



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 745–752



Sur la réponse transitoire d'une couche solidaire d'un milieu semi-infini ; application à un impact sur le thorax

Quentin Grimal, Alexandre Watzky*, Salah Naïli

Laboratoire de mécanique physique, CNRS UMR 7052, faculté des sciences et technologie, Université Paris XII–Val de Marne, 61, avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil cedex, France

Reçu le 11 octobre 2002 ; accepté après révision le 27 juillet 2003

Présenté par Robert Dautray

Résumé

La théorie des rayons généralisés est un outil privilégié pour l'étude de la réponse transitoire des milieux stratifiés élastiques. Elle fournit des solutions exactes quelle que soit la durée de l'excitation, i.e. pour tous les domaines de fréquence. Cette Note s'inscrit dans le cadre de la modélisation d'un impact non-pénétrant sur le thorax. On étudie un modèle simplifié de la paroi thoracique – une couche élastique reposant sur un milieu semi-infini – soumise à une impulsion de durée variable. On vérifie notamment que, pour une durée d'impulsion suffisamment grande, la réponse calculée est en accord avec celle donnée par la théorie classique des plaques. *Pour citer cet article : Q. Grimal et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On the transient response of a layer welded to a half-space; an investigation of impact on the thorax. The theory of generalized rays is dedicated to the investigation of the transient response of elastic layered media. It yields exact solutions, whatever the duration of the applied impulse (i.e., for any frequency content of the excitation). This Note is part of a research project on the modeling of non-penetrating impact on thorax. We investigate a simplified model of the thoracic wall – a layer welded to a semi-infinite medium – submitted to an impulse of variable duration. Among other things, it is found that the response computed for a “long” impulse is consistent with a result of the classical plate theory. *To cite this article: Q. Grimal et al., C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Ondes ; Milieu stratifié ; Rayons généralisés ; Impact ; Plaque ; Lésion ; Thorax

Keywords : Waves ; Layered media ; Generalized rays ; Impact ; Plate ; Injury ; Thorax

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : grimal@univ-paris12.fr (Q. Grimal), watzky@univ-paris12.fr (A. Watzky), naili@univ-paris12.fr (S. Naïli).

Abridged English version

Lungs may be seriously injured during high-velocity thoracic impact [3]. In this Note we present an idealized model that aims at describing the motion of the thoracic wall, the loading of the lung being due to this motion.

The model (see Fig. 1) is a linearly elastic structure made of a layer – medium 1 – of constant thickness h , welded to a half-space – medium 2. Basic equations and boundary conditions are given by (1)–(3). A time-dependant point force $\mathbf{f} = \sigma_0 \phi(t) \mathbf{x}_3$ acts at the free surface. Mechanical properties are collected in Table 1. We investigate the response of medium 1 on axis \mathbf{x}_3 in terms of the displacement u_3 and the velocity v_3 .

The method of solution uses the theory of generalized rays (GR) and the Cagniard–de Hoop (CdH) method [4–7]. Algebraic manipulations of Eqs. (1)–(3) in a Laplace–Fourier transform domain leads to a system of six equations (second part of (5)) which solutions are the amplitudes of upgoing and downgoing waves, of different polarizations, propagating in medium 1. Departing from (5), the solution is formally written in the form (7) so that the CdH method can be used [8]. In (7), it is manifest that the solution is a sum of many waves multiply reflected at the interfaces (\mathbb{R} is a matrix containing plane waves reflection coefficients, and \mathbf{s} represents the amplitude of the waves generated at the source level). Although the summation in (7) is infinite, the exact time-domain solution in a given time window is obtained by summing a finite number of terms. The method used here is a systematic mean to derive a typical GR solution. To each value of k corresponds the group of waves that has undergone k reflections. Upon using the CdH method, the contribution of one GR in the transform domain (8) is brought back to the space–time domain (9) (where all the quantities in (9) have closed-form expressions).

For a unit step loading $\mathbf{f} = H(t) \mathbf{x}_3$, u_3 is shown in Fig. 2; discontinuities associated with various wave arrivals are manifest. Plots in Figs. 3 and 4 were obtained after convolution of Green’s functions (see Fig. 2) with a “Blackman pulse” [5] of duration $T = 200 \mu\text{s}$ and $T = 2 \mu\text{s}$, respectively. The minimum travel time of a wave through medium 1 is $t_c = 12 \mu\text{s}$. The two loading cases illustrate the “low-frequencies” response ($T \gg t_c$) and the “wave-like” response ($T \ll t_c$) of medium 1. Because medium 2 is very soft in comparison to medium 1, the response of a plate (10), obtained with the classical plate theory [9] is in good agreement with the “low-frequencies” response of medium 1 (Fig. 3). The method of solution enables the calculation of both the “wave-like” and the lower frequency response of the structure, without any approximations. The model may be used to predict the formation of a shock wave in the lung ($v_3 >$ wave velocity in medium 2) depending on the impact duration T .

1. Introduction

Lorsque le thorax subit un choc très bref (e.g. projectile arrêté par un gilet pare-balles), les poumons sont susceptibles d’être lésés [3]. Cette Note fait suite à [1,2] dans lesquelles on décrivait, dans un modèle simplifié du thorax, la transmission d’une onde à l’interface paroi thoracique-poumon. On étudie ici, aidés de la même méthode de résolution, le mouvement de la paroi thoracique soumise à une impulsion ponctuelle, afin d’élucider les caractéristiques du chargement des poumons. Le modèle permet une description plus complète que dans les précédentes notes au sens où il prend en compte les multiples réflexions des ondes « piégées » dans la paroi thoracique ; soit, en d’autres termes, le mouvement d’ensemble de la paroi. Sur le plan technique, on met en œuvre la théorie des rayons généralisés en prenant en compte plus de 10^6 rayons.

2. Modélisation

La position est repérée à l’aide des coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans le repère cartésien orthonormé $R(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$. Le modèle représenté Fig. 1 est une structure linéairement élastique, non bornée dans les directions \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 , constituée d’une couche – milieu 1 – d’épaisseur constante h , et d’un milieu semi-infini – milieu 2. Les milieux sont homogènes et isotropes. La surface libre coïncide avec le plan $x_3 = 0$. Les milieux sont soudés (déplacements et contraintes normales continus) sur le plan $x_3 = h$. Une force ponctuelle $\mathbf{f} = \sigma_0 \phi(t) \mathbf{x}_3$, où σ_0 est l’amplitude et $\phi(t)$ l’histoire, est appliquée en O .

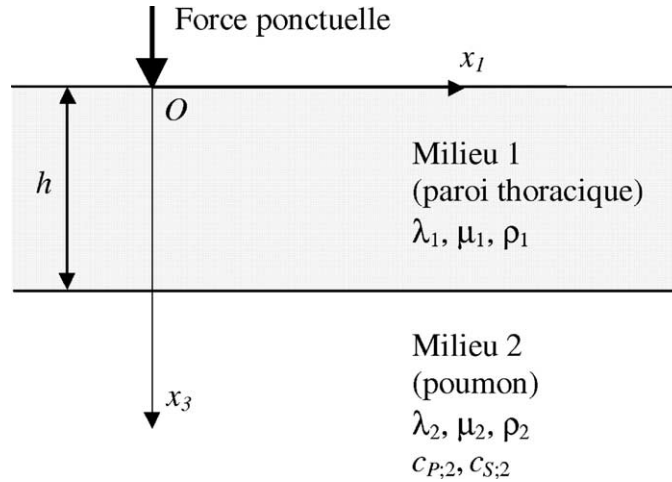


Fig. 1. Configuration géométrique du modèle.

Fig. 1. Model geometry.

Les propriétés élastiques sont caractérisées par les coefficients de Lamé λ et μ , et la masse volumique est notée ρ . La réponse de la structure est étudiée en termes des composantes σ_{ij} du tenseur de contrainte de Cauchy et de la vitesse v_i des particules.

En négligeant les forces de volume, l'équation du mouvement et la dérivée par rapport au temps de la loi de Hooke, dans chaque milieu, s'écrivent respectivement

$$\partial_j \sigma_{ij} - \rho \partial_t v_i = 0, \quad \partial_t \sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} \partial_p v_q - \mu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) = 0 \quad (1)$$

où ∂_j et ∂_t désignent respectivement les dérivées partielles par rapport à x_j et au temps t , et où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. La convention de sommation d'Einstein est utilisée. La condition sur le plan $x_3 = 0$ s'écrit

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, 0, t) = \sigma_{23}(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, 0, t) = \sigma_0 \phi(t) \delta(x_1) \delta(x_2) \quad (2)$$

où $\delta(x_i)$ est l'impulsion de Dirac. La condition à l'interface impose

$$v_i^{(1)}(x_1, x_2, h, t) = v_i^{(2)}(x_1, x_2, h, t), \quad \sigma_{i3}^{(1)}(x_1, x_2, h, t) = \sigma_{i3}^{(2)}(x_1, x_2, h, t), \quad i = 1, \dots, 3 \quad (3)$$

où les exposants « (1) » et « (2) » se rapportent aux milieux. Enfin, la structure est au repos pour $t \leq 0$.

3. Méthode de résolution

La théorie des rayons généralisés (RG) et la méthode de Cagniard–de Hoop (CdH) [4–7] sont les principaux outils utilisés pour la résolution. Une première étape consiste à trouver la solution du problème, donné par (1)–(3), dans un domaine de Laplace–Fourier dual du domaine temps–espace. Une transformée de Laplace des équations par rapport au temps introduit le paramètre p , et deux transformées de Fourier par rapport à x_1 et x_2 , les paramètres pk_1 et pk_2 . La résolution est faite pour six inconnues définissant le vecteur $\mathbf{b} = (v_1, v_2, v_3, -\sigma_{13}, -\sigma_{23}, -\sigma_{33})$. On montre que la solution qui vérifie (1) est solution du système [5] : $\partial_3 \tilde{\mathbf{b}} = -pA\tilde{\mathbf{b}}$, où $\tilde{\mathbf{b}}$ est le dual de \mathbf{b} dans le domaine transformé et A est une matrice dont les coefficients sont fonctions des propriétés du milieu ainsi que de k_1 et k_2 . Soient D la matrice des vecteurs propres de A et λ_n ($n = 1, \dots, 6$) ses valeurs propres. En posant $\tilde{\mathbf{b}} = D\bar{\mathbf{w}}$, le système est réécrit sous la forme $\partial_3 \bar{\mathbf{w}} = -p\Lambda\bar{\mathbf{w}}$, où Λ est la matrice diagonale dont les composantes sont les λ_n . Les six solutions scalaires \bar{w}_n ont la structure d'ondes planes hétérogènes se propageant dans la direction \mathbf{x}_3 (les λ_n sont les « lenteurs verticales », i.e. le long de \mathbf{x}_3 , de ces ondes planes) [5] :

$$\bar{w}_n = w_n \times \exp[-p\lambda_n x_3] \quad (4)$$

L'ordonnement des vecteurs propres dans D est choisi tel que les composantes de $\bar{\mathbf{w}}^- = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ (respectivement $\bar{\mathbf{w}}^+ = (\bar{w}_4, \bar{w}_5, \bar{w}_6)$) correspondent aux ondes se propageant dans le sens des x_3 décroissant (respectivement croissant), avec des polarisations longitudinale, transverse verticale et transverse horizontale.

Le problème a neuf inconnues de la forme (4), regroupées dans trois vecteurs de dimension trois – notés $\mathbf{w}^{(1)-}$, $\mathbf{w}^{(1)+}$ et $\mathbf{w}^{(2)+}$ (les amplitudes $\mathbf{w}^{(2)-}$ sont nulles car il n'y a pas d'ondes se propageant dans le sens des x_3 décroissant dans le milieu 2) –, à déterminer avec les conditions aux limites (2) et (3). Ces conditions conduisent aux systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} D_{21}^{(1)} & D_{22}^{(1)} & 0 \\ \bar{D}_{11}^{(1)} & \bar{D}_{12}^{(1)} & -D_{12}^{(2)} \\ \bar{D}_{21}^{(1)} & \bar{D}_{22}^{(1)} & -D_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{w}}^{(1)-} \\ \mathbf{w}^{(1)+} \\ \mathbf{w}^{(2)+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 \phi(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D_{21}^{(1)} & D_{22}^{(1)} \\ D_a & D_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}^{(1)-} \\ \mathbf{w}^{(1)+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

où le premier donne la solution dans toute la structure tandis que le second suffit pour étudier le milieu 1 – c'est ce dernier système qui est utilisé dans la suite. Dans (5), les $D_{IJ}^{(1),(2)}$ ($I, J = 1, 2$) sont des sous-matrices de D , $D_a = \bar{D}_{11}^{(1)} - D_{12}^{(2)}(D_{22}^{(2)})^{-1}\bar{D}_{21}^{(1)}$, $D_b = \bar{D}_{12}^{(1)} - D_{12}^{(2)}(D_{22}^{(2)})^{-1}\bar{D}_{22}^{(1)}$ (les sous-matrices notées avec une barre contiennent des termes de phase issus de la forme (4) des solutions).

On utilise dans la suite une écriture concise du deuxième système de (5) : $\mathbb{D} \mathbf{w}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}$. La solution dans le domaine transformé est alors formellement $\mathbf{w}^{(1)} = \mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$ (on peut montrer que \mathbb{D} est inversible); la solution dans le domaine temps-espace peut être obtenue en calculant directement les transformées inverses, mais cette procédure ne donne, dans le cas général, que des solutions approchées [10,8]. En s'inspirant de la procédure proposée par Lee et Ma [8], la forme concise de la solution est modifiée de manière à pouvoir utiliser la méthode de CdH (qui évite le calcul de la transformée inverse de Laplace); cette procédure fournit une solution analytique *exacte* du problème d'élastodynamique – valable quel que soit le domaine de fréquence. On décompose \mathbb{D} en la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice antidiagonale par blocs 3×3 , respectivement notées \mathbb{G} et \mathbb{S} , pour construire

$$\mathbb{R} = -\mathbb{S}^{-1} \mathbb{G} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathbb{R}}_{II} \\ \mathbb{R}_I & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

où \mathbb{R}_I et $\bar{\mathbb{R}}_{II}$ sont des matrices 3×3 dont les coefficients sont identifiables aux coefficients de réflexion des ondes planes sur les surfaces $x_3 = 0$ et $x_3 = h$ respectivement. En utilisant un développement en série de puissances de matrices, la solution dans le milieu 1 est écrite sous la forme

$$\mathbf{w}^{(1)} = (\mathbb{I} - \mathbb{R})^{-1} \mathbf{s} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{R}^k \mathbf{s} \quad (7)$$

où $\mathbf{s} = \mathbb{S}^{-1} \boldsymbol{\sigma}$ contient les amplitudes des différentes ondes générées par la force ponctuelle, et \mathbb{I} est la matrice identité. On peut montrer que la série est convergente [8]. La somme (7) est infinie, mais, au retour dans le domaine temps-espace, il apparaît que la somme tronquée est la solution exacte, valable pendant une certaine durée après le début de l'excitation (les termes ignorés correspondent aux ondes qui arrivent après le temps d'observation). Le nombre de termes à prendre en compte augmente avec le temps d'observation. La solution (7) est équivalente à celle que l'on peut construire à l'aide de la théorie des RG – la démarche suivie ici permet d'obtenir de manière systématique les contributions (associée chacune à un RG) dont la somme est la solution. Chaque valeur de k correspond au groupe des ondes qui ont subi k réflexions; en particulier, le groupe $k = 0$ est constitué des deux ondes directes (longitudinale et transverse), solutions du problème classique de Lamb (force ponctuelle agissant à la surface d'un milieu semi-infini). Chaque terme de la somme (7) s'écrit formellement

$$\tilde{b}_i^{RG} = D_{il}^{(1)} P_{s_r} \exp \left[-p \left(\sum_k \lambda_{P,sh} \pm |\lambda_l| x_3 \right) \right] \quad (8)$$

où $D_{il}^{(1)}$ est associé à la polarisation de l'onde (repérée par l) au niveau du récepteur, \mathbf{P} est un produit de coefficients – scalaires – de réflexion, s_r est l'amplitude de l'onde (de polarisation repérée par r) émise à la source, et où l'exponentielle porte l'information de phase : le terme en facteur de p représente un temps de trajet de la source au récepteur. À partir de (8), on obtient la solution dans le domaine temps–espace en appliquant la méthode de CdH ; pour un récepteur sur l'axe x_3 , la méthode fournit une solution analytique explicite [11], et une contribution s'écrit finalement

$$b_i^{RG}(x_3, t) = -\frac{1}{2\pi} \partial_{t_i} \phi(t) * \Re [D_{il}^{(1)} \mathbf{P} s_r S \partial_t S] \tag{9}$$

où S est une fonction du temps, et « \Re » et « $*$ » désignent la partie réelle et le produit de convolution.

Tableau 1

Paramètres mécaniques de la structure. c_S et c_P sont respectivement les vitesses des ondes transverses et longitudinales (les indices et les exposants 1 et 2 sont relatifs aux milieux 1 et 2)

Table 1

Mechanical parameters for the structure. c_S and c_P are the pressure and shear waves speeds, respectively (1 and 2 are associated with media 1 and 2)

λ_1 (MPa)	μ_1 (MPa)	ρ_1 (kg·m ⁻³)	C_S^1 (m·s ⁻¹)	C_P^1 (m·s ⁻¹)	λ_2 (MPa)	μ_2 (MPa)	ρ_2 (kg·m ⁻³)	C_S^2 (m·s ⁻¹)	C_P^2 (m·s ⁻¹)
3285	821	1750	685	1678	0,4	0,26	600	21	40

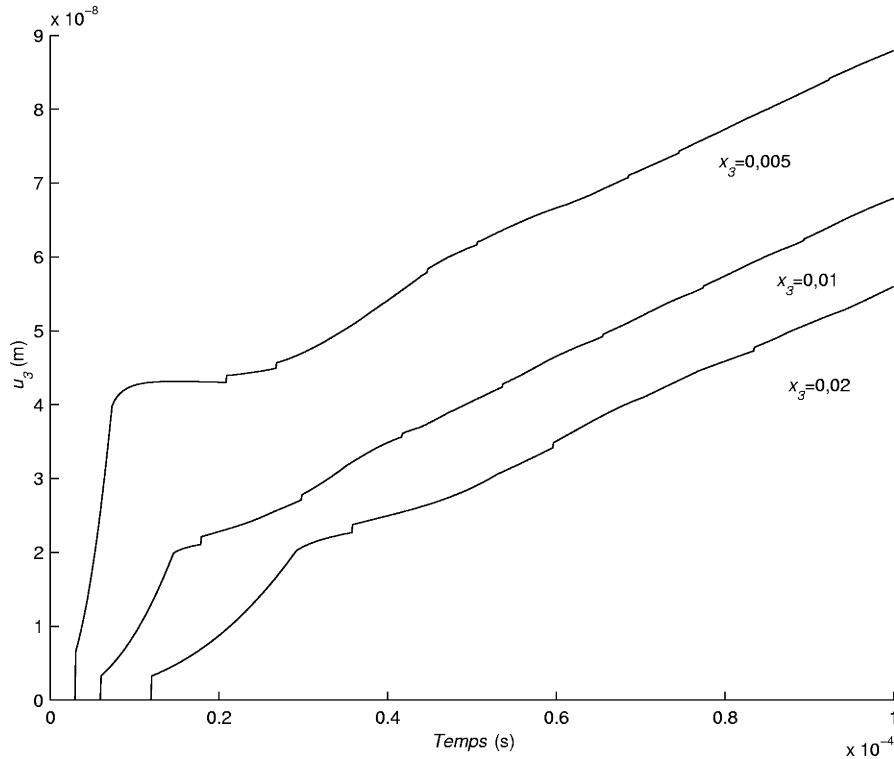


Fig. 2. Déplacement $u_3(t)$ aux récepteurs situés à $x_3 = 0,005$ m, $x_3 = 0,01$ m et $x_3 = 0,02$ m.

Fig. 2. Displacement $u_3(t)$ at the three receivers' locations $x_3 = 0.005$ m, $x_3 = 0.01$ m and $x_3 = 0.02$ m.

4. Résultats

La réponse à un récepteur du milieu 1, dans une fenêtre temporelle donnée, est une somme finie de termes de la forme de (9). La méthode présentée Section 3 a été mise en œuvre dans un programme de calcul numérique. Tous les RG nécessaires sont engendrés et leur amplitude est calculée, à chaque instant, à partir des formules analytiques. Le nombre de RG à prendre en compte augmente très rapidement avec le temps d'observation ; heureusement, de nombreux rayons ayant la même expression formelle (9), il suffit d'en calculer un nombre réduit (e.g. pour $k = 10$ et $k = 18$, parmi les 1024 et 262 144 RG à prendre en compte, 264 et 1948 sont calculés, respectivement). Les résultats présentés correspondent à des temps de calculs de moins d'une heure sur un ordinateur de type PC standard.

Les paramètres mécaniques des milieux 1 et 2 sont regroupés dans le Tableau 1. La force appliquée est d'amplitude unité. Pour $\phi(t) = H(t)$, où $H(t)$ est la fonction de Heaviside, $b_3 = \sum b_3^{RG}$ est le déplacement u_3 ; il est représenté Fig. 2 pour trois récepteurs sur x_3 . Les discontinuités correspondent aux temps d'arrivées des différentes ondes ; le palier (surtout visible pour $x_3 = 0,005$), après l'arrivée du premier groupe de rayons, correspond à la solution statique obtenue pour une force normale appliquée sur un demi-espace. La réponse à une impulsion ($\phi(t)$ est une « fenêtre de Blackman » [5]) est obtenue après convolution, comme indiquée dans (9). Les vitesses $v_3(t)$ à différents récepteurs du milieu 1 sont tracées Figs. 3 et 4 pour des impulsions de durées $T = 200 \mu\text{s}$ et $T = 2 \mu\text{s}$, respectivement.

Le rapport entre le temps minimum nécessaire à une onde pour traverser le milieu 1 $t_c = h/c_P$, où c_P est la vitesse des ondes longitudinales ($t_c = 12 \mu\text{s}$ avec les paramètres de l'étude), et la durée de l'impulsion T ,

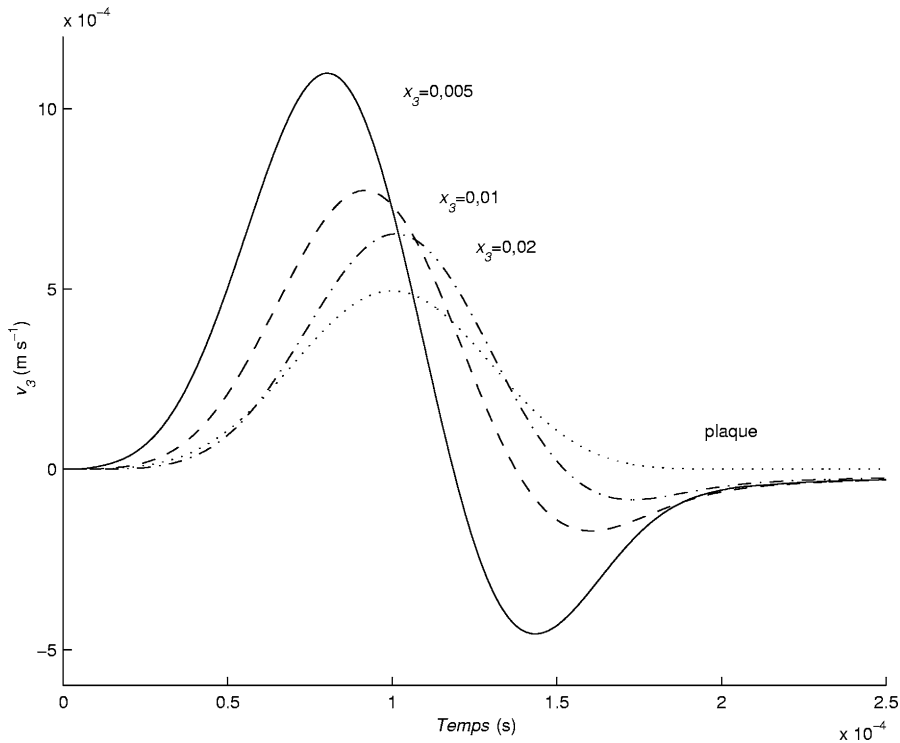


Fig. 3. Vitesse $v_3(t)$ aux récepteurs situés à $x_3 = 0,005 \text{ m}$ (—), $x_3 = 0,01 \text{ m}$ (- -) et $x_3 = 0,02 \text{ m}$ (- · -), pour une impulsion de durée $T = 200 \mu\text{s}$. La réponse donnée par la théorie classique des plaques est tracée pour comparaison (· · ·).

Fig. 3. Velocity $v_3(t)$ at the three receivers' locations $x_3 = 0.005 \text{ m}$ (—), $x_3 = 0.01 \text{ m}$ (- -) and $x_3 = 0.02 \text{ m}$ (- · -) with $T = 200 \mu\text{s}$. The response given by the classic plate theory is shown for comparison (· · ·).

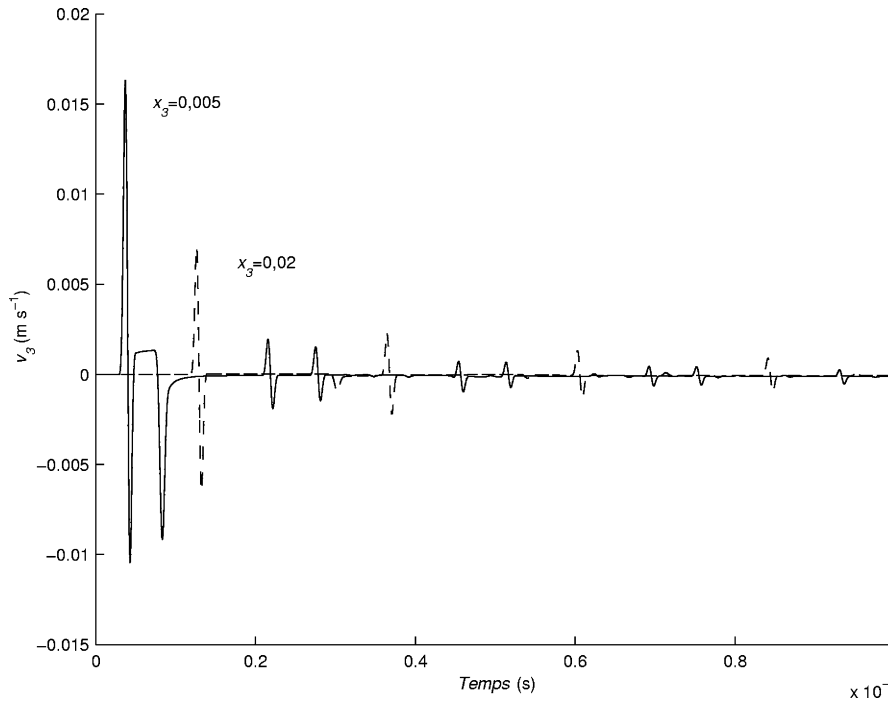


Fig. 4. Vitesse $v_3(t)$ aux récepteurs situés à $x_3 = 0,005$ m (—) et $x_3 = 0,02$ m (- -), pour une impulsion de durée $T = 2 \mu\text{s}$.

Fig. 4. Velocity $v_3(t)$ at the two receivers' location $x_3 = 0.005$ m (—) and $x_3 = 0.02$ m (- -) with $T = 2 \mu\text{s}$.

conditionne la nature de la réponse. Si $T \gg t_c$, le milieu 1 est sollicité de manière relativement homogène, i.e. à « basses fréquences » ; si $T \ll t_c$, des phénomènes typiques de la propagation des ondes (interférences...) dominent. Les tracés pour $T = 200 \mu\text{s}$ (Fig. 3) et $T = 2 \mu\text{s}$ (Fig. 4) illustrent respectivement les deux types de réponses.

Les paramètres mécaniques de la structure sont tels que le milieu 2 est très « mou » devant le milieu 1 ; en conséquence, la réponse du milieu 1 calculée dans la configuration représentée Fig. 1 est très peu différente de celle du milieu 1 isolé (i.e. le milieu 2 est le vide). Ainsi, sa réponse est assimilable à la réponse d'une plaque non supportée. On compare Fig. 3 la réponse « basses fréquences » du milieu 1 avec celle d'une plaque, donnée par la théorie classique des plaques [9]

$$v_3(0, t) = \frac{P}{8\sqrt{D\rho h}}\phi(t), \quad \text{où } D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \tag{10}$$

La solution issue de la théorie des plaques est d'amplitude et de forme comparables à celle calculée à l'aide la théorie des RG pour $T \gg t_c$.

L'ensemble des paramètres de l'application biomécanique place la réponse du milieu 1 dans la zone intermédiaire où elle n'est bien décrite, ni en termes d'ondes (puisqu'il faut sommer les contributions de plusieurs milliers de rayons), ni par une théorie – comme la théorie classique des plaques – qui néglige la propagation des ondes dans l'épaisseur et donne seulement une réponse globale. Avec la théorie des RG, tout le spectre des réponses – « basses fréquences » à « hautes fréquences » – peut être étudié dans le même cadre théorique.

Le mouvement de la surface inférieure ($x_3 = h$) du milieu 1 (paroi thoracique) détermine la sollicitation du milieu 2 (poumon) où la vitesse de propagation des ondes est très faible. Si $v_3(x_3 = h)$ dépasse cette vitesse, une onde de choc, potentiellement dangereuse [3], est induite dans le poumon. Le modèle est utile pour quantifier les conditions probables (en termes d'amplitude de la force et de la durée de l'impulsion) de formation d'une onde de choc dans le poumon.

Remerciements

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat avec la Délégation Générale pour l'Armement.

Références

- [1] Q. Grimal, A. Watzky, S. Naïli, Impact non pénétrant sur le thorax : une contribution à l'étude de la propagation des ondes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. IIB 329 (2001) 655–662.
- [2] Q. Grimal, S. Naïli, A. Watzky, Impact non-pénétrant sur le thorax : influence de la courbure sur la propagation des ondes, C. R. Mecanique 330 (2002) 569–574.
- [3] Y.C. Fung, Biomechanics Motion, Flow, Stress, and Growth, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [4] Y. Pao, R. Gajewski, The Generalised Ray Theory and Transient Response of Layered Elastic Solids, in: Physical Acoustics, Vol. 13, Mason, 1977.
- [5] J.H.M.T. Van Der Hijden, in: Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media, Vol. 32, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [6] K. Aki, P.G. Richard, Quantitative Seismology: Theory and Methods, Freeman, San Francisco, 1980.
- [7] B.L.N. Kennett, Seismic Wave Propagation in Stratified Media, Cambridge University Press, 1983.
- [8] G.S. Lee, C.C. Ma, Transient elastic waves propagating in a multi-layered medium subjected to in-plane dynamic loadings. I. Theory, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 456 (2000) 1355–1374.
- [9] M.A. Medick, On classical plate theory and wave propagation, J. Appl. Mech. 28 (1961) 223–228.
- [10] J.D. Achenbach, Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [11] Q. Grimal, S. Naïli, A. Watzky, A study of transient elastic wave propagation in a bimaterial modeling the thorax, Int. J. Solids Structures 39 (2002) 5345–5369.