

Une approche de plasticité au gradient en construction métallique

Noël Challamel

Laboratoire de mécanique des structures et matériaux, INSA de Rennes, 20, avenue des Buttes de Coësmes, 35043 Rennes cedex, France

Reçu le 21 mai 2003 ; accepté après révision le 9 juillet 2003

Présenté par Jean Salençon

Résumé

Le comportement au voilement d'éléments poutres en acier est important à comprendre dans le dimensionnement des ossatures métalliques soumises à un séisme. Le radoucissement induit au niveau de la loi moment-courbure conduit à un problème d'évolution élastoplastique mal posé. Un modèle de plasticité au gradient est proposé pour contrôler la localisation. La classification des sections classiquement proposée par les règlements en est remise en cause. Une classification par éléments serait probablement plus adaptée. *Pour citer cet article : N. Challamel, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A gradient plasticity approach for steel structures. Local buckling of steel structural members has to be well understood in order to design accurately steel structures in seismic areas. Induced softening moment-curvature law leads to a well known ill-posedness elastoplastic evolution problem. Localization is chosen to be controlled with a gradient plasticity approach. The concept of cross-section behavioural classes, classically adopted in modern rule design, should be substituted by the concept of member behavioural classes. *To cite this article: N. Challamel, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Solides et structures ; Structures en acier ; Voilement ; Plasticité au gradient ; Comportement au séisme ; Localisation

Keywords: Solids and structures; Steel structures; Local buckling; Gradient plasticity; Seismic behavior; Localization

Abridged English version

One of the main objectives of modern seismic codes is the introduction of the design procedures oriented towards the failure mode and structural ductility control [1]. The rotation capacity of steel members is undermined by the occurrence of local buckling of the plate elements which constitute the member cross-section and, if torsional restraints are not provided, by the occurrence of lateral torsional buckling. Such a phenomenon is known to generate a softening moment-rotation curve for large rotation values [2–6]. Anelastic softening evolutions are often associated to ill-posedness mathematical problems. Numerous works essentially applied to geomaterials studies have been devoted to this phenomenon [9–11]. A characteristic length is generally introduced to control

Adresse e-mail : noel.challamel@insa-rennes.fr (N. Challamel).

the induced localization. The aim of this paper is to show that local buckling of steel members can be treated in an analogous way at the global beam level. The moment-curvature law is chosen as a trilinear diagram composed of a linear elastic part, a linear hardening part and a buckling softening equivalent part. The consequences of such a softening phenomenon are highlighted for a pure bending beam test. Loss of uniqueness of the curvature solution is noticed and strongly depends on the buckling length. When this length is sufficiently small (for instance, for a long enough beam), the snapback moment-rotation curve can be obtained.

The second part of the paper deals with the existing techniques available to restore the well-posedness evolution problem. An equivalent softening hinge is sometimes suggested [5,7]. The Hillerborg fictitious crack model [16], associated to finite element resolution, is an alternative solution, using a moment-rotation curve in the buckled element. A gradient plasticity approach is presented in the paper: this method regularizes the solution independently on the numerical method. The nonlocal incremental law is only introduced during the softening stage, in order to preserve locality law in the elastic and the hardening phases. The model is inspired of the gradient plasticity model developed for concrete behaviour [17]. The pure bending test is also considered within this nonlocal approach. Global moment-rotation response becomes unique for this family of localized solution. The localized zone depends on the characteristic length of the gradient plasticity model. This length, linked to the local buckling phenomenon, could be introduced within theoretical limit analysis considerations. A kinematic limit analysis method is given in [3], using a virtual mechanism which is governed by a longitudinal length in the order of the width of the flange. Experimental results correlate such a value [4]. It could be noticed that lateral torsional buckling could be coupled to such phenomenon [19].

A very important concept in design of steel structures is represented by the subdivision of structural sections into different behavioural classes. It would be probably more adapted to use in fact subdivision of structural elements, due to the true nonlocal behaviour of beam elements for large rotation values. This remark has soon been formulated from the experimental results [1].

1. Introduction

Le dimensionnement de structures du génie civil à la tenue au séisme se base dans la majorité des cas sur une approche quasi-statique équivalente, menée à partir d'une analyse modale élastique. C'est en particulier la position réglementaire de l'*Eurocode 8*. La non-linéarité matérielle peut être prise en compte au travers d'un coefficient global de comportement, qui traduit l'aptitude de la structure à se déformer dans le domaine inélastique. Ce coefficient joue un rôle clé dans une philosophie de dimensionnement se voulant la plus économique possible. Il peut être relativement élevé pour les structures métalliques, en comparaison de celui retenu pour d'autres types de constructions, à condition que la ductilité de la structure puisse être effectivement mobilisée durant la réponse au séisme. C'est une des raisons pour lesquelles le phénomène de voilement élastoplastique a été récemment introduit dans les codes de calcul, afin de tirer profit d'une capacité de rotation maximale de l'élément structurel considéré [1].

Cette instabilité de section est connue pour générer une loi moment-rotation qui présente une branche décroissante au delà d'un certain seuil de rotation [2–6]. La forme de cette courbe réponse dépend fortement des rapports géométriques de la section qui se classe ainsi en fonction de sa capacité de rotation. C'est la terminologie adoptée par l'*Eurocode 3*. Un tel radoucissement n'est pas sans poser certaines difficultés théoriques, liées à des problèmes d'instabilité ou de pertes d'unicité [7]. La première étude qui met en exergue expérimentalement et théoriquement ce phénomène est probablement celle de Maier et Zavelani [8]. L'influence du radoucissement a fait l'objet depuis, de nombreux travaux essentiellement appliqués aux géomatériaux et surtout au béton [9–11]. Une longueur interne est généralement introduite pour contrôler la localisation, conduisant à des effets d'échelle spécifiques. La présente étude se donne pour objet de montrer les spécificités théoriques induites par un tel phénomène de radoucissement dans le domaine des structures métalliques. Un modèle de plasticité au gradient est introduit pour contrôler la localisation induite. Cette localisation à l'échelle de la poutre est reliée

aux caractéristiques locales de la section qui gouvernent le voilement élastoplastique. La poutre est supposée suffisamment maintenue latéralement, afin d’éviter les effets de déversement élastique.

2. Loi moment-courbure

2.1. Représentation graphique

La loi moment-courbure retenue est une courbe trilineaire pour un essai monotone, représentée sur la Fig. 1. Seule la flexion d’élément poutre en acier est considérée.

La première branche correspond à une phase élastique de chargement. Une deuxième branche est caractéristique de l’écroûissage positif local de l’acier. Cette courbe bilinéaire est naturellement une idéalisation d’une courbe théorique qui ne présenterait pas de singularité (voir [12] pour le cas élastoplastique-parfait). Enfin, une troisième branche traduit le phénomène de voilement local. Là encore, la loi linéaire est un modèle simplifié au regard des courbes théoriques ou numériques référencées dans la littérature [6]. Cette loi est généralement identifiée à partir d’essais moment – rotation et réinterprétée sous la forme de diagramme moment-courbure. Une telle interprétation est licite pour un essai à courbure moyenne homogène. Chaque section est donc caractérisée par les paramètres de la Fig. 1. M_p et χ_Y sont respectivement le moment et la courbure plastiques. m et χ_v se rapportent à l’initiation du voilement local et χ_u est la courbure ultime admissible par la section.

2.2. Loi incrémentale

La loi incrémentale illustrée sur la Fig. 1 est une loi élasto-plastique à écroûissage positif puis négatif au delà d’un certain seuil de moment. Une fonction f est introduite afin de définir le domaine élastique.

$$f(M, M^*) = |M| - (M_p + M^*) \tag{1}$$

M_p a la signification de la limite du domaine élastique de la section non écroûie. M^* est une variable interne additionnelle qui contient l’histoire du chargement.

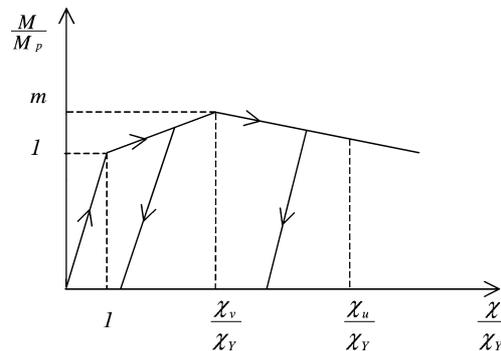


Fig. 1. Modélisation de la loi moment-courbure.

Fig. 1. Modelisation of the moment-curvature law.

Dans le cadre d'une loi d'écoulement standard généralisée, la courbure plastique χ_p et la variable d'écrouissage κ s'obtiennent à partir de :

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_p &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial M} \\ -\dot{\kappa} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial M^*} \end{aligned} ; \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2)$$

$\dot{\lambda}$, réel positif, est le multiplicateur plastique. Conformément à la représentation de la Fig. 1, l'écrouissage est une fonction bilinéaire qui s'exprime à partir de :

$$\begin{cases} M^*(\kappa) = k^+ \kappa & \text{si } \kappa \in [0; \kappa_c] \\ M^*(\kappa) = (-k^- \kappa_c + m M_p + k^- \kappa) - M_p & \text{si } \kappa \notin [0; \kappa_c] \end{cases} \quad (3)$$

où $\langle x \rangle = x$ si $x \geq 0$ et $\langle x \rangle = 0$ sinon.

Le module d'écrouissage initial k^+ est positif tandis que le module de radoucissement lié au voilement, noté k^- est négatif. Le module k^+ ainsi que la courbure plastique cumulée critique κ_c dépendent des paramètres précédemment introduits, sous la forme :

$$k^+ = \frac{M_p}{\chi_Y} \frac{m-1}{\chi_v/\chi_Y - m} \quad \text{et} \quad \kappa_c = \chi_Y \left(\frac{\chi_v}{\chi_Y} - m \right) \quad (4)$$

En utilisant la loi de partition des courbures élastiques et plastiques, il vient :

$$\frac{M}{M_p} = \frac{\chi - \chi_p}{\chi_Y} \quad (5)$$

La condition de consistance durant l'écoulement se réduit à :

$$\dot{M} = k \dot{\chi}_p \quad \text{avec } k = k^+ \text{ ou } k = k^- \quad (6)$$

Le module k est indicé par un signe positif ou négatif suivant la phase d'écrouissage.

3. Modélisation structurelle

3.1. Essai de flexion pure

La flexion pure de la poutre homogène dont la loi moment-courbure est représentée en Fig. 1 est étudiée. Une rotation Θ est imposée à l'extrémité de la poutre de longueur L (Fig. 2). La flèche de la poutre est notée $w(x)$ et sa rotation $\theta(x)$.

Les équations d'équilibre indiquent que le moment dans toute la poutre est égal au moment d'encastrement, noté Γ . Les conditions aux limites du problème peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w'(0) &= 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad w'(L) = \Theta \quad (7)$$

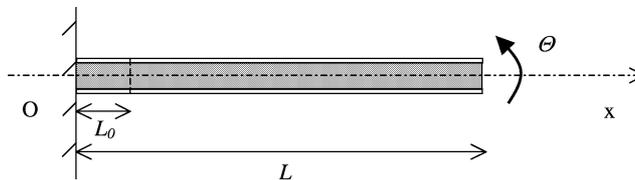


Fig. 2. Poutre en flexion pure – rotation imposée.

Fig. 2. Beam in pure bending – imposed rotation.

L'équation de compatibilité se traduit en petites transformations par :

$$\chi(x) = \theta'(x) = w''(x) \tag{8}$$

Cette hypothèse des petites transformations est probablement discutable au niveau de la modélisation du voilement local, mais est globalement admise à l'échelle de la poutre. Les équations de compatibilité se réécrivent à partir de la condition aux limites (7) :

$$\int_0^L \chi(x) dx = \Theta \tag{9}$$

3.2. Unicité de la réponse

La poutre initialement au repos est sollicitée par la rotation imposée Θ , appliquée de manière monotone. Tant que la rotation Θ est inférieure à une rotation élastique caractéristique Θ_Y ($\Theta_Y = L\chi_Y$), la courbure s'exprime en fonction du moment de façon biunivoque.

$$\frac{\chi(x)}{\chi_Y} = \frac{M(x)}{M_p} = \frac{\Gamma}{M_p} = \frac{\Theta}{\Theta_Y} \tag{10}$$

La solution unique du problème s'écrit ainsi sans difficulté :

$$w(x) = \frac{\Theta}{2L} x^2 \tag{11}$$

Au delà de la rotation Θ_Y , la phase élastoplastique écrouissable s'initie. De même que dans le cas élastique, tant que Θ est inférieur à une rotation critique de voilement Θ_v ($\Theta_v = L\chi_v$), la réponse est unique pour k^+ strictement positif [13].

La solution (11) de courbure homogène est donc encore valable dans cette plage élastoplastique. La relation moment-rotation s'écrit alors :

$$\frac{\Gamma}{M_p} = \frac{(m-1)\chi_Y}{\chi_v - \chi_Y} \frac{\Theta}{\Theta_Y} + \frac{\chi_v - m\chi_Y}{\chi_v - \chi_Y} \tag{12}$$

3.3. Perte d'unicité de la réponse

La solution (11) n'est plus unique au delà de la rotation Θ_v . Une famille de solutions qui englobe la solution (11) est envisagée, dans le même esprit que dans [11]. La poutre est découpée en deux tronçons fictifs, dans lesquels on a soit une décharge élastique, soit du voilement élasto-plastique monotone. L'élément qui se voile a une longueur arbitraire L_0 et se situe au voisinage de l'encastrement (voir Fig. 2). La relation moment-rotation, paramétrée par L_0/L variant entre 0 et 1, s'obtient à partir de l'équation de compatibilité (9) et des lois moments courbures dans chaque élément :

$$\frac{\Gamma}{M_p} = \frac{(1 - L_0/L)(m - \chi_v/\chi_Y) + (L_0/L)(m - \alpha)\chi_v/\alpha\chi_Y + \Theta/\Theta_Y}{1 - L_0/L + (L_0/L)\chi_v/\alpha\chi_Y} \quad \text{où } \alpha = \frac{k^-}{M_p + \chi_Y k^-} \chi_v \tag{13}$$

Les relations moment-rotation (10), (12) et (13) sont reportées sur la Fig. 3. Les valeurs numériques suivantes sont adoptées :

$$m = 1,25 ; \quad \frac{\chi_v}{\chi_Y} = 4 \quad \text{et} \quad \alpha = -0,25$$

Lorsque L_0 tend vers 1, on retrouve la courbe enveloppe homothétique à celle de la Fig. 1. Au contraire, lorsque L_0 tend vers 0, une décharge globale apparaît, parallèlement à la pente de chargement élastique. Des courbes de

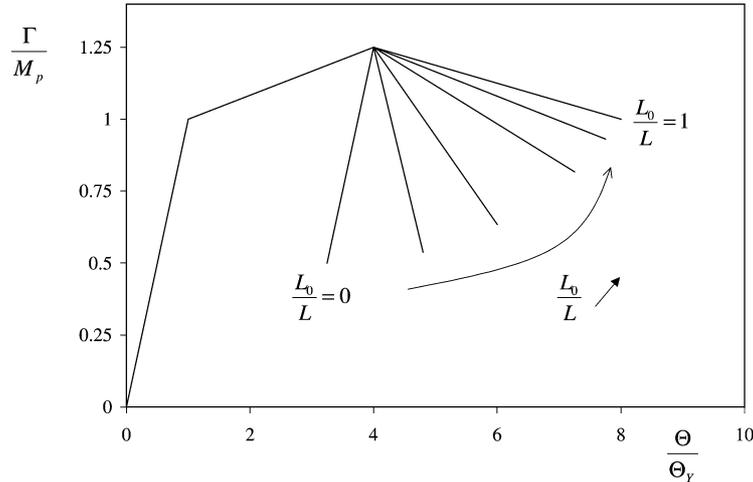


Fig. 3. Réponse globale de l'essai de flexion pure.

Fig. 3. Global response of the pure bending test.

« snap-back » apparaissent ainsi lorsque le radoucissement prévaut dans une zone suffisamment petite par rapport à l'élément structural considéré. C'est la localisation induite par le voilement local.

Il est notable que la perte d'unicité de la solution $\chi(x)$ apparaîtrait de même pour un diagramme moment-courbure présentant un palier plastique parfait [14]. Ceci reviendrait à considérer k^- tendant vers 0. La réponse globale moment rotation serait néanmoins unique contrairement aux cas radoucissants de la Fig. 3.

4. Modèle de plasticité au gradient

4.1. Introduction

Il apparaît clairement que le radoucissement généré par le voilement local induit une perte d'unicité de la courbure $\chi(x)$ au sein de la poutre. La réponse globale évaluée à partir de la courbe moment-rotation est sensible à la taille de la zone voilée. Cette nature mal posée du problème d'évolution se répercute au niveau de la résolution numérique par la méthode des éléments finis. Une sensibilité pathologique au maillage est ainsi relevée en présence de gradient de moment, pour un élément de poutre en flexion présentant une loi moment-courbure avec radoucissement [15]. La régularisation de tels problèmes peut s'effectuer au travers de l'introduction d'une longueur interne. Le modèle de fissuration fictive d'Hillerborg [16] pourrait ainsi être adapté aux solides unidimensionnels, en retenant une loi moment-rotation dans l'élément fini voilé. Une rotule radoucissante est parfois introduite [5,7]. Le choix du maillage ainsi que la concentration du voilement en un nœud limite l'efficacité de cette dernière méthode. Une approche de plasticité au gradient explicite est présentée dans cet article. Cette approche générale présente l'avantage de régulariser effectivement le problème d'évolution, indépendamment de l'outil numérique de résolution.

4.2. Loi de comportement non-locale

Une variable non locale de radoucissement $\bar{\kappa}$ est introduite :

$$\bar{\kappa}(x) = \kappa(x) + l_c^2 \kappa''(x) \quad (14)$$

l_c a la dimension d'une longueur et est un paramètre caractéristique du voilement. Lorsque la solution est homogène, la variable non locale $\bar{\kappa}$ est confondue avec κ . Cette formulation au gradient peut se percevoir comme un développement en série de Taylor d'une formulation non locale intégrale au premier ordre. Le modèle présenté ici est analogue au modèle de plasticité au gradient [17]. Les Éqs. (1), (2) restent inchangées. Par contre, les lois d'écroutissage s'expriment cette fois-ci comme :

$$\begin{cases} M^*(\kappa) = k^+ \kappa & \text{si } \kappa \in [0; \kappa_c] \\ M^*(\kappa) = \langle -k^- \kappa_c + m M_p + k^- \bar{\kappa} \rangle - M_p & \text{si } \kappa \notin [0; \kappa_c] \end{cases} \quad (15)$$

Ainsi, la localité est préservée tant que le problème reste bien posé (phase élastique et écroutissage positif). La non localité intervient dans la phase de voilement uniquement. Citons à ce niveau d'autres familles de modèles de plasticité au gradient, qui introduisent une non localité additionnelle dans le critère de charge (1) [18].

Pour des raisons de dérivabilité et de continuité de la variable de radoucissement, des conditions de bord additionnelles sont imposées :

$$\begin{cases} \kappa'(0) = 0 \\ \kappa'(L_0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \kappa(0) = \kappa_c \\ \kappa(L_0) = \kappa_c \end{cases} \quad (16)$$

4.3. Résolution du problème de flexion pure

On admet de nouveau qu'une zone de voilement de longueur L_0 prévaut dans la poutre, lorsque la rotation Θ est supérieure à Θ_v . Une équation différentielle apparaît en adjoignant (1) et (15) :

$$\Gamma = \langle -k^- \kappa_c + m M_p + k^- [\kappa(x) + l_c^2 \kappa''(x)] \rangle \quad \text{pour } x \in [0; L_0] \quad (17)$$

Cette équation différentielle du second ordre se réécrit :

$$\kappa(x) + l_c^2 \kappa''(x) = \kappa_0 \quad \text{où } \kappa_0 = \kappa_c + \frac{\Gamma - m M_p}{k^-} \quad (18)$$

dont la solution, obtenue à partir des conditions aux limites (16), s'écrit :

$$\kappa(x) = \kappa_0 + (\kappa_c - \kappa_0) \left(1 - \cos \frac{x}{l_c} \right) \quad \text{et} \quad L_0 = 2\pi l_c \quad (19)$$

4.4. Commentaires

L'expression (19) montre que la taille de la zone de localisation, unique, est contrôlée par le paramètre de longueur caractéristique l_c . La solution courbure $\chi(x)$ n'est pas unique, la zone localisée pouvant glisser le long de l'élément pour cette famille de solution. Néanmoins, la réponse globale du moment en fonction de la rotation imposée est uniquement déterminée avec cette famille de solutions et la régularisation est donc effective à cette échelle.

Le paramètre de longueur caractéristique joue donc un rôle essentiel dans la réponse post-voilement de l'élément structurel considéré. Il est à relier au phénomène à l'origine du radoucissement. Alors que pour les géomatériaux, ce paramètre est associé à la composition matérielle microstructurale, la longueur qui contrôle le radoucissement à l'échelle de la poutre est ici liée au voilement élastoplastique. L'étude théorique [3] apporte une explication satisfaisante en introduisant une longueur caractéristique à partir d'une approche cinématique d'analyse limite. Le mécanisme virtuel envisagé prend place sur une longueur longitudinale de l'ordre de la largeur des semelles. Des analyses expérimentales viennent conforter cet ordre de grandeur [4]. Il est probable que des couplages avec du déversement puissent d'ailleurs aussi intervenir [19]. Un tel modèle permet de surcroît d'expliquer les effets de gradient de moment constatés dans l'étude expérimentale [4].

Le comportement non local de la poutre aux grandes rotations remet en cause la possibilité de comparaison de comportement de sections, découpées de tout contexte structurel. La notion de classe d'éléments se substituerait

ainsi plus généralement à celle de classes de sections. Cette classification porte directement sur la capacité de rotation de l'élément, contrairement à la classification usuelle qui s'établit à partir des rapports géométriques de la section. Cette remarque a déjà été formulée à partir d'une analyse expérimentale [1].

5. Conclusion

Le radoucissement lié au voilement élastoplastique d'éléments de poutres en acier est associé à une localisation théorique. Une analyse de plasticité au gradient est adaptée à ce problème structurel et permet de contrôler cette localisation à l'échelle de la poutre. La longueur interne introduite dans un tel modèle peut dériver d'une approche théorique d'analyse limite et est corroborée par des résultats expérimentaux.

Cette étude nous porte à croire que la notion de classe de sections, à la base de la réglementation de l'*Eurocode 3* par exemple, est finalement discutable. Il serait probablement plus adapté d'utiliser une classification par éléments, en raison du caractère essentiellement non local du comportement de l'élément poutre aux grandes rotations.

Références

- [1] F.M. Mazzolani, V. Piluso, Theory and Design of Seismic Resistant Steel Frames, Chapman & Hall, 1996, p. 497.
- [2] A.F. Luckey, P.F. Adams, Rotation capacity of beams under moment gradient, J. Struct. Div. ASCE 95 (1969) 1173–1188.
- [3] J.J. Climenhaga, R.P. Johnson, Moment-rotation curves for locally buckling beams, J. Struct. Div. ASCE 98 (1972) 1239–1254.
- [4] U. Kuhlmann, Definition of flange slenderness limits on the basis of rotation capacity values, J. Constr. Steel Res. 14 (1989) 21–40.
- [5] J.M. Aribert, Effect of local plate buckling on the ultimate strength of continuous composite beams, Thin-Walled Structures 20 (1994) 279–300.
- [6] G. Ballio, C.A. Castiglioni, Seismic behaviour of steel sections, J. Const. Steel Res. 29 (1994) 21–24.
- [7] M. Jirasek, Analytical and numerical solutions for frames with softening hinges, J. Engrg. Mech. 123 (1) (1997).
- [8] G. Maier, A. Zavelani, Sul comportamento di aste metaliche compresse eccentricamente. Indagine sperimentale e considerazioni teoriche, Costruzioni Metalliche 22 (4) (1970) 282–297.
- [9] Z.P. Bazant, Instability, ductility and size effect in strain softening concrete, J. Engrg. Mech. 102 (1976) 331–344.
- [10] G. Pijaudier-Cabot, Z.P. Bazant, Nonlocal damage theory, J. Engrg. Mech. 113 (1987) 1512–1533.
- [11] M. Jirasek, Z.P. Bazant, Inelastic Analysis of Structures, Wiley, 2002, p. 758.
- [12] J. Salençon, B. Halphen, Élastoplasticité, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1987, p. 448.
- [13] R. Hill, A general theory of uniqueness and stability in elastic–plastic solids, J. Mech. Phys. Solids 6 (1958) 236–249.
- [14] Q.S. Nguyen, Stabilité et mécanique non linéaire, Hermes, 2000, p. 461.
- [15] Z.P. Bazant, G. Pijaudier-Cabot, J. Pan, Ductility, snap-back, size effect, and redistribution in softening beams or frames, J. Struct. Engrg. 113 (12) (1987).
- [16] A. Hillerborg, M. Modeer, P.E. Petersson, Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, Cement and Concrete Research 6 (1976) 773–782.
- [17] R. de Borst, H.B. Mühlhaus, Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects, Int. J. Numer. Methods Engrg. 35 (1992) 521–539.
- [18] C. Polizzotto, G. Borino, A thermodynamics-based formulation of gradient-dependent plasticity, Eur. J. Mech. A Solids 17 (1998) 741–761.
- [19] A.R. Kemp, Interaction of plastic local and lateral buckling, J. Struct. Div. ASCE (1985) 2181–2197.