



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 332 (2004) 161–168



Évolution quasi-statique d'un fil souple inextensible sur un plan avec frottement sec : cas discret

Hafid Sayah

Université Mohammed V, faculté des sciences, département de mathématiques et d'informatique, avenue Ibn Batouta, boîte Postale N° 1014, Rabat, Maroc

Reçu le 25 avril 2003 ; accepté le 24 juillet 2003

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

L'inclusion différentielle décrivant l'évolution quasi-statique d'un fil souple homogène inextensible sur un plan horizontal avec frottement de Coulomb (sec) est un modèle unidimensionnel d'évolution de milieu continu, à géométrie non linéaire, obéissant à une loi de comportement de type « plastique-rigide ». En vue de simulations numériques, nous nous intéressons au cas discret : le fil est assimilé à une chaîne de barres rigides parfaitement articulées autour de joints. Le problème étant mis en place, l'existence et l'unicité de solutions sont prouvées au moyen d'outils de l'analyse convexe. Enfin un algorithme est construit permettant, la configuration initiale de la chaîne étant connue, de déterminer les solutions instantanées du problème ; quelques exemples sont traités en application. *Pour citer cet article : H. Sayah, C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Quasi-static motion of a supple, homogenous and inextensible string on a horizontal plane with dry friction: discret case. The differential inclusion describing the quasi-static motion of a supple, homogeneous and inextensible string on a horizontal plane with dry friction (Coulomb's law) is a one dimensional evolution model of a continuous medium, with non-linear geometry, obeying a "plastic-rigid" law. With a view to numerical simulation, we treat the discrete case: the string is assimilated to a chain constituted by rigid rods perfectly articulated around ball-joints. We give variational formulation of the problem and prove existence and uniqueness of solutions. We construct an algorithm that describes the instantaneous solutions when the initial configuration of the string is given. Then, some examples are treated. *To cite this article: H. Sayah, C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Dynamique des systèmes rigides ou flexibles ; Fil inextensible ; Frottement sec ; Dualité variationnelle

Keywords : Dynamics of rigid or flexible systems; Inextensible string; Dry friction; Variational duality

Adresse e-mail : hsayah@yahoo.fr (H. Sayah).

1631-0721/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2003.07.006

Abridged English version

The quasi-static motion of a supple homogeneous and inextensible string on a horizontal plane (see Fig. 1) with dry friction (Coulomb's law) is described by a differential inclusion (1) under a non-linear constraint (inextensibility) (2) with initial and end conditions (3), (4); it's a one dimensional evolution model of a continuous medium, with strongly non-linear geometry, obeying a "plastic-rigid" law.

The study, in the general case, of existence and possibly uniqueness of solutions (field velocity and tension of the string) turns out to be very difficult. With a view to numerical simulation, we treat the discrete case: the string is assimilated to a chain constituted by rigid rods perfectly articulated around ball-joints and lying on a horizontal plane with dry friction (see Fig. 2).

After setting the equations of the discrete quasi-static problem (5)–(8) and by the help of convex analysis tools, we demonstrate existence and uniqueness of solutions (ball-joints velocities and rods tension); we prove, particularly, how those solutions are characterised by variational properties in duality.

At the end of the Note, we construct an algorithm that describes the instantaneous solutions when any initial configuration of the string is given; we expect that, when we impose a movement at one extremity, possibly part of chain be at rest. Owing to a velocity field characterisation (cf. Proposition 1), our algorithm detects first the possible sub-chain at rest to deduce the one in motion. In the same way, it computes the instantaneous solutions: directions and modulus of ball-joint velocities, rods tensions.

Two examples are treated at the end; we suppose that the ball-joints are placed on the arc of a circle.

- When the length of the chain is strictly less than a quarter of circle, the algorithm gives us the solution from the first stage: all the chain moves (see Fig. 4).
- When the length of the chain is strictly superior to a quarter of circle, we have the solution at the final stage: only the two first ball-joints move (see Fig. 5).

1. Introduction

Un fil souple homogène inextensible de longueur S repose sur un plan *horizontal* Π avec frottement du type loi de Coulomb. On choisira l'abscisse curviligne s pour index. Les efforts extérieurs agissant sur le fil consistent en :

- une densité de poids $\vec{P}: s \rightarrow \vec{P}(s) = -\bar{\rho}(s)g\vec{v}$ avec $\bar{\rho}(s)$ masse spécifique du fil, constante puisque le fil est homogène et \vec{v} le vecteur unité normal au plan;
- une densité d'efforts de réactions du plan sur le fil : $\vec{R}: s \rightarrow \vec{R}(s) = \vec{F}(s) + \vec{N}(s)$ avec $\vec{F}(s) \in \vec{E}_2$, $\vec{N}(s) = N(s)\vec{v}$ (\vec{E}_2 espace vectoriel euclidien des vecteurs du plan)

A l'équilibre, on a en chaque point du fil d'abscisse s : $\vec{N}(s) + \vec{P}(s) = \vec{O}$.

On impose un mouvement suffisamment lent à l'extrémité $s = 0$ pour que *les efforts d'inertie soient négligeables*, l'extrémité $s = S$ restant libre ; ainsi, pour cette évolution *quasi-statique*, le fil vérifie à chaque instant les équations de la statique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall s \in [0, S], & \frac{d(\theta\vec{T})}{ds} + \vec{F} = 0 \\ \vec{T} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} = 0 & \text{(inextensibilité du fil)} \\ \theta(S) = 0 & \text{(extrémité } s = S \text{ libre)} \\ \vec{u}(0) = \vec{U} & \text{(vitesse imposée à l'extrémité } s = 0) \end{array} \right.$$

$\vec{u}: [0, S] \rightarrow \vec{E}_2$ représente le champ de vitesse de glissement par rapport au repère défini par Π . $\theta: [0, S] \rightarrow [0, +\infty]$ représente la tension du fil.

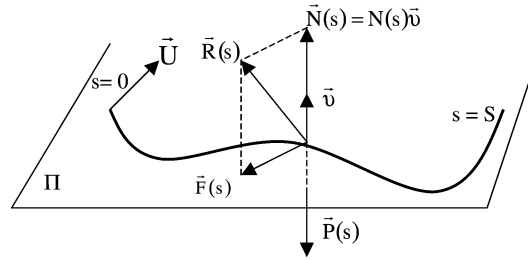


Fig. 1. Fil souple homogène inextensible reposant avec frottement sec sur un plan horizontal.
 Fig. 1. Supple, homogeneous inextensible string lying, with dry friction, on a horizontal surface.

La composante normale \vec{N} est équilibrée par \vec{P} , nous avons, d’après [1] :

$$-\vec{F} \in \partial\varphi(\vec{u}) \quad \text{ou} \quad -\vec{u} \in \partial\Psi_D(\vec{F})$$

avec $D = \{\vec{\phi} \in \vec{E}_2 \mid |\vec{\phi}| \leq fN\}$ disque fermé de rayon fN , $f \geq 0$ coefficient de frottement, $|\cdot|$ norme euclidienne $\varphi(\vec{u}) = fN|\vec{u}| = \Psi_D^*(-\vec{u})$ avec Ψ_D^* polaire Ψ_D (fonction d’appui de D).

Parce que la composante normale est traitée comme connue *la loi de Coulomb est alors semblable à une loi de plasticité*. Finalement :

$$\frac{d}{ds}(\theta\vec{T}) \in \partial\varphi(\vec{u}(s)), \quad \forall s \in [0, S] \tag{1}$$

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} = 0 \tag{2}$$

$$\theta(S) = 0 \tag{3}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{U} \tag{4}$$

Nous obtenons donc un modèle unidimensionnel d’évolution d’un milieu continu avec une géométrie fortement non linéaire, obéissant à une loi de comportement de type « rigide plastique ».

La fonction φ étant convexe, en tout point où elle est différentiable ie en tout point où $|\vec{u}| \neq 0$ (portion de fil en mouvement) nous avons, en vertu d’un théorème classique : $\partial\varphi(\vec{u}) = \{\text{grad } \varphi(\vec{u})\} = k\vec{u}/|\vec{u}|$ ($k = fN$) et alors l’équation multivoque (1) se réduit à $\frac{d}{ds}(\theta\vec{T}) = k\vec{u}/|\vec{u}|$. Remarquons que, si le coefficient k dépendait continûment de s , par le changement de variable $s_1(s) = \int_0^s k(\xi) d\xi$ et en posant $\hat{\theta}(s_1) = \theta(s_1)k(s)$ l’équation précédente s’écrit : $\frac{d}{ds_1}(\hat{\theta}(s_1)\vec{T}(s_1)) = \vec{u}(s_1)/|\vec{u}(s_1)|$ Nous supposons alors dans toute la suite $k = 1$.

La recherche sur $[0, S]$ d’une solution \vec{u}, θ du problème (1), (2) s’accordant aux conditions au bord énoncées en (3) et (4), l’étude de l’existence ou de l’unicité éventuelle de cette solution apparaît d’une grande difficulté. L’examen de quelques cas calculables de mouvement met en évidence ces difficultés liées à l’ajustement des solutions à ces conditions aux limites. Nous étudions dans ce qui suit le cas discret qui pourra se prêter à une simulation numérique.

2. Cas discret : mise en équation

On se propose donc l’étude de l’évolution quasi-statique d’un système constitué par une chaîne de n barres rigides (c’est-à-dire inextensibles et incompressibles) $B_i, i = 1, 2, \dots, n$, s’articulant parfaitement autour de joints sphériques comme l’indique la Fig. 2.

Les joints sont représentés par $(n + 1)$ -points M_0, \dots, M_n , qu’on appellera nœuds tous supposés de même poids. On néglige les poids des barres. Ils reposent avec frottement sec sur un plan horizontal. On impose un

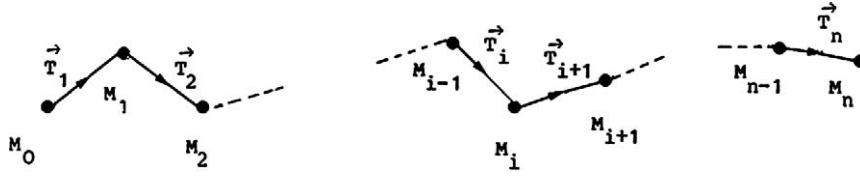


Fig. 2. Chaîne de n barres rigides parfaitement articulées autour de joints sphériques reposant avec frottement sur un plan horizontal.

Fig. 2. Chain of n rigid rods, perfectly articulated around spherical joints, lying with friction, on a horizontal plane.

mouvement lent à M_0 , l'extrémité M_n restant libre. On note \vec{T}_i le vecteur unité de la droite orientée $M_{i-1}M_i$. Dans une configuration du système notons \vec{u}_i la vitesse de M_i et θ_i la tension de chacune des barres B_i assurant la liaison entre M_{i-1} et M_i .

Pour une évolution quasi-statique, la somme des forces subies par chaque nœud est nulle, d'où :

$$\theta_{i+1}\vec{T}_{i+1} - \theta_i\vec{T}_i \in \partial\varphi(\vec{u}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$\theta_{n+1} = 0 \quad (\text{extrémité } M_n \text{ libre}) \quad (6)$$

$$\vec{T}_i \cdot \vec{u}_i = \vec{T}_i \cdot \vec{u}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{inextensibilité}) \quad (7)$$

$$\vec{u}_0 = \vec{U} \quad (\text{vitesse imposée en } M_0) \quad (8)$$

Notons que la longueur des barres n'intervient pas dans ces équations.

2.1. Formulation variationnelle

À l'instant considéré, la configuration du système est une ligne polygonale. L'espace vectoriel \mathcal{V} des vitesses éventuelles des nœuds pour cette configuration peut se représenter sous la forme :

$$\mathcal{V} = (\vec{E}_2)^{n+1} = \{v = (\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n), \vec{v}_i = \vec{v}(M_i), i = 0, 1, \dots, n\}$$

et celui \mathcal{F} des efforts subis par les nœuds :

$$\mathcal{F} = (\vec{E}_2)^{n+1} = \{f = (\vec{f}_0, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n), \vec{f}_i \text{ force appliquée à } M_i, i = 0, 1, \dots, n\}$$

\mathcal{V} et \mathcal{F} que l'on munira de la norme $\|\cdot\|$ définie par : $\|x\| = \sum_{i=0}^n |\vec{x}_i|$, $x = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ sont mis en dualité séparante par la forme bilinéaire « puissance » : $\langle v, f \rangle = \sum_{i=0}^n \vec{v}_i \cdot \vec{f}_i$.

Lois de comportement du système. En chaque nœud M_i , la loi de Coulomb s'écrit : $-\vec{f}_i \in \partial\varphi(\vec{v}_i)$ avec $\varphi(\vec{v}) = |\vec{v}|$. On vérifie immédiatement que si on définit sur \mathcal{V} la fonction : $\phi(v) = \sum_{i=0}^n \varphi(\vec{v}_i) = \|v\|$ ces $(n+1)$ -relations équivalent à : $-f \in \partial\phi(v)$ au sens de la dualité ci-dessus.

Dans le vocabulaire de Moreau (cf. [1]), l'entraînement consiste en ce que v satisfait :

- (i) vitesse imposée en M_0 $\vec{v}_0 = \vec{U}$,
- (ii) inextensibilité des barres $\vec{T}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{T}_i \cdot \vec{v}_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, ce qui définit la variété affine \mathcal{E} fermée convexe des vitesses compatibles avec ces liaisons.

Rappelons que l'inextensibilité et la vitesse imposée en M_0 constituent des liaisons parfaites (cf. [2] ou [3]); on conviendra alors de dire que l'entraînement est parfait (cf. [1]) c'est-à-dire que la réaction de liaison $r = (\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ est un élément de \mathcal{W}^\perp où \mathcal{W} est l'espace vectoriel parallèle à \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{W} + \vec{U}, \quad \vec{U} = (\vec{U}, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{V} \mid w = (0, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n); \vec{T}_i \cdot \vec{w}_i = \vec{T}_i \cdot \vec{w}_{i-1}, i = 1, \dots, n\}$$

Cela s'écrit encore : $-r \in \partial\psi_{\mathcal{E}}(v)$ avec $\partial\psi_{\mathcal{E}}(v) = \mathcal{W}^{\perp}$ Par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, \mathcal{W}^{\perp} se caractérise par :

$$\mathcal{W}^{\perp} = \left\{ r = (\vec{r}_0, \dots, \vec{r}_n) \in \mathcal{F}; \exists \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n, \tau_{n+1}) \mid \vec{r}_0 = \tau_1 \vec{T}_1, \right. \\ \left. \vec{r}_i = \tau_{i+1} \vec{T}_{i+1} - \tau_i \vec{T}_i; i = 1, \dots, n; \tau_{n+1} = 0 \right\}$$

On reconnaît alors dans le réel τ_i la tension (positive ou négative) de la barre B_i .

Le quasi-équilibre se traduit par le fait que l'effort de frottement f équilibre la réaction r de l'entraînement parfait $u \in \mathcal{E}$ soit : $0 \in \partial\phi(u) + \partial\Psi_{\mathcal{E}}(u)$ qui est équivalent à : $0 \in \partial(\phi + \Psi_{\mathcal{E}})(u)$ vu que l'additivité des sous-différentiels est vérifiée.

Ainsi, un $u \in \mathcal{V}$ est la vitesse d'une évolution quasi-statique si et seulement si :

$$\phi(u) = \underset{v \in \mathcal{E}}{\text{Min}} \phi(v)$$

De même, f est une valeur de quasi-équilibre si et seulement s'il existe $u \in \mathcal{E}$ tel que :

$$-f \in \partial\phi(u), \quad f \in \partial\psi_{\mathcal{E}}(u)$$

ces deux conditions sont équivalentes à :

$$-u \in \partial\hat{\phi}^*(f), \quad u \in \partial\Psi_{\mathcal{E}}^*(f)$$

en désignant par $\hat{\phi}^*$ la fonction $f \rightarrow \hat{\phi}^*(-f)$ (fonction polaire de $\hat{\phi} : u \rightarrow \hat{\phi}(-u)$).

Or :

$$\psi_{\mathcal{E}}^*(f) = \vec{f}_0 \cdot \vec{U} + \psi_{\mathcal{W}^{\perp}}(f), \quad \phi^*(f) = \hat{\phi}^*(f) = \psi_{D \times D \times \dots \times D}(f)$$

En notant $C = D \times D \times \dots \times D$, les conditions précédentes donnent : $0 \in \partial\psi_{\mathcal{E}}^*(f) + \partial\phi^*(f)$ qui est équivalent à : $0 \in \partial(\psi_{\mathcal{E}}^* + \phi^*)(f)$ vu que l'additivité des sous-différentiels est encore vérifiée.

Ainsi, un $f \in \mathcal{F}$ est solution du problème de quasi équilibre si et seulement si :

$$\vec{f}_0 \cdot \vec{U} = \underset{r \in \mathcal{W}^{\perp} \cap C}{\text{Min}} \vec{r}_0 \cdot \vec{U}$$

où $C = \{g = (\vec{g}_0, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n) \in \mathcal{F} \mid \forall i = 1, \dots, n, |\vec{g}_i| \leq 1\}$.

2.2. Existence de solutions

Des théorèmes classiques de dualité en optimisation convexe (cf. [4]) permettent de conclure que les deux problèmes de minimisation :

$$(P_1) \quad \underset{v \in \mathcal{E}}{\text{Inf}} \|v\|, \quad (P_2) \quad \underset{r \in \mathcal{W}^{\perp} \cap C}{\text{Inf}} \vec{r}_0 \cdot \vec{U}$$

admettent chacun au moins une solution et : $\text{Min } P_1 = \text{Min } P_2$.

2.3. Caractérisation des solutions

Compte tenu de la caractérisation de \mathcal{W}^{\perp} et du fait que la configuration du système est connue, (P_2) peut se formuler comme un problème de minimisation de la fonctionnelle : $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \tau_1 T_1 \cdot \vec{U}$ (c'est-à-dire maximisation ou minimisation de τ_1 suivant le signe du réel connu $T_1 \cdot \vec{U}$) dans l'ensemble $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ défini par :

$$\mathcal{J} = \left\{ \tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \tau_{n+1} = 0; |\tau_{i+1} \vec{T}_{i+1} - \tau_i \vec{T}_i| \leq 1; i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Ainsi le problème (P₂) se ramène au « problème en tension » :

$$(P'_2) \operatorname{Min}_{\tau \in \mathcal{J}} \tau_1 \vec{T}_1 \cdot \vec{U}$$

Les solutions u et f sont liées entre elles par les relations d'extrémalités :

$$-f \in \partial\phi(u), \quad f \in \partial\Psi_{\mathcal{E}}(u) (= \mathcal{W}^\perp)$$

qui se découpent en :

$$\begin{cases} \theta_{i+1} \vec{T}_{i+1} - \theta_i \vec{T}_i \in \partial\varphi(\vec{u}_i) & (i = 1, \dots, n) \\ \theta_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \vec{T}_i \cdot \vec{u}_i = \vec{T}_i \cdot \vec{u}_{i-1} & (i = 1, \dots, n) \\ \vec{u}_0 = \vec{U} \end{cases} \quad (10)$$

Ces solutions forment, lorsqu'on les accouple, celles d'un problème de point selle (cf. [3]) pour la fonction concave convexe L définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{F}$ par :

$$L(v, r) = \langle v, r \rangle + \phi^*(r) - \psi_{\mathcal{E}}(v) \quad \text{qui s'écrit encore} \quad L(v, r) = \langle v, r \rangle + \psi_C(r) - \psi_{\mathcal{E}}(v)$$

On vérifie aisément alors que u et f sont solutions de notre problème quasi-statique si et seulement si (u, f) est point selle de valeur finie pour L . En outre, l'ensemble des points selles de L est de la forme $\mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0$ avec $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{B}_0 \subset C$ convexes.

Proposition 2.1 (Caractérisation des solutions en u (détection des nœuds au repos)). *Si pour un $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ on a $\vec{u}_j \cdot \vec{T}_{j+1} = 0$ alors $|\vec{u}_i| = 0$ pour $i = j + 1, \dots, n$. La sous-chaîne $M_{j+1}, M_{j+2}, \dots, M_n$ reste au repos. (On montre que la puissance dissipée par la sous-chaîne $M_{j+1}, M_{j+2}, \dots, M_n$ est nulle.)*

2.4. Unicité des solutions

Proposition 2.2.

- Le problème en vitesse (P₁) admet une unique solution. (La démonstration repose essentiellement sur la Proposition 2.1.)
- La solution du problème (P₂) n'est pas forcément unique.

Cela provient du fait que, pour la sous-chaîne au repos, les tensions des barres sont inconnues à des inégalités banales près (certains nœuds M_i peuvent rester au repos lorsque l'on impose un mouvement à l'extrémité M_0); cependant lorsque toute la chaîne est mise en mouvement, il y a unicité bien sûr.

En vue de simulations numériques, nous allons à présent mettre en place un algorithme permettant, la configuration du fil étant connue, de déterminer les vitesses et tensions « instantanées » de notre problème.

3. Détermination des solutions instantanées

3.1. Description de l'algorithme

La chaîne se trouvant dans une configuration à priori quelconque, on s'attend à ce qu'en déplaçant l'extrémité M_0 , certains nœuds peuvent rester au repos; l'algorithme doit donc être en mesure de détecter quelle sera la sous-chaîne en mouvement.

S'appuyant sur la Proposition 2.1 nous chercherons d'abord à détecter les nœuds au repos (s'il en existe) pour en déduire ceux en mouvement.

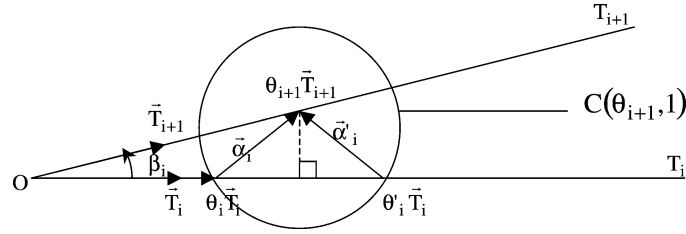


Fig. 3. Deux choix possibles pour $\vec{\alpha}_i$, le signe de $\vec{T}_1 \cdot \vec{U}$ et (11) permettent de trancher.
 Fig. 3. Two possible choices for $\vec{\alpha}_i$, the sign of $\vec{T}_1 \cdot \vec{U}$ and (11) allow one to choose.

Menons d'un point O les demi-droites orientées respectivement par les vecteurs \vec{T}_i . Notons β_i l'angle $(\vec{T}_i, \vec{T}_{i+1})$.
 1ère étape : On suppose que toute la chaîne est en mouvement soit : $|\vec{u}_i| \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Les solutions de notre problème sont reliées par :

$$\begin{cases} \vec{T}_i \cdot \vec{u}_i = \vec{T}_i \cdot \vec{u}_{i-1} & (i = 1, \dots, n) \\ \vec{u}_0 = \vec{U} \end{cases} \quad (11)$$

Le vecteur unité $\vec{\alpha}_i$ donne évidemment la direction de \vec{u}_i .

Les relations (11) permettent de déterminer $\theta_i, i = 1, \dots, n$, à l'aide de la récurrence :

$$(R_n) \quad \begin{cases} \theta_{n+1} = 0 \\ \theta_i = \theta_{i+1} \cos \beta_i + \varepsilon_i \sqrt{1 - \sin^2 \beta_i \theta_{i+1}^2}, & i = n, \dots, 1 \end{cases}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$; le choix de celui-ci dépend du signe de $\vec{T}_1 \cdot \vec{U}$ et des relations (11).

La récurrence (R_n) terminée, les tensions θ_i sont alors uniques, les directions des vitesses sont connues et leurs modules sont déterminés à partir des relations d'inextensibilité (11).

Cependant, il est possible que (R_n) n'aboutisse pas i.e. pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$, $C(\theta_{j+1}, 1)$ ne contient aucun point d'intersection avec la droite T_j (ou, cas limite, un point, auquel cas $\vec{\alpha}_j \cdot \vec{T}_j = 0$ d'où $\vec{T}_j \cdot \vec{u}_j = \vec{T}_j \cdot \vec{u}_{j-1} = 0$; d'après la Proposition 2.1, cela donne $\vec{u}_i = 0$ pour $i > j - 1$, en contradiction avec l'hypothèse). Nous sommes donc obligés, dans ce cas, d'admettre que l'hypothèse $|\vec{u}_i| \neq 0$ pour $i = 1, \dots, n$ est fautive et que, par conséquent, certains nœuds restent au repos.

2ème étape : Supposons $\vec{T}_n \cdot \vec{u}_{n-1} = 0$; d'après la Proposition 2.1, $|\vec{u}_n| = 0$ i.e. le nœud M_n est au repos ; la relation $\theta_n \vec{T}_n - \theta_{n-1} \vec{T}_{n-1} = \vec{\alpha}_{n-1}$ jointe à $\vec{T}_n \cdot \vec{\alpha}_{n-1} = 0$ permet de déterminer θ_n . Engendrer alors la récurrence (R_{n-1}) :

$$(R_{n-1}) \quad \begin{cases} \theta_n = \frac{\sin \beta_n \cos \beta_n}{1 - \cos^2 \beta_n} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta_n}{1 - \cos^2 \beta_n} \\ \theta_i = \theta_{i+1} \cos \beta_i + \varepsilon_i \sqrt{1 - \sin^2 \beta_i \theta_{i+1}^2} & (i = n - 1, \dots, 1) \end{cases}$$

Itérer le processus jusqu'à ce que pour un $j \in \{1, \dots, n\}$ (R_j) aboutisse ; (noter que nécessairement il s'arrêtera, au plus tard, pour $j = 1$).

$(n - j + 1)$ ème étape : Supposons donc que la récurrence :

$$(R_j) \quad \begin{cases} \theta_{j+1} = \frac{1}{2} \frac{\sin(2\beta_{j+1})}{1 - \cos^2 \beta_{j+1}} \\ \theta_i = \theta_{i+1} \cos \beta_i + \varepsilon_i \sqrt{1 - \sin^2 \beta_i \theta_{i+1}^2} & (i = j, \dots, 1) \end{cases}$$

aboutisse. Cela suppose $\vec{u}_j \cdot \vec{T}_{j+1} = 0$ donc $|\vec{u}_i| = 0, i = j + 1, \dots, n$.

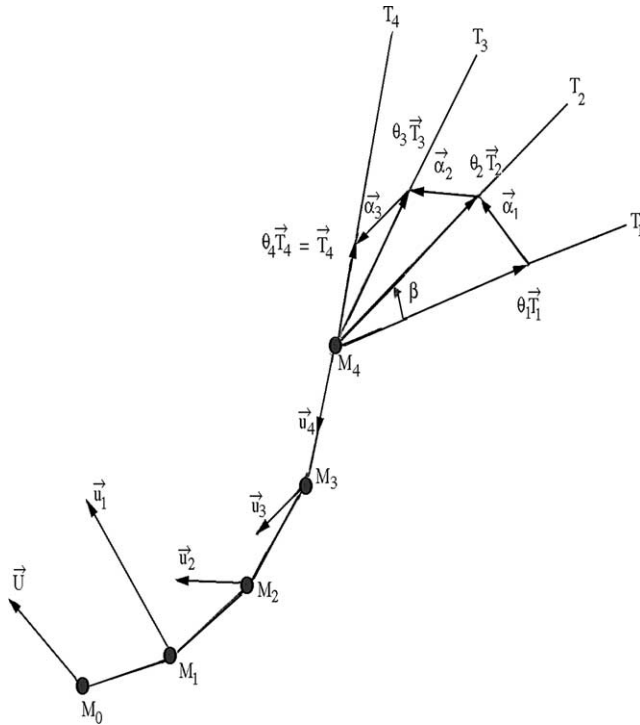


Fig. 4. Solution (u, θ) du problème avec $n = 4$, $\beta = 20^\circ$.
 Fig. 4. Solution (u, θ) of the problem, with $n = 4$, $\beta = 20^\circ$.

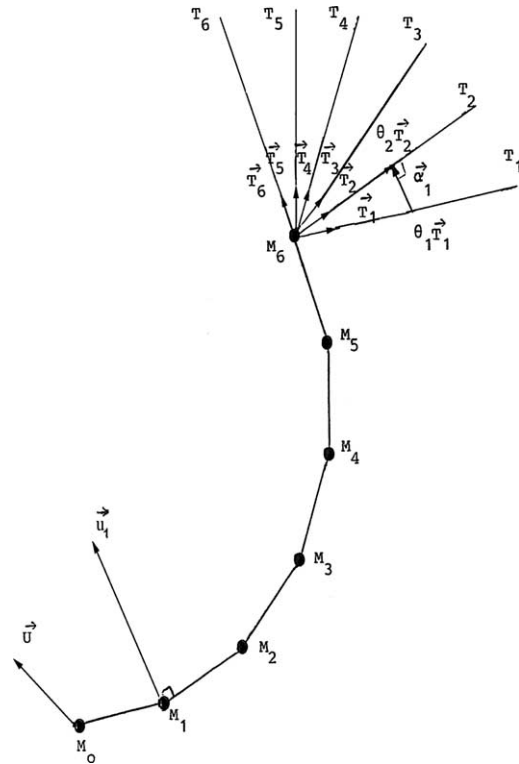


Fig. 5. Solution (u, θ) du problème avec $n = 6$, $\beta = 20^\circ$.
 Fig. 5. Solution (u, θ) of the problem, with $n = 6$, $\beta = 20^\circ$.

Les vitesses \vec{u}_i et les tensions θ_i , $i = 1, \dots, n$, ainsi obtenues constituent une solution du problème quasi-statique. D'après la Proposition 2.2, $u = (\vec{U}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_j, 0, 0, 0)$ est l'unique solution du problème (P_1) , $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+1})$ est une solution du problème (P_2) .

3.2. Applications

On suppose $\vec{T}_1 \cdot \vec{U} < 0$ et que la configuration de la chaîne est une ligne polygonale convexe avec $\beta_i = \beta$, pour tout $i = 1, \dots, n - 1$. Les nœuds sont alors situés sur une portion de cercle.

- (i) Tant que l'angle $\gamma_n = (\vec{T}_1, \vec{T}_n)$ reste strictement plus petit que $\frac{\pi}{2}$, l'algorithme nous fournit la solution dès la première étape ; autrement dit toute la chaîne est mise en mouvement (Fig. 4).
- (ii) Lorsque $\gamma_n > \frac{\pi}{2}$, l'algorithme ne fournit une solution à notre problème qu'à la dernière étape. Seuls les deux premiers nœuds sont mis en mouvement : rotation de la barre B_2 par rapport à M_2 (Fig. 5).

Références

[1] J.J. Moreau, Application of convex analysis to some problems of dry Friction, in: H. Zorski (Ed.), Trend in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, vol. II, Pitman, London, 1979, pp. 263–280.
 [2] J.J. Moreau, Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 271 (1971) 608–611.
 [3] J.J. Moreau, La convexité en statique, in: J.P. Aubin (Ed.), in: Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, vol. 102, Springer-Verlag, 1974, pp. 141–167.
 [4] T. Ekeland, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod–Gauthier-Villars, Paris, 1974.