



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 673–678



# Phénomènes de vacillation d'amplitude pour un écoulement d'air en cavité tournante différentiellement chauffée

Pierre Maubert, Anthony Randriamampianina

IRPHE, UMR 6594 CNRS, Technopôle de Château-Gombert, 49, rue Frédéric Joliot-Curie, BP 146, 13384 Marseille cedex 13, France

Reçu le 3 mars 2003 ; accepté après révision le 9 juillet 2003

Présenté par Paul Clavin

## Résumé

On étudie par voie numérique les phénomènes de vacillation d'amplitude se développant entre deux écoulements successifs de vagues régulières permanentes dans une cavité tournante remplie d'air et soumise à un gradient thermique. En faisant varier progressivement la vitesse de rotation pour un écart de température  $\Delta T = 30$  K entre les deux cylindres verticaux coaxiaux, deux types de vacillation d'amplitude de comportements temporels différents sont obtenus pour des faibles valeurs du taux de rotation, similairement à ceux observés expérimentalement par Read et al. (J. Fluid Mech. 238 (1992) 599–632) pour un fluide à grand nombre de Prandtl. Ces instabilités correspondent à une structure spatiale oscillant au cours du temps entre deux configurations de vagues permanentes voisines. La première est caractérisée par un comportement temporel doublement périodique avec une évolution périodique des amplitudes des vagues, alors que la seconde est quasi-périodique de type tore-3 ou chaotique. **Pour citer cet article : P. Maubert, A. Randriamampianina, C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Amplitude vacillation phenomena in an air-filled differentially heated rotating annulus.** A direct numerical simulation is carried out to describe the amplitude vacillation phenomena appearing between two successive steady regular waves flows in an air-filled differentially heated rotating annulus. For a fixed temperature difference,  $\Delta T = 30$  K, when varying progressively the rotation rate, we have obtained the occurrence of the two amplitude vacillation instabilities observed experimentally by Read et al. (J. Fluid Mech. 238 (1992) 599–632) with a high Prandtl number fluid. The first one, denoted AV is characterized by a doubly periodic temporal behaviour with a periodic variation of wave amplitudes, while the second one corresponds to a torus-3 quasi-periodic or chaotic motion with the presence of a modulation in the wave amplitudes evolution. **To cite this article: P. Maubert, A. Randriamampianina, C. R. Mecanique 331 (2003).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Mécanique des fluides ; Vacillation d'amplitude ; Simulation Numérique Directe ; Systèmes en rotation ; Ondes baroclines

*Keywords:* Fluid mechanics; Amplitude vacillation; Direct numerical simulation; Rotating systems; Baroclinic waves

Adresse e-mail : [pierre.maubert@irphe.univ-mrs.fr](mailto:pierre.maubert@irphe.univ-mrs.fr) (P. Maubert).

1631-0721/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

doi:10.1016/S1631-0721(03)00142-6

## Abridged English version

### Introduction

The understanding of rotating flows is of primary concern to many fundamental and industrial applications, though the study of baroclinic waves inside a differentially heated rotating annulus is more specifically devoted to meteorology and oceanography. The present study follows previous work in an air-filled differentially heated rotating cavity with a smaller thermal gradient  $\Delta T = 5$  K [1], where the solutions were found to exhibit the same behaviour as for large Prandtl number fluids ([2–4]). A higher thermal gradient  $\Delta T = 30$  K is imposed to describe particularly the amplitude vacillation phenomena in the regular waves regime. These instabilities show time-dependence of the wave amplitude and phase speed unlike the steady waves. Various experiments have mentioned the presence of an amplitude vacillation characterized by a doubly periodic motion [5,2,6,7]. Read et al. [5] have reported the occurrence of a modulated amplitude vacillation defined as “*a low-dimensional chaotically modulated vacillation at very low frequency*”. Both instabilities have been obtained, with characteristics in agreement with the observations of Read et al. [5].

### Physical model and numerical approach

The physical model and numerical approach are the ones described in [1]. The geometry is defined by  $A = d/(b - a) = 3.94$  and  $R_c = (b + a)/(b - a) = 3.74$  [3], where  $a$  and  $b$  are the inner and outer radius and  $d$  the depth of the annulus. The whole cavity rotates uniformly around its vertical axis with an angular velocity  $\Omega$ . The working fluid is air at ambient temperature,  $Pr = 0.707$ . A temperature difference  $\Delta T = T_b - T_a = 30$  K is kept between the cylinders and the horizontal endplates are assumed to be insulating. The flow regimes are governed by two main parameters: the Taylor number  $Ta = 4\Omega^2(b - a)^5/\nu^2d$  and the thermal Rossby number  $\Theta = gd\beta\Delta T/\Omega^2(b - a)^2$  [2]. In order to take into account the effect of the higher thermal gradient, we have chosen  $g\beta(T_b - T_a)/2\Omega$  as reference scale for the velocity [8]. A finer grid  $N \times M \times K = 64 \times 96 \times 80$  respectively in the radial, axial and azimuthal directions has been used.

### Results

The flow remains symmetric for  $Ta \leq 1.825 \times 10^5$  and  $\Theta \geq 1.467$  before a steady regular wave-2 (denoted 2S) establishes for  $1.85 \times 10^5 \leq Ta \leq 2.05 \times 10^5$  and  $1.447 \geq \Theta \geq 1.306$ . This transition region is in agreement with the findings of Fowles and Hide [2,3] (see [4] for a review) from their experiments with liquids where  $Ta_c = (1.85 \pm 0.08) \times 10^5$ . A further increase of the rotation rate yields the occurrence of two kinds of amplitude vacillation phenomena, respectively denoted AV and MAV before a steady regular wave-3 establishes at  $Ta = 2.30 \times 10^5$ , which extends up to  $Ta = 4.5 \times 10^5$  (denoted 3S). The regular waves are governed by the meandering “*jetstream*” motion with perfectly symmetric waves drifting steadily at constant amplitude, as illustrated in Fig. 1. These flows are characterized by a monoprotic behaviour with a period  $P$  decreasing with increasing rotation rate following the law  $mP = \text{constant}$ , where  $m$  is the dominant wavenumber [1,2,8].

At  $Ta = 2.10 \times 10^5$  and  $\Theta = 1.275$ , a vacillation amplitude AV is obtained. The flow structure corresponds to a spatial oscillation of waves between wavenumbers 2 and 3, with two characteristic streaklines displayed in Fig. 1 at two instants. Pfeffer and Fowles [9] suggested that both wavenumbers 2 and 3 may be present simultaneously and that the flow structure results from the superposition of the two steady regular wave flows. This leads to a dispersive wave system consisting of wavenumber 2.5 modulated by wavenumber 0.5. The temporal evolution of the temperature at the centre of the cavity exhibits a characteristic doubly periodic behaviour, as illustrated in Fig. 2 for  $Ta = 2.15 \times 10^5$ , with the presence of a subharmonic  $f/3$  corresponding to the wave drift,

similarly to experimental observations with liquids [5,7]. The flow is also characterized by a periodic motion of the wave amplitudes, as clearly shown in Fig. 2 for the amplitude of the dominant wavenumber  $A_3$ , with its own frequency large compared with the frequency of the wave vacillation. The corresponding time-averaged azimuthal wavenumber amplitude spectrum shows a dominant wavenumber 3 with significant magnitudes of its sidebands compared with harmonics, as characteristic for amplitude vacillation phenomenon [5,4,7]. It is noteworthy to mention the presence of non-harmonic components, while the corresponding spectra for steady waves are mainly composed of the dominant wavenumber with its harmonics [5,7]. Amplitude vacillation was not observed between the transition from the upper symmetric solution and the steady wave-2 regular regime  $2S$ .

A further increase in the rotation rate up to  $Ta = 2.20 \times 10^5$  leads to another type of amplitude vacillation denoted  $MAV$ , as reported by Read et al. [5]. Although the flow structure is similar to the previous  $AV$  solution, the power spectral analysis of the temperature at the centre of the cavity exhibits a complex quasi-periodic behaviour characterized by three incommensurate frequencies with the additional presence of a low frequency  $f_m$  resulting from the modulation of the wave amplitude (Fig. 3(a)). This modulation is also reflected by the wave amplitude motions, where three incommensurate frequencies are obtained (Fig. 3(b)), which corresponds to a chaotic behaviour. The time-averaged amplitude spatial spectrum exhibits a dominant wavenumber 3 with large values of sidebands and the presence of non-harmonic components (Fig. 3(c)).

The amplitude vacillation phenomena occurring between two successive steady wave flows have been identified via numerical simulation for an air-filled rotating cavity. Starting from a steady wave flow  $2S$ , a progressive increase of the rotation rate first leads to a doubly periodic regime in the  $AV$  regime characterized by a phase-locking of frequencies, followed by a chaotic motion in the  $MAV$  regime before another steady wave flow  $3S$  establishes. The presence of non-harmonic components in the amplitude spatial spectrum indicates that these instabilities result in the excitations of sidebands via the first harmonic of the dominant wavenumber. These results are consistent with the previous experimental findings of Read et al. [5] for a high Prandtl number fluid.

## 1. Introduction

Une étude est réalisée afin de décrire les phénomènes de vacillation d'amplitude se développant entre deux écoulements successifs de vagues régulières permanentes dans une cavité tournante différentiellement chauffée remplie d'air. Dans un précédent article, pour un écart de température  $\Delta T = 5$  K [1], nous avons observé les différents régimes mentionnés dans la littérature [2–4]. Dans le cas présent, nous avons considéré un gradient thermique plus important,  $\Delta T = 30$  K, afin d'observer les phénomènes de vacillation d'amplitude dans les régimes de vagues régulières [5,4,6,7]. Read et al. [5] ont reporté deux types de vacillation d'amplitude lors de leur expérience avec un liquide à fort nombre de Prandtl ( $Pr = 26,4$ ) : la vacillation d'amplitude  $AV$  et la vacillation d'amplitude modulée  $MAV$ . Bien que de nombreux travaux ont mentionné la première, aucune autre étude ni expérimentale ni numérique n'a fait objet de la seconde, à notre connaissance. Le phénomène  $AV$  est caractérisé par la présence d'un comportement temporel doublement périodique [5,4,7]. Le cas  $MAV$  est beaucoup plus complexe avec une modulation des périodes menant à un comportement temporel de type tore-3 ou chaotique.

## 2. Modèle physique et paramètres du problème

Le modèle physique correspond à celui décrit dans [1]. Il s'agit d'un domaine annulaire compris entre deux cylindres verticaux coaxiaux maintenus à températures constantes  $T_a$  pour le rayon intérieur ( $r = a$ ), et  $T_b$  ( $T_b > T_a$ ), pour le rayon extérieur ( $r = b$ ) et fermés par deux plans horizontaux adiabatiques distants de  $d$ . L'ensemble est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des cylindres avec une vitesse angulaire  $\Omega$ . Nous avons repris la même géométrie considérée dans notre précédente étude [1], qui correspond à celle utilisée par Fowles et Hyde [3] lors de leurs expériences ( $A = d/(b - a) = 3,94$  et  $R_c = (b + a)/(b - a) = 3,74$ ). La

cavité est remplie d'air à température ambiante,  $Pr = 0,707$  et l'écart de température entre les deux cylindres verticaux est fixé à  $\Delta T = T_b - T_a = 30$  K. Le mouvement et le transfert thermique sont régis par les équations de Navier–Stokes couplées à celle d'énergie à travers l'approximation de Boussinesq. Afin de tenir compte du gradient thermique imposé, nous avons choisi l'échelle de référence  $g\beta(T_b - T_a)/2\Omega$  pour la vitesse [8], les autres grandeurs de référence étant celles utilisées dans [1]. Pour une géométrie et un fluide donnés, l'étude de la stabilité de l'écoulement s'effectue au travers de deux paramètres principaux [2,3], le nombre de Taylor  $Ta = (4\Omega^2(b - a)^5)/(v^2d)$  et le nombre de Rossby thermique  $\Theta = (gd\beta\Delta T)/[\Omega^2(b - a)^2]$ . L'approche numérique est celle mentionnée dans [1]. Les simulations sont effectuées avec un maillage  $65 \times 97 \times 80$ , avec le pas de temps pris dans l'intervalle  $9,125 \times 10^{-2} \leq \delta t \leq 1,25 \times 10^{-1}$  dans la limite de stabilité numérique.

### 3. Résultats

L'écoulement reste axisymétrique pour des valeurs des paramètres de contrôle  $Ta \leq 1,825 \times 10^5$  et  $\Theta \geq 1,467$ . Des solutions avec deux vagues régulières permanentes, dénotées 2S, se développent pour  $1,85 \times 10^5 \leq Ta \leq 2,05 \times 10^5$  et  $1,447 \geq \Theta \geq 1,306$ . Cette zone de transition est en accord avec les travaux expérimentaux de Fowlis et Hide [2,3] (voir [4] pour une revue) qui l'ont délimitée à  $Ta_c = (1,85 \pm 0,08) \times 10^5$  pour des liquides. Une augmentation du taux de rotation amène l'apparition de deux phénomènes de vacillation d'amplitude, avant l'établissement d'un écoulement à trois vagues permanentes (dénoté 3S) à  $Ta = 2,30 \times 10^5$  qui persiste jusqu'à  $Ta = 4,5 \times 10^5$ . Dans les régimes de vagues permanentes, l'écoulement correspond au simple mouvement géré par le « courant de jet » (« jetstream ») (voir Fig. 1), circulant entre des vagues anticycloniques et cycloniques localisées de manière parfaitement symétrique. Ces écoulements sont caractérisés par un comportement temporel périodique, avec une période  $P$  suivant la loi  $mP = cste$ ,  $m$  étant le nombre d'ondes dominant [1,2,8].

A  $Ta = 2,10 \times 10^5$ , nous obtenons une première vacillation d'amplitude dénotée AV caractérisée par une oscillation de la structure d'écoulement entre 2 et 3 vagues. Nous présentons sur la même Fig. 1 deux configurations d'écoulement typiques prises à deux instants pour  $Ta = 2,15 \times 10^5$ . Nous pouvons voir la dissymétrie des vagues avec l'alternance entre la disparition (à  $t_0$ ) et l'apparition (instant  $t_1$ ) de la troisième vague. Ces structures sont à comparer avec celles reportées dans la littérature [4]. Pfeffer et Fowlis [9] ont suggéré la présence simultanée des deux structures à 2 et 3 vagues avec une solution résultant de la superposition des deux écoulements de vagues régulières permanentes. Cela mène à un système de dispersion d'ondes correspondant à un nombre d'ondes 2,5 modulé par un nombre d'ondes 0,5. L'analyse spectrale de l'évolution temporelle de la température au centre de la cavité est présentée sur la Fig. 2(a) pour  $Ta = 2,15 \times 10^5$ . Elle montre un comportement doublement périodique caractéristique, avec un accrochage de la fréquence du mouvement relatif des vagues ( $f_d$ ) à une sous-harmonique  $f_d = f_v/3$

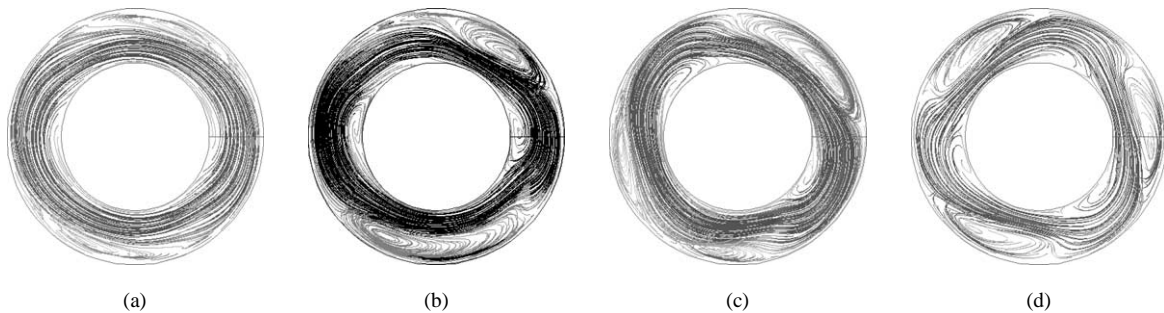


Fig. 1. Structures d'écoulements à  $z/d = 0,25$  ( $0 \leq z/d \leq 1$ ) pour différentes valeurs du taux de rotation avec  $\Delta T = 30$  K. (a)  $Ta \times 10^{-5} = 2$  (2S), (b)  $Ta \times 10^{-5} = 2,15$  (3AV)( $t_0$ ), (c)  $Ta \times 10^{-5} = 2,15$  (3AV)( $t_1$ ), (d)  $Ta \times 10^{-5} = 2,30$  (3S).

Fig. 1. Streaklines at  $z/d = 0,25$  ( $0 \leq z/d \leq 1$ ) for different values of the rotation rate with  $\Delta T = 30$  K. (a)  $Ta \times 10^{-5} = 2$  (2S), (b)  $Ta \times 10^{-5} = 2,15$  (3AV)( $t_0$ ), (c)  $Ta \times 10^{-5} = 2,15$  (3AV)( $t_1$ ), (d)  $Ta \times 10^{-5} = 2,30$  (3S).

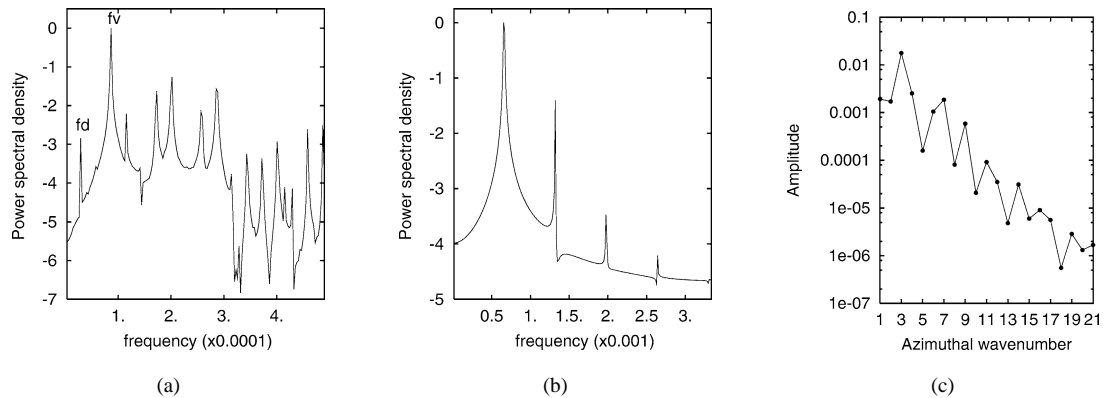


Fig. 2. Spectres de la température (a), de l’amplitude  $A_3$  (b) et de la moyenne temporelle de l’amplitude en fonction du nombre d’ondes azimutales (c) pour  $Ta = 2,15 \times 10^5$ .

Fig. 2. Power spectra of the temperature (a), of the amplitude  $A_3$  (b) and of the time-averaged azimuthal wavenumber amplitude (c) for  $Ta = 2.15 \times 10^5$ .

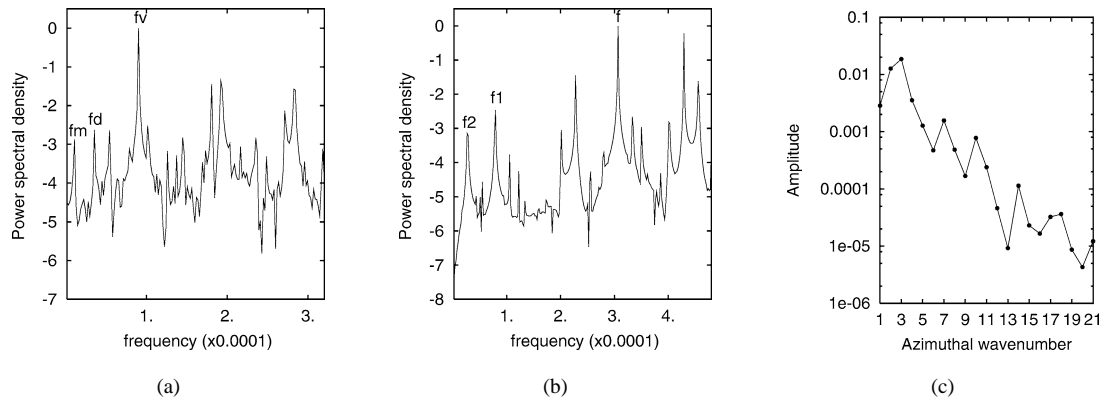


Fig. 3. Spectres de la température (a), de l’amplitude  $A_3$  (b) et de la moyenne temporelle de l’amplitude en fonction du nombre d’ondes azimutales (c) pour  $Ta = 2,20 \times 10^5$ .

Fig. 3. Power spectra of the temperature (a), of the amplitude  $A_3$  (b) and of the time-averaged azimuthal wavenumber amplitude (c) for  $Ta = 2.20 \times 10^5$ .

de celle de la vacillation d’amplitude, similairement aux observations expérimentales [5,4,6,7]. L’écoulement est également caractérisé par une oscillation monopériodique des amplitudes des vagues, comme cela est clairement représenté sur la Fig. 2(b) pour l’amplitude du nombre d’onde dominant  $A_3$ , avec une fréquence propre beaucoup plus grande que celle de la vacillation. Le spectre spatial de la moyenne temporelle de l’amplitude en fonction du nombre d’ondes azimutales est composé du nombre d’ondes dominant avec une valeur significative des nombres d’ondes voisins accompagnée de la présence de composantes non harmoniques (Fig. 2(c)). Ce comportement a été signalé comme caractéristique du phénomène de vacillation d’amplitude, alors que ce spectre est composé uniquement du nombre d’ondes dominant avec ses harmoniques dans le cas des vagues régulières permanentes [5,4,7].

Une augmentation du taux de rotation à  $Ta = 2,20 \times 10^5$  conduit à une autre instabilité de vacillation d’amplitude, dénotée *MAV* [5]. L’écoulement présente une structure semblable à la solution précédente *AV* avec un temps d’établissement beaucoup plus long, résultant de la présence d’une modulation de faible fréquence de l’amplitude des vagues. Nous observons sur l’analyse spectrale de l’évolution de la température au centre de la cavité (Fig. 3(a)) un comportement quasi-périodique à trois fréquences incommensurables. Ce comportement

chaotique est également visible sur l'évolution des amplitudes, comme présenté sur la Fig. 3(b) pour le nombre d'onde dominant  $A_3$ . L'analyse spatiale de la moyenne temporelle de l'amplitude en fonction du nombre d'ondes azimutales donne un spectre avec une valeur significative des nombres d'ondes adjacents 2 et 4 du nombre d'onde dominant. On peut noter la présence de plus en plus prépondérante de composantes non harmoniques.

Nous avons identifié par simulation numérique les phénomènes de vacillation d'amplitude se développant dans les régimes de vagues régulières pour un écoulement d'air en cavité tournante. Partant d'un écoulement de vagues permanentes  $2S$ , une augmentation progressive du taux de rotation conduit à un régime doublement périodique  $AV$  avec accrochage des fréquences suivi d'un régime chaotique  $MAV$ , avant l'apparition d'un autre écoulement de vagues permanentes  $3S$ . La présence de composantes non harmoniques dans les spectres des amplitudes indique que ces instabilités résultent de l'excitation des nombres d'ondes adjacents par la première harmonique du nombre d'ondes dominant. Les résultats obtenus sont consistants avec les observations expérimentales de Read et al. [5] pour un fluide à grand nombre de Prandtl.

## Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le Professeur P.L. Read (University of Oxford, UK) pour ses conseils tout au long de ce travail. Les résultats ont été obtenus sur le calculateur NEC-SX5 de l'IDRIS (CNRS), Orsay.

## Références

- [1] P. Maubert, A. Randriamampianina, Transition vers la turbulence géostrophique pour un écoulement d'air en cavité tournante différentiellement chauffée, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 365–370.
- [2] R. Hide, An experimental study of thermal convection in a rotating fluid, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 250 (1958) 441–478.
- [3] W.W. Fowles, R. Hide, Thermal convection in a rotating annulus of liquid: effect of viscosity on the transition between axisymmetric and non-axisymmetric flow regimes, *J. Atmos. Sci.* 22 (1965) 541–558.
- [4] R. Hide, P.J. Mason, Sloping convection in a rotating fluid, *Adv. Phys.* 24 (1975) 47–100.
- [5] P.L. Read, M.J. Bell, D.W. Johnson, R.M. Small, Quasi-periodic and chaotic flow regimes in a thermally driven, rotating fluid annulus, *J. Fluid Mech.* 238 (1992) 599–632.
- [6] P. Hignett, A.A. White, R.D. Carter, W.D.N. Jackson, R.M. Small, A comparison of laboratory measurements and numerical simulations of baroclinic wave flows in a rotating cylindrical annulus, *Quart. J. R. Met. Soc.* 111 (1985) 131–154.
- [7] P. Hignett, Characteristics of amplitude vacillation in a differentially heated rotating fluid annulus, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* 31 (1985) 247–281.
- [8] P. Le Quéré, J. Pécheux, A three-dimensional pseudo-spectral algorithm for the computation of convection in a rotating annulus, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 80 (1990) 261–271.
- [9] R.L. Pfeffer, W.W. Fowles, Wave dispersion in a rotating, differentially heated cylindrical annulus of fluid, *J. Atmos. Sci.* 25 (1968) 361–371.