



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 857–864



Sur les approximations « isotrope » et « anisotrope » de l'opérateur tangent pour les méthodes tangentés incrémentale et affine

Jean-Louis Chaboche, Pascale Kanouté

ONERA, BP 72, 92322 Châtillon cedex, France

Reçu le 2 août 2003 ; accepté après révision le 27 août 2003

Présenté par André Zaoui

Résumé

Trois règles de localisation, TFA, la méthode tangente incrémentale et la méthode affine, sont rappelées et évaluées dans le contexte de l'analyse micromécanique de l'élastoplasticité des matériaux hétérogènes, composites ou polycristaux. A l'aide d'un exemple sévère, on montre comment les prédictions issues des méthodes basées sur l'expression anisotrope complète de l'opérateur élastoplastique tangent sont très raides et éloignées de la réponse de référence, tout comme pour la méthode basée sur la règle d'accommodation élastique. Au contraire, en utilisant une forme isotrope de l'opérateur tangent, on obtient des réponses bien meilleures. Sont alors discutées les raisons d'une telle différence et les justifications possibles du choix de la forme isotrope. *Pour citer cet article : J.-L. Chaboche, P. Kanouté, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

On the 'isotropic' and 'anisotropic' approximations of the tangent operator in the incremental tangent and affine methods. Three localisation rules, TFA, the incremental tangent, and the affine method, are recalled and evaluated in the context of the elastoplastic micromechanical analysis of heterogeneous materials, composites or polycrystals. With the help of a severe example, it is shown how methods based on the complete anisotropic elastoplastic tangent operator yield very stiff predictions which are far from the reference solution; the same conclusion holds for the method using the elastic accommodation rule. On the other hand, using an isotropic form of the tangent operator delivers much better responses. The reasons for such differences are discussed, together with possible justifications for the choice of the isotropic form. *To cite this article: J.-L. Chaboche, P. Kanouté, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; TFA ; Méthode tangente incrémentale ; Méthode affine ; Analyse micromécanique de l'élastoplasticité

Keywords : Computation solid mechanics; TFA; Incremental tangent method; Affine method; Elastoplastic micromechanical analysis

Adresse e-mail : chaboche@onera.fr (J.-L. Chaboche).

1631-0721/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2003.08.002

Abridged English version

The objective of this Note is to evaluate available methods for scale changes in the micro-to-macro elastoplastic analysis of composites as well as polycrystalline aggregates. The corresponding localisation rules are briefly recalled, including the elastic localisation (Transformation Field Analysis), the incremental tangent approach [5], the more recent ‘affine’ method proposed by Zaoui and Masson [6,7]. In the first method (TFA), formulated by Dvorak [1], the plastic strain itself is considered as a given eigenstrain (known at each step). Though there is no eigenstrain in Hill’s approach, the affine method uses the same elastoplastic tangent operator associated with a non incremental definition of the local linear comparison material, introducing the eigenstrains η_r , which can be identified as $\eta_r = \varepsilon_r - \mathbf{L}_r^{-1} : \mathbf{L}_r : (\varepsilon_r - \varepsilon_r^p)$. These various approaches for the instantaneous average local behaviour definition in each phase are illustrated in Fig. 1.

It is shown how the affine method can be formulated in exactly the same way as TFA, but with continuously varying localisation and influence tensors. In case of a two phase material, these operators are determined in closed form as functions of the local tangent stiffnesses, of the tangent stiffness for the chosen ‘reference material’, and of the ‘tangent’ polarisation tensor \mathbf{P} . It is worth noting that this operator is expressed in terms of the tangent stiffness of the reference material, necessarily an ‘anisotropic’ stiffness tensor (independent of the fact that the considered material stays isotropic).

A very severe example, due to Suquet [8], serves to compare the capabilities of the methods with a reference solution obtained by a finite element based periodic homogenisation technique [9]. Fig. 2 shows the overall tensile behaviour obtained with the various approaches.

As it is well known, the TFA method is very stiff when using a two phase approximation (with average fields in each phase) and greatly overestimates the overall strength and hardening. More surprisingly, when using the ‘correct’ anisotropic polarisation tensor \mathbf{P} , the incremental tangent and affine methods also greatly overestimate strength and hardening. As already reported [6], the affine method delivers a softer response than the incremental tangent one. On the contrary, the approximate ‘isotropic’ version of the two methods slightly underestimates the reference solution, a result already observed in several works [16,22,23,19]. Therefore, we can formulate the following controversial question: should we prefer to use the ‘correct’ version that greatly overestimates the overall response, or take the ‘incorrect’ approximate one that recovers sufficiently well the reference overall response?

There were several arguments in favour of the second option. For instance, Llorca and González [19], by considering the assumption of a local proportional loading, showed that $\dot{\varepsilon} = \mathbf{M} : \dot{\sigma}$ appears as identical with $\dot{\varepsilon} = \mathbf{M}^* : \dot{\sigma}$, in which \mathbf{M} and \mathbf{M}^* are respectively the anisotropic tangent compliance and its isotropic approximation. It will be shown in the sequel that this is an abusive proof and that \mathbf{M}^* cannot really be considered as a tangent operator.

In conclusion, for applications to composites, as well as for applications to polycrystalline or multiphase aggregates, we suggest the use of the ‘isotropic’ approximation in the tangent methods (incremental and affine), not only because it is simpler to evaluate, but also because it delivers better results at the overall scale.

1. Trois règles de localisation en élasto-plasticité

Dans cet article on ne formule pas les lois élasto-plastique ou élasto-viscoplastique de chaque phase, celles-ci étant simplement supposées obéir à un schéma incrémental classique.

Les techniques de changement d’échelle sont indispensables afin de reconstruire le comportement macroscopique des matériaux à partir de celui de leurs constituants de base. Très schématiquement, on peut distinguer : (i) les méthodes de type homogénéisation périodique, plutôt réservées aux milieux dont la microstructure peut être assimilée à une microstructure périodique, et qui délivrent les champs locaux respectant de façon exacte équilibre, compatibilité et comportement ; (ii) les méthodes à champs moyens, basées sur le schéma de l’inclusion d’Eshelby, qui sont amenées à considérer des champs de déformation inélastique (déformation libre) uniformes sur chaque

phase, elle-même plongée dans un « milieu homogène de référence », approches plus couramment utilisées pour les milieux à microstructure désordonnée.

1.1. La méthode TFA (Transformation Field Analysis)

Cette approche intermédiaire proposée par Dvorak [1], correspond à une discrétisation des équations intégrales de type Lippman–Schwinger, non rappelées ici. En admettant que la déformation libre, ici la déformation plastique, est uniforme par morceaux, et après discrétisation et résolution formelle, les relations de localisation en déformation s’expriment :

$$\varepsilon_s = \mathbf{A}_s : \bar{\varepsilon} + \sum_r \mathbf{D}_{sr} : \varepsilon_r^p \tag{1}$$

où $\bar{\varepsilon}$ est la déformation macroscopique (moyenne) sur le VER (Volume Élémentaire Représentatif) considéré. \mathbf{A}_s est le tenseur de localisation élastique moyen sur le volume V_s et les \mathbf{D}_{sr} sont les tenseurs d’influence, toutes ces quantités pouvant être déterminées par résolution de problèmes élastiques linéaires [2,3]. La loi d’élasticité macroscopique s’écrit alors $\bar{\sigma} = \mathbf{L} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^p)$, avec $\mathbf{L} = \sum c_r \mathbf{L}_r : \mathbf{A}_r$ et $\bar{\varepsilon}^p = \sum c_r \mathbf{B}_r^T : \varepsilon_r^p$, où $\mathbf{B}_r = \mathbf{L}_r : \mathbf{A}_r : \mathbf{L}^{-1}$ est le tenseur de concentration de contrainte, \mathbf{L}_r et \mathbf{L} respectivement les tenseurs d’élasticité de chaque phase et macroscopique, $c_r = V_r/V$ la fraction volumique de chaque sous-volume et $\bar{\varepsilon}^p$ la déformation plastique macroscopique.

Dans le cas d’une microstructure périodique, cette approche correspond à une simplification (approximation) de l’homogénéisation périodique, en conservant un nombre élevé de sous-volumes. Au contraire, en se limitant à deux phases, donc deux sous-volumes, on peut se ramener à des méthodes à champs moyens, avec par exemple, dans le cas du schéma auto-cohérent à 1 site (inclusion s plongée dans le milieu homogène \mathbf{L}) :

$$\mathbf{A}_s^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{P} : (\mathbf{L}_s - \mathbf{L}) \tag{2}$$

où le tenseur de polarisation $\mathbf{P} = \mathbf{S} : \mathbf{L}^{-1}$ (\mathbf{S} tenseur d’Eshelby) s’exprime à partir des fonctions de Green et dépend de la forme et de l’orientation de l’inclusion et des caractéristiques du milieu homogène de référence, défini ici par le tenseur des rigidités \mathbf{L} . Dans ce cas les tenseurs \mathbf{D}_{sr} s’expriment analytiquement à partir des \mathbf{A}_s , \mathbf{L}_s et \mathbf{L} [4].

Les approches tangente incrémentale [5] ou affine [6,7] ont été proposées dans le but d’introduire une redistribution de type élastoplastique. Elles consistent à utiliser le module tangent local \mathbf{L}_s , évalué pour l’état de déformation moyen ε_s dans la phase s (Fig. 1), tel que

$$\dot{\sigma}_s = \mathbf{L}_s(\varepsilon_s) : \dot{\varepsilon}_s \tag{3}$$

1.2. Méthode tangente incrémentale

Ici, la règle de localisation (1) est remplacée par :

$$\dot{\varepsilon}_s = \mathbf{A}_s(\varepsilon_s) : \dot{\bar{\varepsilon}} \tag{4}$$

où \mathbf{A}_s est le tenseur de localisation tangent et s’exprime, toujours dans le schéma à 1 site, par :

$$\mathbf{A}_s^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{P} : (\mathbf{L}_s - \mathbf{L}) \tag{5}$$

\mathbf{L} étant l’opérateur tangent du milieu de référence, donné par $\mathbf{L} = \sum c_r \mathbf{L}_r : \mathbf{A}_r$ et \mathbf{P} le tenseur de polarisation correspondant (qui dépend de \mathbf{L}).

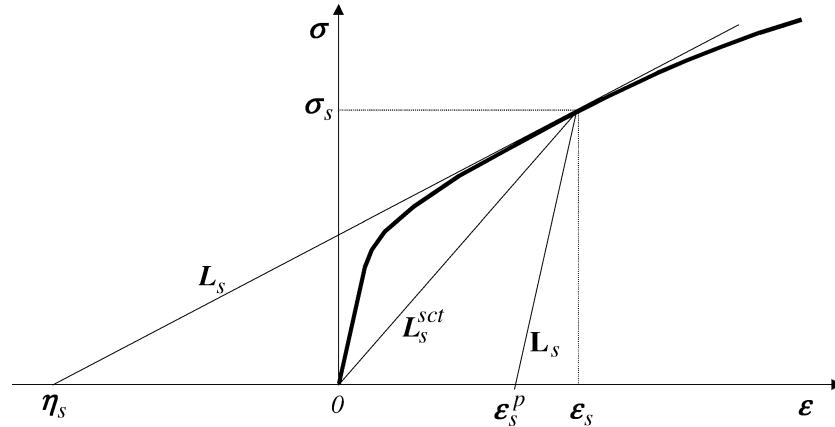


Fig. 1. Schéma des approximations tangente et sécante, ainsi que de la loi élastique.

Fig. 1. Schematics of tangent and secant approximations, as well as the elastic behaviour.

1.3. Méthode affine

Pour la méthode affine, on se reportera aux références [6] et [7] pour des explications complémentaires. Il est facile de vérifier que celle-ci correspond à l'écriture de la règle de localisation sous la forme :

$$\varepsilon_s = \mathbf{A}_s : \bar{\varepsilon} + \sum_r \mathbf{D}_{sr} : \eta_r \quad (6)$$

où η_r représente la déformation libre, utilisée dans la méthode affine à la place de la déformation plastique (voir Fig. 1). Cette déformation libre peut être définie à chaque instant par l'identité

$$\sigma_r = \mathbf{L}_r : (\varepsilon_r - \varepsilon_r^p) = \mathbf{L}_r : (\varepsilon_r - \eta_r) \quad (7)$$

Les tenseurs d'influence « tangents » \mathbf{D}_{sr} s'expriment de façon analytique comme pour la méthode TFA (avec deux phases) [4] sous la forme :

$$\mathbf{D}_{sr} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_s) : (\mathbf{L}_s - \mathbf{L})^{-1} : (\delta_{sr} \mathbf{I} - c_r \mathbf{A}_r^T) : \mathbf{L}_r \quad (8)$$

Pour la méthode incrémentale, le comportement tangent macroscopique s'exprime bien par $\dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{L} : \dot{\bar{\varepsilon}}$. Par contre, pour la méthode affine, la loi affine macroscopique n'est pas vérifiée : $\bar{\sigma} \neq \mathbf{L} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\eta})$, avec $\bar{\eta} = \sum c_r \mathbf{B}_r^T : \eta_r$. Cependant, après intégration, il est facile de reconstituer la loi $\bar{\sigma} = \mathbf{L} : (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^p)$ à chaque instant.

2. Application sur un exemple « très » critique

C'est celui proposé par Suquet [8], correspondant à une matrice élastoplastique contenant des inclusions élastiques sphériques réparties de façon isotrope (fraction volumique $c_f = 0,3$). Le fort contraste produit des différences importantes entre les diverses méthodes ($E_m = 75$ GPa, $\nu_m = 0,3$, $E_f = 400$ GPa, $\nu_f = 0,2$). La loi de plasticité de la matrice est à écrouissage isotrope, avec une fonction puissance : $\sigma_{eq} = \sigma_o + H p^\alpha$ (avec $\sigma_o = 75$ MPa, $H = 416$ MPa et $\alpha = 0,3895$), où σ_{eq} et p sont respectivement la contrainte équivalente de von Mises et la déformation plastique cumulée (définitions standard).

La solution de référence (Fig. 2) est donnée par éléments finis, dans le cadre d'une hypothèse d'homogénéisation périodique [9]. Le comportement de la matrice est indiqué pour illustrer l'effet « composite ». On remarque bien sûr l'extrême raideur de la méthode TFA (courbe en pointillés la plus raide) appliquée avec deux phases (et

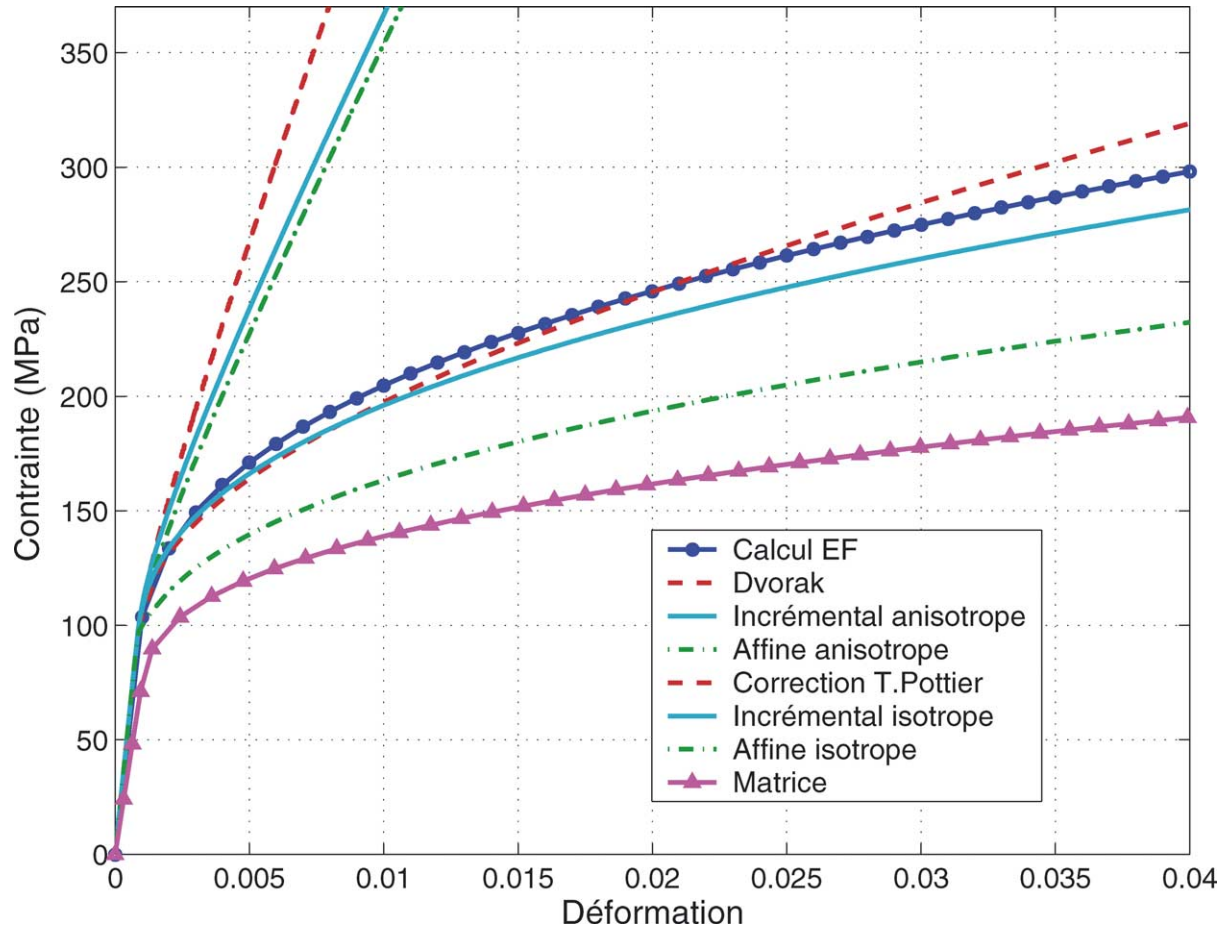


Fig. 2. Application des diverses règles de localisation pour l'exemple d'inclusions élastiques sphériques dans une matrice élastoplastique avec une loi puissance. Les courbes supérieures utilisent la localisation élastique ou l'opérateur tangent anisotrope. Les plus basses utilisent la forme isotrope.

Fig. 2. Application of the various localisation methods for the example of spherical elastic inclusions in an elastoplastic matrix with a power law. The upper curves are using the elastic rule or the anisotropic tangent operator. The lower ones use the isotropic form.

la déformation plastique moyenne de la matrice, traitée comme déformation libre). L'autre courbe en pointillés correspond à une méthode TFA « corrigée » [3] qui introduit un module tangent asymptotique $\mu_\infty = 4$ GPa.

L'application des méthodes incrémentale et affine est menée suivant deux versions, qui diffèrent par la détermination du tenseur de polarisation \mathbf{P} :

- la version « anisotrope », en principe la plus correcte, utilise le tenseur élastoplastique tangent complet, avec son terme anisotrope :

$$\mathbf{L} = 3k\mathbf{J} + 2\mu\mathbf{F} + 2\gamma\mathbf{E} \tag{9}$$

où l'élasticité isotrope de la matrice est définie par les coefficients de compressibilité et de cisaillement k et μ et où \mathbf{J} et \mathbf{K} sont les opérateurs identité sphérique et déviatorique. \mathbf{E} définit la partie plastique, anisotrope, de l'opérateur tangent, le module tangent étant donné par $\gamma = \mu h_p / (3\mu + h_p)$, où h_p représente le module tangent élastoplastique ($\partial\sigma_{eq}/\partial p$). On utilise les opérateurs \mathbf{J} , \mathbf{F} , \mathbf{E} (avec $\mathbf{F} = \mathbf{K} - \mathbf{E}$) employés par Ponte

Castañeda [10] et Suquet [8]. Avec une loi d'érouissage isotrope on a $\mathbf{E} = 3/2(s \otimes s)/\sigma_{\text{eq}}^2$ où s est le déviateur des contraintes. Le tenseur \mathbf{P} est alors défini de façon classique à partir du tenseur de Green associé au milieu homogène de référence, et doit être évalué numériquement [11];

- la version « isotrope », approchée, consiste à négliger le terme anisotrope dans l'opérateur élastoplastique tangent. On utilise à la place de \mathbf{L} l'opérateur isotrope :

$$\mathbf{L}^* = 3k\mathbf{J} + 2\gamma\mathbf{K} \quad (10)$$

L'opérateur \mathbf{P} se simplifie alors en $\mathbf{P} = \mathbf{S} : \mathbf{L}^{-1}$, où le tenseur d'Eshelby \mathbf{S} est obtenu avec des relations analytiques classiques, en fonction de k et γ .

On note que, pour cette situation de type composite, on n'a pas utilisé une évaluation auto-cohérente, mais la borne inférieure de Hashin–Shtrikman [12] (ou, ce qui est équivalent dans le cas présent, méthode de Mori–Tanaka [13]), en considérant la matrice comme milieu homogène de comparaison.

Les résultats obtenus sont indiqués sur la Fig. 2, avec des courbes continues pour la méthode incrémentale, et mixte tiret-point pour la méthode affine. On note que les évaluations « anisotropes » utilisant un tenseur \mathbf{P} déterminé avec l'expression anisotrope de l'opérateur élastoplastique tangent, surévaluent fortement la réponse macroscopique de référence. On note aussi que la méthode incrémentale est moins raide que la méthode TFA (accommodation élastique), mais plus raide que la méthode affine, fait reporté antérieurement [6]. Cependant l'écart reste majeur avec la solution de référence.

Au contraire, les évaluations « isotropes » sont beaucoup moins raides, respectant l'évolution non linéaire de la réponse macroscopique de référence, avec une légère sous-évaluation. On peut estimer qu'avec l'évaluation auto-cohérente à la place de l'évaluation HS–, les résultats seraient encore plus voisins de la référence.

Le fait que la simplification isotrope de la méthode tangente incrémentale conduise à des prédictions plus souples que la formulation complète est un fait déjà reconnu [14,15]. C'est l'une des raisons qui ont conduit à l'emploi de la méthode sécante [16]. Dans le cas d'un comportement en loi puissance (sans élasticité), la formulation sécante ne diffère de la formulation incrémentale que par le fait qu'elle utilise un tenseur sécant isotrope [17]. Le même résultat pour la méthode affine est probablement moins connu, bien que la trop grande raideur attachée à cette méthode avec l'expression complète ait déjà été notée, ce qui a d'ailleurs conduit à des propositions de modification [15,18].

3. Discussion

Essayons de voir comment le choix de l'approximation isotrope pourrait être justifié. La méthode affine revient à exprimer la loi locale $\varepsilon(x) = G(\sigma(x))$ sous la forme linéaire tangente :

$$\varepsilon(x) = \mathbf{M}(\sigma(x)) : \sigma(x) + \eta(x) \quad (11)$$

valide en tout point x dans un voisinage de $\sigma(x)$. Cependant, pour appliquer la méthode on a besoin de définir un milieu linéaire de comparaison doté d'une loi de type thermoélastique dont la souplesse \mathbf{M} et la déformation libre η soient uniformes sur la phase considérée. Dans sa forme initiale, la méthode se réfère pour cela à l'état moyen sur la phase. On utilise donc :

$$\varepsilon(x) = \mathbf{M}(\sigma) : \sigma(x) + \eta \quad (12)$$

où \mathbf{M} est la souplesse tangente correspondant à la contrainte moyenne σ dans la phase r (on évite dorénavant l'emploi de l'indice r) :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3k}\mathbf{J} + \frac{1}{2\mu}\mathbf{F} + \frac{1}{2\gamma}\mathbf{E} \quad (13)$$

où $\gamma = \mu h_p / (3\mu + h_p)$, h_p étant le module tangent plastique pour la contrainte moyenne σ . L'idée est alors de chercher à prouver, comme pour la méthode sécante [17], la non unicité de l'opérateur \mathbf{M} servant dans (12). Par exemple, en utilisant $\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \alpha(\mathbf{K} - \mathbf{E})$ à la place de \mathbf{M} , en l'appliquant aux quantités moyennes sur la phase, on trouverait immédiatement :

$$\mathbf{M}^* : \sigma = \mathbf{M} : \sigma + \alpha(\mathbf{K} - \mathbf{E}) : \sigma = \varepsilon - \eta + \alpha \left(s - \frac{3}{2} \frac{s}{\sigma_{eq}^2} (s : s) \right) = \varepsilon - \eta \quad (14)$$

qui redonnerait l'expression affine avec une souplesse différente, que l'on peut très bien choisir isotrope en prenant $\alpha = 3/(2h_p)$, ce qui donne :

$$\mathbf{M}^* = \frac{1}{3k} \mathbf{J} + \frac{1}{2\gamma} \mathbf{K} \quad \text{ou} \quad \mathbf{L}^* = 3k\mathbf{J} + 2\gamma\mathbf{K} \quad (15)$$

Notons de suite que \mathbf{M}^* ne peut plus être qualifié d'opérateur tangent ! C'est simplement un opérateur qui, utilisé dans (12) à la place de \mathbf{M} , conduira à la même relation entre les moyennes des contraintes et des déformations (les seules quantités qui interviennent dans le résultat macroscopique final). Au contraire, les différentes variantes des modules sécants restent des modules sécants.

Cependant, $\sigma(x)$ n'est pas uniforme sur la phase et donc (14) ne s'applique pas en tout point et la démonstration ci-dessus n'est donc pas une justification suffisante. Il est pourtant à noter que son équivalent pour la méthode tangente incrémentale a été utilisé par Llorca et González [19] pour justifier l'approximation isotrope, supposant de plus que le chargement dans la matrice est proportionnel (sur le plan temporel).

Alors, comment justifier le choix de cette approximation isotrope ? Quelques éléments de réponse peuvent être fournis :

- d'abord elle fournit des résultats de réponse macroscopique plus conformes aux réponses fournies par les calculs de référence. On notera que des analyses faites avec d'autres lois d'érouissage pour la matrice [20], érouissage cinématique linéaire, cas parfaitement plastique, ont conduit exactement aux mêmes conclusions que ci-dessus. L'application à des chargements cycliques a également fourni des résultats analogues ;
- si on considère l'expression anisotrope (9) de \mathbf{L} on voit que par rapport à la solution élastique elle réduit fortement le module dans la « direction d'écoulement » (donnée par \mathbf{E}) en remplaçant μ par γ . Au contraire c'est toujours le module élastique de cisaillement qui intervient dans la « direction orthogonale » \mathbf{F} . L'isotropisation utilisée ici revient à assouplir de façon identique cette direction orthogonale pour le milieu linéaire de comparaison. L'interaction entre particule et matrice, impliquant tous les modules d'élasticité de par sa nature multiaxiale, est alors beaucoup plus souple et conduit à une déformation plus importante dans la matrice [21] ;
- cet assouplissement local peut être justifié intuitivement par le caractère multiaxial de l'interaction, conduisant ainsi à un état local non nécessairement proportionnel au chargement moyen de la matrice. Cela induit un écoulement de cette dernière selon des directions qui ne sont pas proportionnelles à l'écoulement moyen, et il n'y a donc pas de raison pour n'assouplir que la direction associée à l'écoulement moyen [21].

En suivant cette dernière remarque, on peut finalement considérer que la forme « anisotrope » complète, conduisant à la raideur globale la plus élevée, n'est pas plus satisfaisante que la forme « isotrope ». Il est possible que de meilleurs compromis puissent être cherchés, de façon plus ou moins phénoménologique, avec des isotropisations intermédiaires [11], permettant de réduire le module pour la direction orthogonale \mathbf{F} mais de le réduire moins pour la direction d'écoulement \mathbf{E} .

Une autre possibilité serait, sous l'hypothèse du chargement proportionnel, de remplacer localement la loi élastoplastique par une loi élastique non linéaire (théorie de la déformation), ce qui permettrait une linéarisation tangente dans laquelle c'est le module sécant μ_s qui interviendrait pour la direction orthogonale \mathbf{F} , avec $\gamma < \mu_s < \mu$. Notons que, dans ce cas, la formulation resterait anisotrope (donc plus coûteuse) mais qu'elle

permettrait ainsi de conserver la dépendance vis-à-vis du troisième invariant, traduisant par exemple une différence de comportement entre des chargements de traction simple et de cisaillement pur. L'inconvénient d'une telle démarche est qu'elle limite l'application au cas des chargements monotones. De plus, pour une loi élastoplastique quelconque, elle nécessite un procédé d'identification pour la remplacer par une loi d'élasticité non linéaire dans le voisinage de l'état moyen de référence.

Références

- [1] G. Dvorak, Transformation field analysis of inelastic composite materials, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 437 (1992) 311–327.
- [2] G. Dvorak, Y. Bahei-el-Din, A. Wafa, Implementation of the transformation field analysis for inelastic composite materials, *Comput. Mech.* 14 (1994) 201–228.
- [3] J.L. Chaboche, S. Kruch, J.J. Maire, T. Pottier, Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites, *Int. J. Plasticity* 17 (2001) 411–439.
- [4] G. Dvorak, Y. Benveniste, On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 437 (1992) 291–310.
- [5] R. Hill, Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids* 13 (1965) 89–101.
- [6] R. Masson, A. Zaoui, Self-consistent estimates for the rate dependent elastoplastic behaviour of polycrystalline materials, *J. Mech. Phys. Solids* 47 (1999) 1543–1568.
- [7] R. Masson, M. Bornert, P. Suquet, A. Zaoui, An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids* 48 (2000) 1203–1227.
- [8] P. Suquet, Effective properties of nonlinear composites, in: P. Suquet (Ed.), *Continuum Micromechanics*, in: CISM Lectures Notes, Vol. 377, Springer-Verlag, 1997, pp. 197–264.
- [9] J. Michel, P. Suquet, On the strength of composite materials: variational bounds and numerical aspects, in: M.P. Bendsoe, C. Mota-Soares (Eds.), *Topology Design of Structures*, Kluwer Academic, 1993, pp. 355–374.
- [10] P. Ponte Castañeda, A second-order theory for nonlinear composite materials, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIB* 322 (1996) 3–10.
- [11] M. Bornert, Homogénéisation des milieux aléatoires : bornes et estimations, in: M. Bornert, T. Bretheau, P. Gilormini (Eds.), *Homogénéisation en Mécanique des Matériaux*, Hermes Science, 2001, pp. 133–221.
- [12] Z. Hashin, S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids* 11 (1963) 127–140.
- [13] T. Mori, K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall. Mater.* 21 (1973) 597–629.
- [14] R.A. Lebensohn, C.N. Tomé, A self-consistent viscoplastic model: Prediction of rolling textures of anisotropic polycrystals, *Mater. Sci. Eng. A* 175 (1994) 71.
- [15] M. Bornert, P. Ponte Castañeda, Second-order estimates of the self-consistent type for viscoplastic polycrystals, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 454 (1998) 3035–3045.
- [16] M. Berveiller, A. Zaoui, An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids* 26 (1979) 325–344.
- [17] P. Gilormini, Insuffisance de l'extension classique du modèle auto-cohérent au comportement non linéaire, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIB* 320 (1995) 115–122.
- [18] R. Brenner, O. Castelnau, P. Gilormini, A modified affine theory for the overall properties of nonlinear composites, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIB* 329 (2001) 649–654.
- [19] J. Llorca, C. González, A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage, *J. Mech. Phys. Solids* 48 (2000) 675–692.
- [20] P. Kanouté, J.L. Chaboche, Multiscale modelling of non linear behaviour of heterogeneous materials: comparison of recent homogenisation methods, in: *IUTAM Symposium on Multiscale Modeling and Characterization of Elastic-Inelastic Behavior of Engines*, Marrakech, 2002.
- [21] M. Bornert, Personal communication, 2003.
- [22] A. Molinari, G.R. Canova, S. Ahzi, A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity, *Acta Metall.* 35 (12) (1987) 2983–2994.
- [23] P. Gilormini, A critical evaluation of various nonlinear extensions of the self-consistent model, in: A. Pineau, A. Zaoui (Eds.), *Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials*, Kluwer Academic, 1996, pp. 67–74.