_1)_{z=d} = (T_2)_{z=d}, \quad \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)_{z=d} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial z}\right)_{z=d} \quad (5)$$

#### 4. The solution

In order to solve this problem, we apply the two following integral Fourier transforms

$$\tilde{T}_j = \frac{\varepsilon_m}{2L} \int_{-L}^L T_j \exp\left(-\frac{im\pi x}{L}\right) dx \quad (\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_{m \neq 0} = 2) \quad (6)$$

with respect to  $x$ -direction, and

$$\tilde{\tilde{T}}_j = \frac{1}{L} \int_0^L \tilde{T}_j \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \quad (7)$$

with respect to  $y$ -direction.

The transformed equations become

$$\frac{d^2 \tilde{\tilde{T}}_j}{dz^2} - \beta_j^2 \tilde{\tilde{T}}_j = 0 \quad (8)$$

$$-\lambda_1 \left(\frac{d\tilde{\tilde{T}}_1}{dz}\right)_{z=0} = \tilde{q}, \quad (\tilde{\tilde{T}}_2)_{z \rightarrow \infty} = 0$$

$$(\tilde{\tilde{T}}_1)_{z=d} = (\tilde{\tilde{T}}_2)_{z=d}, \quad \lambda_1 \left(\frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_1}{\partial z}\right)_{z=d} = \lambda_2 \left(\frac{\partial \tilde{\tilde{T}}_2}{\partial z}\right)_{z=d} \quad (9)$$

where  $\beta_j = [(m\pi/L)^2 + (n\pi/L)^2 + i(m\pi V/\alpha_j L)]^{1/2}$ .

The term  $\tilde{q}$  in Eq. (9) is determined by applying the above integral transforms to the boundary condition at ( $z = 0$ ) as

$$\tilde{q} = q \frac{\varepsilon_m}{2L} \frac{1}{L} \int_0^a \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy \int_{-a\sqrt{1-(y/a)^2}}^{a\sqrt{1-(y/a)^2}} \exp\left(-\frac{im\pi x}{L}\right) dx \quad (10)$$

$$\tilde{q} = q \frac{\varepsilon_m}{m\pi} \frac{1}{L} \int_0^a \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left[m\pi a \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} / L\right] dy \quad (11)$$

This integral is given in [11]. We deduce

$$\tilde{q} = \frac{qa\varepsilon_m}{2L} \frac{J_1[\pi a\sqrt{m^2+n^2}/L]}{\sqrt{m^2+n^2}} \tag{12}$$

where  $J_1$  is the Bessel function of first kind of order 1.

The solution of Eq. (8) can be written as follows

$$\tilde{T}_j = A_j e^{-\beta_j z} + B_j e^{\beta_j z} \tag{13}$$

where the constants  $A_j$  and  $B_j$  are determined by using the boundary conditions. We deduce

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\tilde{q}}{\lambda_1 \beta_1} \frac{1}{1 + \sigma e^{-2\beta_1 d}}, & B_1 &= \frac{\tilde{q}}{\lambda_1 \beta_1} \frac{-\sigma e^{-2\beta_1 d}}{1 + \sigma e^{-2\beta_1 d}} \\ A_2 &= \frac{\tilde{q} e^{-d(\beta_1 - \beta_2)}}{\lambda_1 \beta_1} \frac{1 - \sigma e^{-\beta_1 d}}{1 + \sigma e^{-2\beta_1 d}}, & B_2 &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

with  $\sigma = (1 - \lambda_1 \beta_1 / \lambda_2 \beta_2) / (1 + \lambda_1 \beta_1 / \lambda_2 \beta_2)$ .

In order to determine the real temperatures, we apply the inverse integral Fourier transforms as

$$\tilde{T}_j = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \tilde{T}_j \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \tag{15}$$

$$T_j = \Re_e \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{T}_j \exp\left(\frac{im\pi x}{L}\right) \right\} \tag{16}$$

This solution is explicit and allows one to calculate the three-dimensional temperature distribution in the substrate and coating which can be used for the study of the thermomechanical behavior of body (thermal stress).

### 5. Thermal constriction resistance

The thermal constriction resistance is defined by the following relationship

$$R_{cs} = \frac{T_{1,c} - T_{1,a}}{q\pi a^2} \tag{17}$$

where  $T_{1,c}$  and  $T_{1,a}$  are the average temperature of the real contact area ( $\pi a^2$ ) and the apparent contact area ( $2L \times 2L$ ) respectively. Taking into account of the boundary condition  $T_{z \rightarrow \infty} = 0$ , the term  $T_{1,a} = 0$ . The term  $T_{1,c}$  can be calculated by integration of surface temperature, given by (16) over the contact area. After calculation we obtain

$$R_{cs} = \frac{2L}{q\pi^2 a^3} \sum_{\substack{n=0 \\ m \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{J_1[\pi a\sqrt{m^2+n^2}/L]}{\sqrt{m^2+n^2}} \Re_e\{A_1 + B_1\} \tag{18}$$

The notations under the symbols  $\sum$  of Eq. (18) mean that the case when  $m = 0$  and  $n = 0$  simultaneously is excluded.

### 6. Conclusion

An analytical solution has been developed in this paper in order to calculate the three-dimensional temperature distribution and the thermal constriction resistance for multiple circular contacts on a semi-infinite coated body

in relative motion. This solution is explicit and valid regardless of the velocity and the relative contact size. The particular case of a unique circular contact can be studied by considering a small value of  $a/L$  (0.01 typically). Otherwise, when the body is static ( $V = 0$ ) the solution becomes more simple because the term  $\beta_j$  is a real.

The principle of the proposed analytical calculation can be extended to elliptical contact as it's the case of gears, rollers or ball bearings.

## References

- [1] J.P. Bardon, Physical bases of the imperfect thermal contact conditions between two sliding bodies, *Rev. Générale Therm.* 386 (1994) 86–91 (in French).
- [2] N. Laraqî, Thermal constriction resistance for sliding contacts, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 3717–3724 (in French).
- [3] N. Laraqî, Velocity and relative contact size effect on the thermal constriction resistance in sliding solids, *ASME J. Heat Transfer* 119 (1997) 173–177.
- [4] H. Blok, Les températures de surface dans des conditions de graissage sous extrême pression, *Proc. Sd. World Petrol. Cong.* 3 (1937) 1471–1486.
- [5] J.C. Jaeger, Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts, *Proc. Roy. Soc. NSW* 56 (1942) 203–224.
- [6] X. Tian, F.E. Kennedy, Temperature rise at the sliding contact interface for a coated semi-infinite body, *ASME J. Tribology* 115 (1993) 1–9.
- [7] N. Laraqî, Thermal constriction resistance of coated solids. Static and sliding contacts, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 26 (1999) 299–309.
- [8] J.F. Archard, The temperature of rubbing surfaces, *Wear* 2 (1958/59) 438–455.
- [9] X. Tian, F.E. Kennedy, Maximum and average flash temperatures in sliding contacts, *ASME J. Tribology* 116 (1994) 167–174.
- [10] N. Laraqî, An exact explicit analytical solution of steady-state temperature in a half space submitted to a circular moving heat source, *ASME J. Tribology* 125 (2003).
- [11] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals Series and Products*, Academic Press, New York, 1965.
- [12] A. Degiovanni, C. Moyne, Thermal contact resistance in state regime. Influence of contact shapes, *Rev. Générale Therm.* 334 (1989) 557–563 (in French).
- [13] K.J. Negus, M.M. Yovanovich, J.V. Beck, On the nondimensionalization of constriction resistance for semi-infinite heat flux tube, *ASME J. Heat Transfer* 111 (1989) 804–807.