



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 631–639



Étude numérique des instabilités de la phase fluide et de l'interface de solidification en croissance dirigée horizontale

El Alami Semma^{a,b}, Mohammed El Ganaoui^{c,*}, Abdelkhalek Cheddadi^b,
Patrick Bontoux^a

^a MSNM, FRE CNRS 2405, les Universités d'Aix Marseille, 38, Frédéric Joliot-Curie, 13451 Marseille cedex 13, France

^b École Mohammadia d'ingénieurs, Université Mohammed V, avenue Mohammed V, Agdal, Rabat, Maroc

^c SPCTS, UMR CNRS 6638, Université de Limoges, 123, Albert Thomas, 87060 Limoges, France

Reçu et accepté le 21 janvier 2003

Présenté par René Moreau

Résumé

L'investigation des instabilités convectives pour des fluides à faible nombre de Prandtl a fait l'objet de plusieurs études. Il s'agit ici de réaliser une extension à un bain fondu à surface libre ou rigide en changement de phase et de construire le diagramme de bifurcation correspondant. Quelques situations de contrôle à travers la chaleur latente et l'écart des conductivités solide/liquide sont considérées. L'approche de résolution adoptée est basée sur une méthode de localisation du front ayant montré une très bonne aptitude à la description des régimes convectifs en présence de changement de phase pour une configuration verticale confinée. *Pour citer cet article : E.A. Semma et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Instability of melt flow and solidification front during horizontal growth. Convective instabilities of low Prandtl number fluids are subject to various studies. The purpose here is an extension to hydrodynamic transitions in the fluid phase with a free or rigid surface under phase change and to construct the corresponding bifurcation diagram. Investigations interesting the process control by using the latent heat and the solid/liquid thermal conductivity difference are considered. The solution methodology is based on a front localisation approach showing a very good ability to describe convection regimes coupled to the phase change transition in the case of vertical solidification with confinement. *To cite this article: E.A. Semma et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Convection thermique ; Transitions ; Interface ; Surface libre

Keywords : Computational fluid mechanics ; Thermal convection ; Transitions ; Interface ; Free surface

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : ganaoui@unilim.fr (M. El Ganaoui).

Abridged English version

Convection in the melt under solidification is an important control parameter in crystal growth. It was established that striations in grown crystals are correlated to thermal field fluctuations [7]. The occurrence of an oscillatory motion has been observed experimentally [4]. A basic driving force for convection is thermal or solutal gradients in the liquid. The surface tension resulting from temperature or concentration gradients on a free surface drives the flow from regions of low surface tension to regions of high surface tension [11–18]. In particular, the transition to oscillatory flows that might be detrimental to the growth has attracted much attention from crystal growers and fluid mechanists. On the one hand, studies of oscillatory flows have been largely concentrated, without phase change, in cartesian geometry [6,7]. On the other hand the studies including the solid/liquid interface are restricted to experimental conditions configurations under external fields (gravity, rotation, magnetic, etc.), without developing the dynamic stability and bifurcation occurring in the melt and influencing the interface during the time-dependent process [9,10].

The approach developed in [14] is extended here to flows developing during horizontal Bridgman growth. A reference configuration is considered in a horizontal open domain $[0, L] \times [0, H]$ reduced by using the height H (Fig. 1), $A = L/H$ is the aspect ratio. Vertical walls are maintained at fix temperatures:

$$T(0, y) = T_C \quad \text{and} \quad T(L, y) = T_F < T_C.$$

Solidification is considered for a pure material having a melting temperature T_s ($T_F \leq T_s < T_C$). The study is carried under no growth conditions to focus on the unsteady melt due to thermal convection. $\delta T = (T_C - T_s)/A_l$ will be the reference for temperature scaling, A_l is the fluid aspect ratio. Surfaces corresponding to $y = 0$ and to $y = H$ are submitted to a centered linear thermal gradient on a length $L_{\Delta T} = x_f - x_c$ between a hot point abscissa x_c and a cold point abscissa x_f . The melt bottom ($y = 0$) and the vertical walls ($x = 0$ and $x = L$) are rigid (R). The area corresponding to $L_{\Delta T}$ on the top of the domain is able to be rigid (R) or free (L) (see Fig. 1). In the case restricted to the fluid phase, the interface is assumed with a flat shape at $T_s = T_F$. The melt is modeled as a Boussinesq fluid. The control parameter used for studying dynamic transitions is the Grashof number $Gr = g\beta(\delta T/L)H^4/\nu^2$. Using the enthalpy-porosity formulation, the transient Navier–Stokes equations are solved on a fixed grid and the solid/liquid interface is localized a posteriori [13–15].

For validation, results of a simplified configuration with aspect ratio $A = A_l = 4$ containing a low Prandtl number fluid ($Pr = 0.015$) compare well with available simulations [6,7]. The Hopf bifurcation diagram shows good agreement for transitions between mono-cellular and multi-cellular regimes [6,7,15]. For the full model with a solid/liquid interface, in the configuration with rigid surface (R), interface shapes are illustrated in Fig. 3(a) showing two kinds of behaviors: at Grashof numbers ($Gr < 10^3$), a near diffusive flow with quasi-planar interface is obtained. Increasing Gr , a two cellular flow develops. For extended case the diagram of bifurcation presents the evolution of Ψ_{\max} versus Gr (Fig. 2). The transition to the oscillatory convection is observed around $Gr_C \approx 2.25 \times 10^4$ allowing unsteady periodic flow with a main adimensional frequency $f = 12$. This frequency increases with Gr . Fig. 4 presents a periodic regime illustration ($Gr = 3 \times 10^4$, $f = 12.9$), for four instantaneous states corresponding to extreme concavity values of the solid/liquid interface, namely ΔX_i signal, showing interaction with the interface shape (Fig. 4(a)). For the free surface case (L), a mono-cellular flow develops for $Gr < 7.5 \times 10^3$. As Gr increases to 12×10^3 , the flow remains steady; however, the pattern changes to a two cells structure with a strong cell near the solid/liquid interface. Further increase in Gr to the critical point ($Gr_C = 12 \times 10^3$) causes oscillatory flow starting with a periodic regime ($f = 13$).

A major part of the present work focus on unsteadiness effect on solidification neglecting latent heat and conductivity jump at the interface. The effect of these parameters is also considered to provide control issues for growers using such configurations.

1. Introduction

L'investigation numérique des processus de solidification revêt une importance pratique pour les techniques de croissance cristalline. L'étude de ces systèmes nécessite la modélisation du transport dans des phases continues et la prise en compte des phénomènes aux interfaces [1]. La technique de Bridgman Horizontale (BH) est l'une des plus utilisées pour la croissance de cristaux semi-conducteurs [2]. Le gradient thermique horizontal est à l'origine d'écoulements complexes. La qualité du produit obtenu peut être directement liée à la morphologie de croissance affectée par les effets de convection [3,4]. Particulièrement les transitions vers des régimes oscillants ont bénéficié d'une attention particulière de la part de spécialistes de la croissance cristalline et de mécaniciens des fluides. On peut noter cependant que d'une part, plusieurs travaux numériques utilisant des méthodes de haute précision ont été consacrés à des bains fondus de faible nombre de Prandtl [5–10] mais sans prise en compte de l'interface de solidification ou avec peu d'informations sur son interaction avec le régime fluide [10]. D'autre part, les études étendues au changement de phase, sont peu informatives sur les transitions fluides car souvent centrés sur les conditions particulières de configurations expérimentales (microgravité, rotation, champ magnétique, etc.) [9].

Ce travail consiste à étudier les instabilités fluides en présence de changement de phases solide/liquide dans une configuration de Bridgman horizontale. L'approche numérique est d'abord validée en phase fluide seule à travers la reconstruction du diagramme de bifurcation d'une cavité rectangulaire [6–8]. Ensuite l'étude est étendue à la présence d'interface avec surface libre ou rigide. L'effet de certains paramètres intéressant la solidification tels que le saut d'énergie dû à la chaleur latente où le saut de conductivités à l'interface est considéré après qualification de la dynamique convective et son interaction avec le front de solidification.

2. Modèle et approximations numériques

La modélisation considérée du changement de phase en présence de convection repose sur une formulation de type enthalpie – porosité permettant de résoudre le problème numériquement sur un maillage fixe.

Le domaine rectangulaire considéré est $[0, L] \times [0, H]$ de rapport de forme $A = L/H$ (Fig. 1). Les parois verticales sont maintenues à des températures constantes : $T(0, y) = T_C$ et $T(L, y) = T_F < T_C$. La solidification est considérée pour une substance pure et le front est localisé a posteriori par l'isotherme $T = T_s$, $T_F \leq T_s < T_C$. On se place dans des conditions de non croissance (vitesse de tirage nulle) mais le front de solidification est libre de se déformer sous l'effet des paramètres physiques (chaleur latente, écart des conductivités thermiques solide–liquide) et dynamiques (écoulement au voisinage du front).

Les surfaces correspondant à ($y = 0$ et $y = H$) sont soumises à un gradient thermique constant imposé sur une longueur centrée $L_{\Delta T} = x_f - x_c$ entre un point chaud x_c et un point froid x_f :

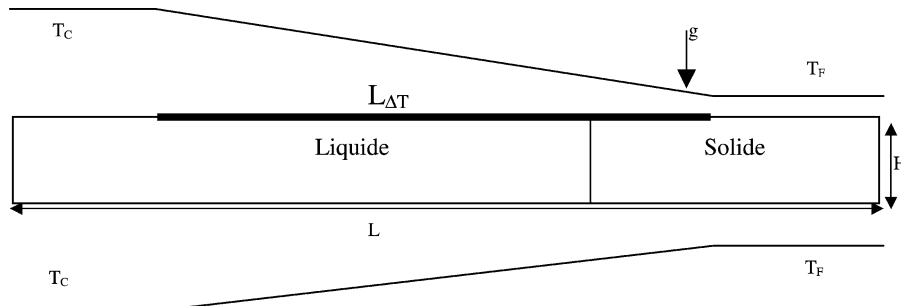


Fig. 1. Configurations de Bridgman horizontale.

Fig. 1. Horizontal Bridgman configuration.

$$\begin{aligned}
 x < x_c, \quad T(x, 0) = T(x, H) = T_C \\
 x_c \leq x \leq x_f, \quad T(x, 0) = T(x, H) = \frac{T_C - T_F}{L_{\Delta T}}(x_f - x) + T_F \\
 x > x_f, \quad T(x, 0) = T(x, H) = T_F
 \end{aligned} \tag{1}$$

Le fond du bain ($y = 0$) et les parois latérales ($x = 0$ et $x = L$) sont rigides (conditions d'imperméabilité et de non glissement). La zone $L_{\Delta T}$ de la paroi supérieure (Fig. 1) peut être dynamiquement libre ou rigide. On notera par (L) la condition de surface libre de normale n (imperméable avec glissement parfait) et par (R) la condition de surface rigide (imperméable et sans glissement).

$$(L) : \frac{\partial u_t}{\partial n} = 0 \quad \text{et} \quad u_n = 0$$

$$(R) : u_t = u_n = 0$$

Le problème est réduit sur la base d'un adimensionnement de vitesse justifié par Ostrash [12]. Sont utilisées comme valeurs de référence de la longueur, du temps, de la vitesse, de la pression et de la température respectivement H , H^2/ν , $\nu Gr^{0.5}/H$, $Gr^{0.5}\rho\nu^2/H$ et $\delta T = (T_c - T_s)/A_l$ (A_l étant le rapport de forme de la phase liquide). Les paramètres adimensionnels résultants basés sur les propriétés physiques de la phase fluide (β coefficient d'expansion thermique, ν viscosité cinématique, α diffusivité thermique et c_p chaleur spécifique) sont le nombre de Grashof $Gr = g\beta(\delta T/L)H^4/\nu^2$, le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\alpha$ et le nombre de Stefan $Ste = Cp\Delta T/L_f$, avec L_f la chaleur latente de fusion.

La résolution numérique du modèle est effectuée par une méthode de type volumes finis utilisant un schéma d'Euler implicite de second ordre pour la discrétisation temporelle. Les détails de validation et de qualification de la méthode sont rapportés dans [13–15]. Certaines variables peuvent présenter de forts gradients, ce qui nécessite l'utilisation d'un schéma de discrétisation spatiale qui soit à la fois stable et peu diffusif, un schéma de type ULTRA-QUICK qui associe un schéma convectif décentré quadratique avec une stratégie de limitation de flux a été utilisé [15,16,19].

3. Résultats des simulations

3.1. Qualification de la méthode numérique

La détermination précise des seuils oscillatoires de convection par simulation directe dépend étroitement des approximations numériques utilisées. La présente méthode est d'abord qualifiée pour un cas test. Les résultats de référence étant de haute précision correspondant à une méthode spectrale de collocation Tau-Chebyshev assurant une détermination précise des points et solutions de bifurcation [7] et ayant permis d'étendre l'ensemble des solutions déterminées par Winters [6]. Il s'agit d'une cavité rectangulaire de rapport de forme $A = A_l = 4$ contenant un fluide de faible nombre de Prandtl ($Pr = 0,015$) avec des parois horizontales rigides et adiabatiques. Une étude du maillage allant de 48×24 à 124×42 a été réalisée et la grille 60×30 a été retenue pour l'étude de la configuration purement fluide ainsi que la grille 96×32 raffinée auprès de l'interface et des parois pour la simulation des configurations avec changement de phase.

Pour les faibles Gr , l'écoulement est composé d'une seule cellule convective. En augmentant Gr , la cellule se déforme par rapport au centre du domaine et donne naissance à un régime à trois cellules co-rotatives. Ce régime met en évidence une bifurcation de Hopf au voisinage de $Gr = 35\,500$ en bon accord avec les valeurs de la littérature (38 095 pour Winters [6]). Après le point de bifurcation la solution devient instable et très sensible à la valeur de Gr . Une solution intermédiaire est également obtenue par la méthode de continuation mettant en évidence une autre branche stable du diagramme avec une solution à deux cellules co-rotatives.

3.2. Etude d'une configuration de Bridgman horizontale

Suite à ces qualifications, la configuration complète avec changement de phase solide/liquide (BH) pour un matériau de faible nombre de Prandtl ($Pr = 0,021$) a été considérée (Fig. 1). Des conditions aux limites thermiques conductrices proches de celles utilisées pour des fours de croissance sont considérées ($L_{\Delta T}/H = 5,33$) [9].

Dans le cas d'une configuration à surface supérieure rigide (R). La Fig. 2 présente le diagramme de bifurcation avec interface solide/liquide (la chaleur latente est considérée nulle). Pour les faibles Gr , l'écoulement est mono-

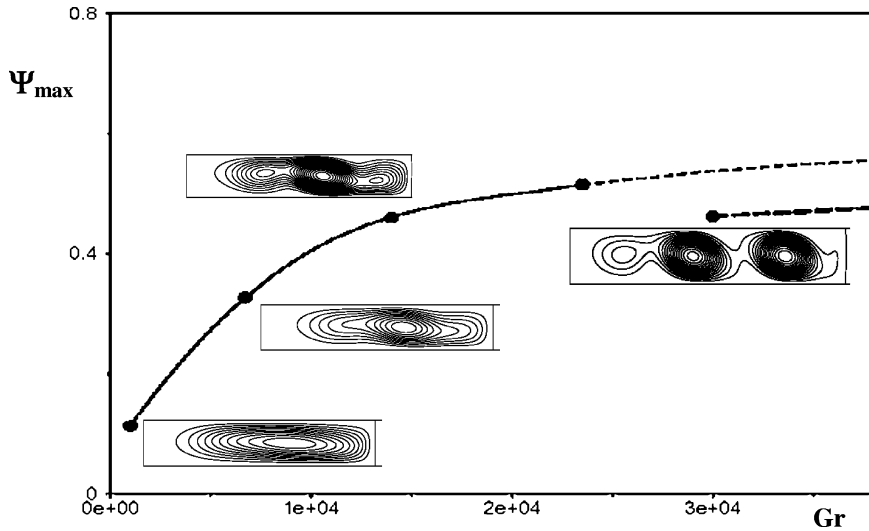


Fig. 2. Diagramme des bifurcations pour le cas avec changement de phase solide/liquide $\Psi_{max}(Gr)$, surface rigide (R).

Fig. 2. Bifurcation diagram for the phase change solid/liquid case $\Psi_{max}(Gr)$, rigid surface (R).

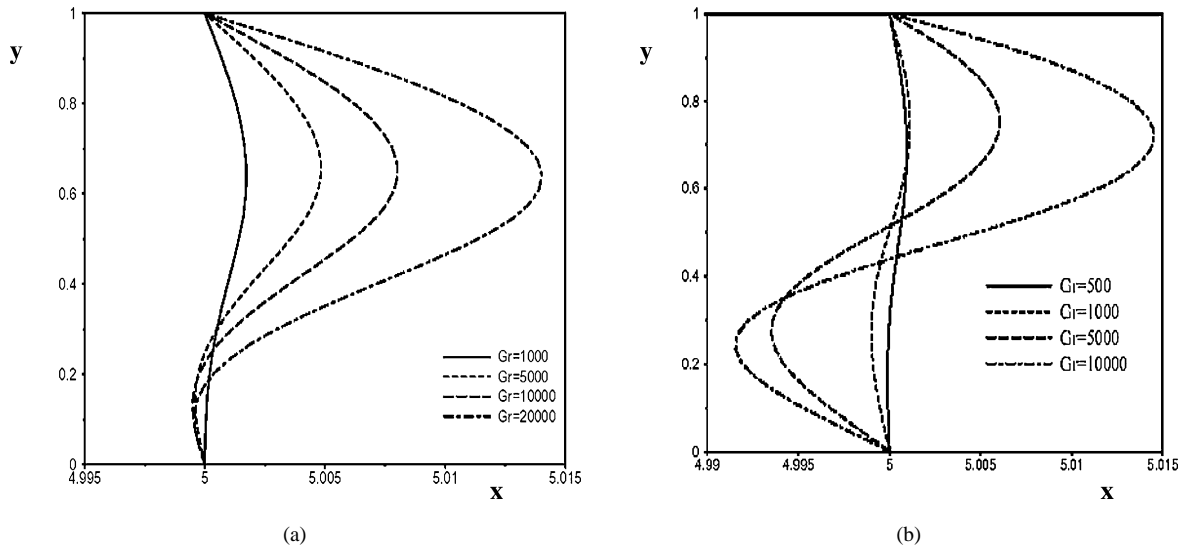


Fig. 3. Interfaces de solidification pour la branche stable directe, (a) cas rigide (R), (b) cas libre (L).

Fig. 3. Solidification interfaces corresponding to steady branch, (a) rigid case (R), (b) free case (L).

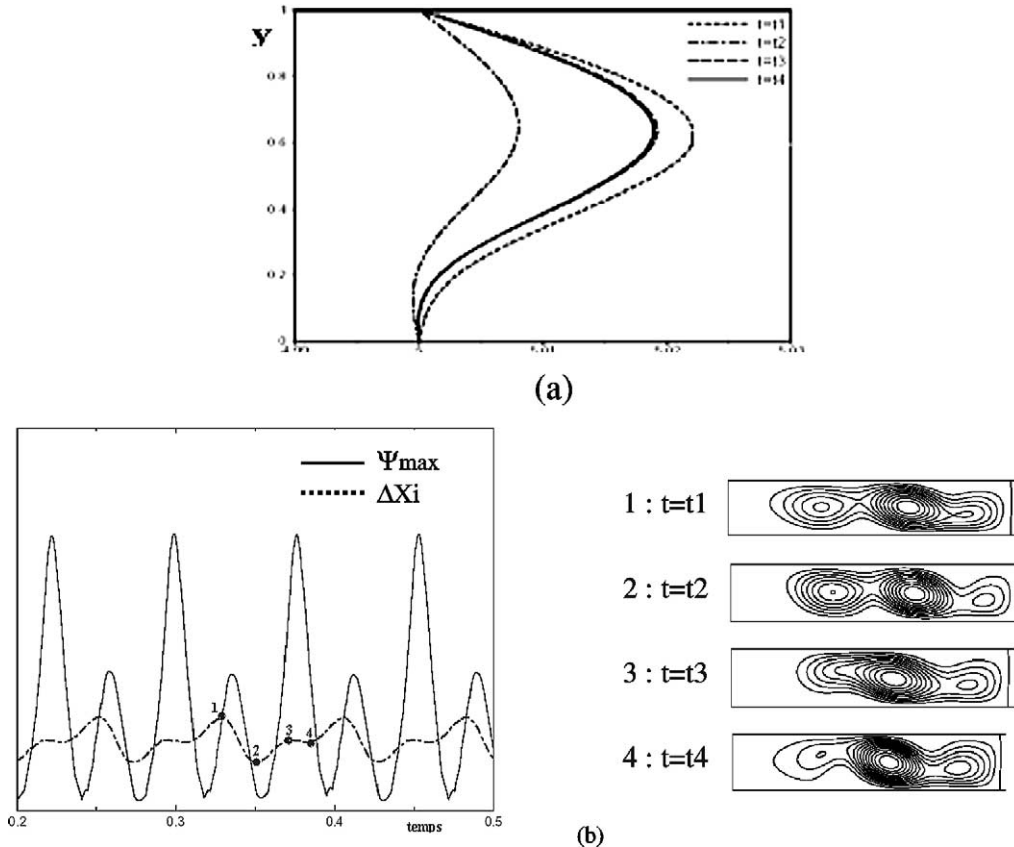


Fig. 4. Instantanées d'une période d'oscillation du régime périodique ($Gr = 3 \times 10^4$, $f = 12,9$), surface rigide (R) : (a) interfaces solide/liquide, (b) signal et structures d'écoulement.

Fig. 4. Instantaneous for an oscillation period of the periodic regime ($Gr = 3 \times 10^4$, $f = 12,9$), rigid surface (R) : (a) solid/liquid interfaces, (b) flow structures and signal.

cellulaire localisé près de l'interface où le gradient thermique est plus important (Fig. 1). Avec l'augmentation de Gr jusqu'à $2,25 \times 10^4$, il y a distorsion de l'écoulement donnant naissance dans à une cellule secondaire du côté de la zone chaude pour $Gr \in [1,4 \times 10^4, 1,5 \times 10^4]$, et à partir de $Gr = 1,5 \times 10^4$ il y a naissance d'une seconde cellule secondaire du côté de la zone froide. Dans cette configuration, les deux cellules secondaires encadrent la cellule principale. Les trois cellules occupent différentes dimensions caractéristiques du domaine fluide favorisant plus de confinement du côté de l'interface à cause de la dissymétrie des conditions aux limites thermiques contrairement au cas test adiabatique ($A = 4$) où la distorsion de l'écoulement répartit les trois cellules dans des domaines spatiaux pratiquement de même mesure. L'interface de solidification évolue d'une forme quasi-plane pour une convection faible ($Gr < 10^3$) vers un front quasi-convexe en augmentant Gr (Fig. 3).

La transition au régime oscillatoire est observée pour $Gr_C \approx 2,25 \times 10^4$ à partir duquel l'écoulement devient instable et périodique de fréquence adimensionnelle $f \approx 12$ au point critique, cette fréquence augmente avec Gr . Pour $Gr > 4 \times 10^4$, le signal $\Psi_{\max}(t)$ prend une forme complexe non périodique. D'une manière similaire au phénomène d'hystérésis observé en monophasique ($A = 4$), on peut noter une re-stabilisation de l'écoulement à partir de $Gr = 6 \times 10^4$. A partir de cet état pris comme condition initiale, un phénomène d'hystérésis est mis en évidence en diminuant Gr , il est caractérisé par deux rouleaux principaux et une cellule secondaire logée dans la zone chaude du bain fondu. Cette solution persiste jusqu'à $Gr = 2,5 \times 10^4$. La Fig. 4 présente un cas de régime périodique pour $Gr = 3 \times 10^4$ ($f = 12,9$) où ont été représentés sur une période quelques états instantanés correspondant aux va-

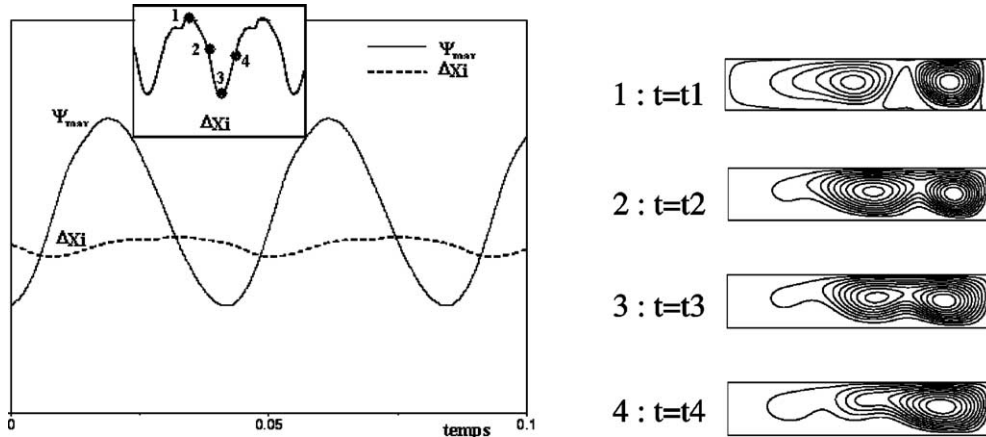


Fig. 5. Instantanées d'une période d'oscillation du régime périodique de fréquence ($f = 18$) pour différents instants avec les structure d'écoulement correspondante $Gr = 3 \times 10^4$, surface rigide (R).

Fig. 5. Instantaneous for an oscillation period of the periodic regime of frequency ($f = 18$) for various instants and flow structures corresponding $Gr = 3 \times 10^4$, free surface (L).

leurs extrêmes de la concavité du front ΔX_i évaluée comme étant l'écart entre les positions extrêmes de l'interface (à droite dans le solide et à gauche dans le liquide), le front dans ce cas est pratiquement convexe et interagit d'une manière significative avec l'écoulement. Lorsque la concavité de l'interface est maximale, la taille de la cellule secondaire du côté de faible température est réduite sous l'effet de la cellule principale.

Dans le cas d'une configuration à surface libre (L), pour les faible Gr ($Gr < 7,5 \times 10^3$) l'écoulement est stationnaire avec une structure monocellulaire des lignes de courant favorisant plus de confinement du côté de la phase solide. Lorsqu'on augmente Gr jusqu'à 12×10^3 , l'écoulement toujours stationnaire voit la naissance d'une cellule secondaire du côté de la zone chaude. En régime instationnaire, la présence de la surface libre favorise la transition vers des écoulements oscillatoires pour des seuils inférieurs à ceux constatés pour une surface rigide [7,11]. Ainsi, lorsqu'on augmente Gr au dessus du seuil de transition $Gr_C \approx 12 \times 10^3$, le régime d'écoulement devient oscillatoire périodique. En effet, les calculs effectués jusqu'à $Gr = 4 \times 10^4$ montrent que le régime est mono fréquentiel (f allant de 13 à 27,8). La Fig. 5 présente une illustration de l'évolution temporelle pour $Gr = 3 \times 10^4$ du maximum de la fonction de courant $\Psi_{\max}(t)$ et de la déformation maximale de l'interface $\Delta X_i(t)$. Quatre états instantanés pris sur une période montrent l'interaction avec le front de solidification, en particulier la déformation est maximale au contact de la cellule principale.

3.3. Effets de quelques paramètres de contrôle

Deux paramètres sont importants et agissent localement sur les gradients de température au voisinage du front de solidification affectant directement la qualité du produit obtenu [2,3] : la chaleur latente représentée par l'inverse du nombre de Stefan (Ste^{-1}), et le rapport des conductivités thermiques ($\kappa = k_s/k_l$). Dans ce qui précède ces paramètres n'ont pas été considérés ($Ste^{-1} = 0$ et $\kappa = 1$) afin de focaliser l'étude sur l'influence des transitions dynamiques sur la courbure du front. Les investigations pour différentes valeurs du nombre de Stefan ($Ste^{-1} = 0, 1 ; 5 ; 10$) montrent que l'écoulement est qualitativement insensible à la variation de la chaleur latente. Cependant, on remarque que la chaleur latente constitue un facteur amortisseur des ondulations du front augmentant ainsi l'inertie du système. En effet, dans le cas à surface rigide (R), et pour $Gr = 3,10^4$ par exemple, l'amplitude de $\Delta X_i(t)$ passe de 0,0058 pour $Ste^{-1} = 0$ à 0,0019 pour $Ste^{-1} = 10$. La même remarque a été faite pour le cas à surface libre (L), en effet, l'amplitude des oscillations de la déformation maximale $\Delta X_i(t)$ de l'interface passe de 0,0172 pour $Ste^{-1} = 0$ à 0,0069 pour $Ste^{-1} = 10$.

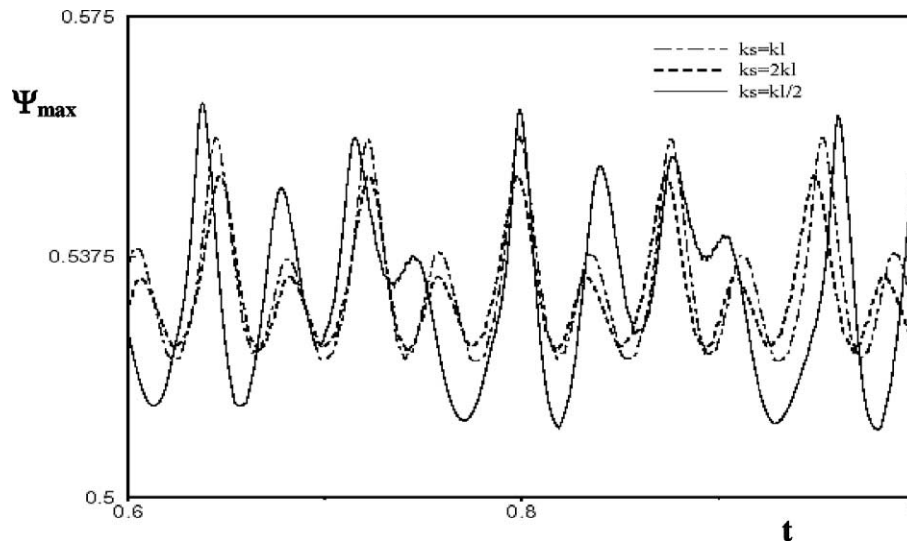


Fig. 6. Effet de l'écart de conductivités thermiques sur les oscillations de l'écoulement ($Gr = 3 \times 10^4$), cas rigide (R).

Fig. 6. Effect of the thermal conductivity ratio on the flow oscillations ($Gr = 3 \times 10^4$), rigid case (R).

L'influence de l'écart de conductivités thermiques des phases solide et liquide a été étudiée pour $\kappa = 2$, $\kappa = 1$ et $\kappa = 1/2$. Il est à noter que ces rapports sont rencontrés en situations expérimentales (par exemple $\kappa = 1$ pour le Gallium, $\kappa = 2$ pour CdGeAs_2). En régime stationnaire, l'écoulement est pratiquement insensible au paramètre κ . La valeur Gr_c caractérisant la transition au régime oscillatoire augmente légèrement avec κ . En régime oscillatoire, l'amplitude des oscillations de Ψ_{\max} dépend de κ . En effet, comme c'est illustré sur la Fig. 6 présentant l'évolution de $\Psi_{\max}(t)$ pour $Gr = 3 \cdot 10^4$, les ondulations diminuent et changent de forme avec l'augmentation de κ . Ceci peut être dû en partie au changement des dimensions du bain fondu introduit par la grande déformation du front de solidification causée par la différence des conductivités thermiques (convexe pour $\kappa > 1$ et concave pour $\kappa < 1$).

4. Conclusion

Une analyse par voie numérique des instabilités et bifurcations dans un bain fondu de croissance cristalline a été réalisée en présence de surface libre ou rigide. La méthode de localisation du front à base d'une formulation de type enthalpie-porosité a permis d'étendre l'analyse à la présence du front de solidification. Les instabilités d'interface en interaction avec les régimes étudiés sont déterminées avec une précision comparable aux méthodes spectrales. Des surfaces conductrices libres ou rigides ont été considérées. L'effet de quelques paramètres de contrôle liés au choix des matériaux (chaleur latente, écart de conductivités thermiques solide/liquide) sur le régime d'écoulement et les fluctuations du front de solidification a été analysé.

Cette étude présente une première extension d'investigations numériques précises des instabilités et bifurcations vers une prise en compte du front de solidification. Les éléments d'analyse présentés dans ce papier peuvent être étendus à des surfaces libres déformables et au paramètre de Marangoni pour la convection thermo-capillaire qui en résulte de la prise en compte des tensions de surface.

Remerciements

Remerciements au centre IDRIS du CNRS pour les moyens de calcul et au CNES pour son soutien.

Références

- [1] W. Shyy, Computational Modelling for Fluid Flow and Interfacial Transport, Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [2] E. Monberg, in: D.T.J. Hurlle (Ed.), Handbook of Crystal Growth 2A: Basic Techniques, North-Holland, Amsterdam, 1994, p. 52.
- [3] J.C. Brice (Ed.), The Growth of Crystals from Liquids, North-Holland, New York, 1976.
- [4] D.T.J. Hurlle, E.D. Jakeman, C.P. Johnson, J. Fluid Mech. 64 (1974) 565.
- [5] M.J. Crochet, F.T. Geyling, J.J. Van Schaftingen, Int. J. Numer. Methods Fluids 7 (1987) 29.
- [6] K.H. Winters, Int. J. Numer. Methods Engrg. 25 (1988) 401.
- [7] J.P. Pulicani, E.C. Del Arco, A. Randriamampianina, P. Bontoux, R. Peyret, Spectral simulations of oscillatory convection at low Prandtl number, Int. J. Numer. Methods Fluids 10 (1990) 481.
- [8] B. Roux (Ed.), Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 27, 1990.
- [9] H. De Groh III, Interface shape and convection during solidification and melting of Succinonitrile, NASA Technical Memorandum 106487, 1994.
- [10] H. Zhou, A. Zebib, Oscillatory convection in solidifying pure metal, Numer. Heat Transfer Part A 22 (1992) 435–468.
- [11] R. Sampath, N. Zabaras, Numerical study of convection in the directional solidification of a binary alloy driven by the combined action of buoyancy surface tension and electromagnetic forces, J. Comp. Phys. 168 (2001) 384–411.
- [12] S. Ostrach, Convection phenomena at reduced gravity of importance for materials processing, in: Proc. Second Eur. Symp. On Material Sciences in Space, 1976, ESA-SP-114.
- [13] M. El Ganaoui, Ph. Larroudé, D. Morvan, P. Bontoux, Numerical solidification of gravitationnal effects during directional solidification, Adv. Space Res. 22 (8) (1998) 1175–1178.
- [14] M. El Ganaoui, P. Bontoux, D. Morvan, Localisation d'un front de solidification en interaction avec un bain fondu instationnaire, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Iib 306 (1999) 41–48.
- [15] M. El Ganaoui, A. Lamazouade, P. Bontoux, D. Morvan, Computational solution for fluid flow under solid/liquid phase change conditions, Int. J. Computers and Fluids (2002) 539–556.
- [16] R. Eymard, R. Herbin, T. Gallouet, Finite volume methods, in: P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII, North-Holland, 2000.
- [17] C.W. Lan, M.K. Chen, M.C. Liang, Bifurcation and stability analyses of horizontal Bridgman crystal growth of a low Prandtl number material, J. Crystal Growth 187 (1998) 303–313.
- [18] D. Schwabe, Surface tension driven flow in crystal growth melts, in: H.C. Freyhardt (Ed.), Crystals: Growth, Properties and Applications, Vol. 11, Springer-Verlag, Berlin, 1988, p. 75.
- [19] B.P. Leonard, S. Mokhtari, Beyond first order upwinding: the ULTRA-SHARP alternative for nonoscillatory steady-state simulation of convection, Int. J. Numer. Methods Engrg. 30 (1990) 729–766.