



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 789–796



Simulations numériques de différentes méthodes d'éléments finis pour les problèmes de contact avec frottement

Laurent Baillet^a, Taoufik Sassi^b

^a *Laboratoire de mécanique des contacts, UMR 5514, bât. Jean d'Alembert, INSA de Lyon, avenue Albert-Einstein, 69621 Villeurbanne cedex, France*

^b *Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, UMR 6139, UFR sciences campus II, Université de Caen, boulevard maréchal Juin, 14032 Caen cedex, France*

Reçu le 12 novembre 2002 ; accepté après révision le 27 août 2003

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

Nous proposons une étude numérique de différentes méthodes d'éléments finis avec multiplicateurs de Lagrange pour les problèmes de contact avec frottement de Coulomb. Le problème de point-selle correspondant est approché par des éléments finis linéaires ou quadratiques. Les conditions de contact et de frottement discrétisées sont exprimées au sens faible (raccord intégral). La mise en œuvre de ces approches est réalisée dans la nouvelle version d'un code de calcul par éléments finis en deux dimensions (**PLAST2**). *Pour citer cet article : L. Baillet, T. Sassi, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Numerical implementation of different finite element methods for contact problems with friction. In this Note, we propose an efficient numerical treatment for solving contact problems with friction between deformable bodies. The discretized normal and tangential constraints at the candidate contact interface are expressed by using either continuous piecewise linear or piecewise constant Lagrange multipliers. Several numerical studies corresponding to this choice are achieved in the **PLAST2** code. *To cite this article : L. Baillet, T. Sassi, C. R. Mecanique 331 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Solides et structures ; Contact ; Frottement ; Multiplicateurs de Lagrange

Keywords: Solids and structures; Contact; Friction; Lagrange multipliers

Abridged English version

In order to treat problems with friction between deformable bodies, an efficient numerical treatment based on the finite element method with joints using the Lagrange multipliers is proposed. The saddle-point formulation of the continuous problem is given by (7). For a given discretization parameter $h > 0$, the finite element space

Adresses e-mail : laurent.baillet@insa-lyon.fr (L. Baillet), sassi@math.unicaen.fr (T. Sassi).

V_h used in Ω is defined and the contact zone Γ_c inherits a regular familie of 1-D meshes. Two spaces of the traces of V_h on Γ_c are defined. The first $W_h^1(\Gamma_c)$ consists of continuous piecewise linear functions on Γ_c , the second $W_h^0(\Gamma_c)$ consists in piecewise constant functions. M_h^1 and M_h^0 (see (8)–(11)) are then introduced, these are the closed convexes of the Lagrange multipliers respectively continuous piecewise linear and piecewise constant. The solution of the discret problem of unilateral contact with friction between two elastic bodies is a solution to problem (12). The matrix formulation of the mixed problem and the contact conditions with friction are given by Eqs. (17) and (19). The first numerical test validates the **PLAST2** code compared to the **ABAQUS** code on a problem of contact without friction using the classical node-to-segment formulation (Fig. 1(b)). The very local character of this formulation is put into question. For the same test, it is shown that the method of integral matching is more accurate and gives more symmetrical results when the slaves surfaces are inverted (Fig. 2). With friction, the results of normal and tangential contact stress are similar when using the two approximations of the M_h^1 and M_h^0 convexes (Fig. 3). Finally it is shown that the formulation of the integral matching is appropriate for both finite elements Q1 and Q2 (Fig. 4).

1. Introduction

On considère la déformation de deux corps élastiques qui occupent dans la configuration initiale deux ensembles $\bar{\Omega}^\ell$, $\ell = 1, 2$, de \mathbb{R}^2 . Pour $\ell = 1, 2$ le bord Γ^ℓ , de chaque solide comporte 3 parties : $\Gamma^\ell = \bar{\Gamma}_u^\ell \cup \bar{\Gamma}_g^\ell \cup \bar{\Gamma}_c^\ell$ où Γ_u^ℓ , Γ_g^ℓ et Γ_c^ℓ sont disjoints deux à deux. Le champ des déplacements est connu sur la partie de mesure non nulle Γ_u^ℓ . La partie Γ_g^ℓ est soumise à une densité de forces notée $\mathbf{g}^\ell \in (L^2(\Gamma_g^\ell))^2$. Initialement, les deux solides sont en contact sur la partie commune de leur frontière $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$. Le solide Ω^ℓ est soumis à des forces $\mathbf{f}^\ell \in (L^2(\Omega^\ell))^2$. On note par \mathbf{n}^ℓ le vecteur normal unitaire sortant de Ω^ℓ et on désigne par $\mu \geq 0$ le coefficient de frottement (supposé constant sur Γ_c pour simplifier).

Le problème de contact avec frottement de Coulomb consiste à trouver les déplacements \mathbf{u}^ℓ et les contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^\ell)$ vérifiant les équations et les conditions (1)–(6) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^\ell) = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \quad (1)$$

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^\ell) + \mathbf{f}^\ell = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^\ell \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^\ell) \mathbf{n}^\ell = \mathbf{g}^\ell \quad \text{sur } \Gamma_g^\ell \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^\ell = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_u^\ell \quad (4)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) = (\nabla \mathbf{u}^\ell + (\nabla \mathbf{u}^\ell)^T)/2$ représente le tenseur des déformations linéarisé, \mathcal{E}^ℓ est le tenseur d'ordre quatre symétrique et elliptique de l'élasticité linéaire.

Pour introduire les équations sur Γ_c , les notations suivantes sont adoptées :

$$\mathbf{u}^\ell = (\mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{n}^\ell) \mathbf{n}^\ell + \mathbf{u}_t^\ell, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^\ell) \mathbf{n}^\ell = \sigma_n(\mathbf{u}^\ell) \mathbf{n}^\ell + \boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u}^\ell)$$

où $\mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{n}^\ell$ et \mathbf{u}_t^ℓ représentent respectivement les déplacements normal et tangentiel et $\sigma_n(\mathbf{u})$ et $\boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u})$ désignent respectivement les contraintes normale et tangentielle.

Les équations modélisant le contact unilatéral sur Γ_c deviennent :

$$[\mathbf{u}_n] \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u})[\mathbf{u}_n] = 0 \quad (5)$$

La notation $[\mathbf{u}_n]$ représente le saut $(\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2)$ du déplacement normal à travers la zone de contact Γ_c . Les conditions (5) décrivent le contact unilatéral entre les deux solides. Les conditions de frottement de Coulomb sur Γ_c s'écrivent :

$$\begin{cases} |\sigma_t(\mathbf{u})| \leq \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| \\ |\sigma_t(\mathbf{u})| < \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_t] = \mathbf{0} \\ |\sigma_t(\mathbf{u})| = \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| \Rightarrow \exists \lambda \geq \mathbf{0} \text{ t.q. } [\dot{\mathbf{u}}_t] = -\lambda \sigma_t(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (6)$$

où $\dot{\mathbf{u}}_t$ désigne le saut de la vitesse tangentielle sur Γ_c .

S'interessant à la formulation discrète avec multiplicateur de Lagrange du frottement, on se restreint alors à sa formulation en déplacement [1]. Dans ce cas $\dot{\mathbf{u}}_t$ est remplacé par \mathbf{u}_t dans (6).

Soit \mathbf{K} le cône convexe fermé des déplacements admissibles

$$\mathbf{K} = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in V^1 \times V^2; [\mathbf{v}_n] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \}, \quad \text{où } V^\ell = \{ \mathbf{v}^\ell \in (H^1(\Omega^\ell))^2, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\ell \}$$

La formulation variationnelle de (1)–(6) consiste à trouver \mathbf{u} vérifiant [1] :

$$\mathbf{u} \in \mathbf{K}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - j(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K} \quad (7)$$

où

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a^1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad a^\ell(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^\ell} (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell)) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^\ell) \, d\Omega$$

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell \, d\Omega + \int_{\Gamma_u^\ell} \mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell \, d\Gamma, \quad j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_c} \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| |[\mathbf{v}_t]| \, d\Gamma$$

sont définis pour tous \mathbf{u} et \mathbf{v} dans l'espace de Sobolev standard $(H^1(\Omega))^2$. La fonctionnelle $j(\cdot, \cdot)$ traduit le frottement.

2. Formulation mixte du problème discret

On introduit sur chaque solide Ω^ℓ une discrétisation \mathcal{T}_h^ℓ formée de quadrangles κ dont le diamètre ne dépasse pas h_ℓ et on note $h = \max(h_1, h_2)$. On désigne par $\mathbb{P}_q(\kappa)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à q sur κ . L'espace discret approchant \mathbf{V} est alors défini par :

$$\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_h^1 \times \mathbf{V}_h^2 \quad \text{où } \mathbf{V}_h^\ell = \{ \mathbf{v}_h^\ell \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega^\ell}))^2, \forall \kappa \in \mathcal{T}_h^\ell, \mathbf{v}_h^\ell|_\kappa \in (\mathbb{P}_1(\kappa))^2, \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_u^\ell} = \mathbf{0} \}$$

La zone de contact Γ_c hérite de deux maillages indépendants, chacun étant caractérisé par l'ensemble des nœuds $\xi_h^\ell = \{ \mathbf{x}_0^\ell < \mathbf{x}_1^\ell < \dots < \mathbf{x}_{N(h)-1}^\ell < \mathbf{x}_{N(h)}^\ell \}$. On définit l'espace des traces de \mathbf{V}_h^ℓ sur Γ_c [2] :

$$\mathbf{W}_h^{1,\ell}(\Gamma_c) = \{ \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_c}, \mathbf{v}_h^\ell \in \mathbf{V}_h^\ell \} = W_{hn}^{1,\ell}(\Gamma_c) \times W_{ht}^{1,\ell}(\Gamma_c)$$

On peut aussi approcher les traces des éléments de \mathbf{V}^ℓ sur Γ_c par des fonctions constantes par morceaux :

$$\mathbf{W}_h^{0,\ell}(\Gamma_c) = \{ \mu_h, \mu_h|_{[z_i^\ell, z_{i+1}^\ell]} \in \mathbb{P}_0([z_i^\ell, z_{i+1}^\ell]), 0 \leq i \leq N(h) \} = W_{hn}^{0,\ell}(\Gamma_c) \times W_{ht}^{0,\ell}(\Gamma_c)$$

où $z_0^\ell = \mathbf{x}_0^\ell$, $z_{N(h)+1}^\ell = \mathbf{x}_{N(h)}^\ell$ et pour $i = 1, \dots, N(h) - 1$, z_i^ℓ désigne le milieu du segment $T_{i-1}^\ell = [\mathbf{x}_{i-1}^\ell, \mathbf{x}_i^\ell]$.

Le problème de contact avec frottement de Coulomb nécessite l'introduction d'un problème intermédiaire «à seuil fixé». Afin d'obtenir la formulation point-selle discrète à trois champs (voir [2,3]) du problème de départ (7), on introduit les cônes convexes associés aux contraintes normale et tangentielle sur la zone de contact Γ_c . Soit $\mathbf{M}_h^1 = M_{hn}^1 \times M_{ht}^1$ le convexe fermé des multiplicateurs de Lagrange continus et affines par morceaux [2] :

$$M_{hn}^1 = \left\{ \mu_h \in W_{hn}^1(\Gamma_c), \int_{\Gamma_c} \mu_h \psi_h \, d\Gamma \geq 0, \forall \psi_h \in W_{hn}^1(\Gamma_c), \psi_h \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\} \quad \text{et} \quad (8)$$

$$M_{ht}^1 = \left\{ \mu_h \in W_{ht}^1(\Gamma_c), \left| \int_{\Gamma_c} \mu_h \psi_h \, d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_c} s \psi_h \, d\Gamma, \forall \psi_h \in W_{ht}^1(\Gamma_c) \right\} \quad (9)$$

où s désigne le seuil de glissement connu sur Γ_c . On notera $\mathbf{M}_h^0 = M_{hn}^0 \times M_{ht}^0$ le convexe des multiplicateurs constants par morceaux sur Γ_c :

$$M_{hn}^0 = \left\{ \mu_h \in W_{hn}^0(\Gamma_c), \int_{\Gamma_c} \mu_h \psi_h \, d\Gamma \geq 0, \forall \psi_h \in W_{hn}^1(\Gamma_c), \psi_h \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\} \quad \text{et} \quad (10)$$

$$M_{ht}^0 = \left\{ \mu_{ht} \in W_{ht}^0(\Gamma_c), \left| \int_{\Gamma_c} \mu_{ht} \psi_h \, d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_c} s \psi_h \, d\Gamma, \forall \psi_h \in W_{ht}^1(\Gamma_c) \right\} \quad (11)$$

La formulation discrète à trois champs du problème de contact avec frottement et à seuil de glissement $s_h \in M_{hn}$, s'écrit sous la forme suivante [2] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) = (\mathbf{u}_h, \lambda_{hn}, \lambda_{ht}) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_h \text{ tel que :} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_c} \lambda_{hn} [v_{hn}] \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \lambda_{ht} [v_{ht}] \, d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \int_{\Gamma_c} (\mu_{hn} - \lambda_{hn}) [u_{hn}] \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} (\mu_{ht} - \lambda_{ht}) [u_{ht}] \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall (\mu_{hn}, \mu_{ht}) \in \mathbf{M}_h \end{array} \right. \quad (12)$$

avec $\mathbf{M}_h = \mathbf{M}_h^1$ ou $\mathbf{M}_h = \mathbf{M}_h^0$ et $M_{hn} = M_{hn}^1$ ou $M_{hn} = M_{hn}^0$.

On peut donc définir une application Φ_h :

$$\Phi_h : M_{hn} \rightarrow M_{hn} \quad (13)$$

$$s_h \mapsto \lambda_{hn} \quad (14)$$

où $(\mathbf{u}_h, \lambda_{hn}, \lambda_{ht})$ est la solution de (12). Une solution du problème discret de contact unilatéral avec frottement de Coulomb entre deux corps élastiques est une solution du problème (12) où $\lambda_{hn} \in M_{hn}$ est un point fixe de Φ_h .

3. Le problème algébrique

La formulation matricielle du problème mixte est donnée en fixant $h = (h_1, h_2)$. On dispose alors d'une discrétisation comprenant $N = N_1 + N_2$ nœuds où N_ℓ est le nombre de nœuds appartenant à Ω^ℓ . Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a pas de conditions de type déplacements imposés. Les N fonctions de bases de \mathbf{V}_h sont notées φ_i , $i = 1, \dots, N$. On désigne par m le nombre de nœuds sur Γ_c^1 (surface esclave), les valeurs de i comprises entre 1 et m correspondant à ces nœuds. Si n est le nombre de nœuds sur Γ_c^2 (surface « maître »), les valeurs de i comprises entre $N_1 + 1$ et $N_1 + n + 1$ correspondent à ces nœuds. On désigne par ψ_i , la fonction de bases de $W_h^1(\Gamma_c)$ ou de $W_h^0(\Gamma_c)$ au nœud de numéro i .

Avec ces notations, une solution $(\mathbf{u}_h, \lambda_{hn}, \lambda_{ht})$ du problème (12) s'écrit :

$$\mathbf{u}_h = (\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^2) \quad \text{avec } \mathbf{u}^\ell = \sum_{i=1}^{N_\ell} u_h^\ell(i) \varphi_i \text{ et } \lambda_{hn} = \sum_{k=1}^m \lambda_{hn}(k) \psi_k, \quad \lambda_{ht} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ht}(k) \psi_k$$

La première équation de (12) sur le domaine Ω^1 prend la forme matricielle suivante :

$$K^1 \mathbf{U}^1 - \begin{pmatrix} G_N^1 \\ G_T^1 \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = F^1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{N_1} \tag{15}$$

où K^1 désigne la matrice de rigidité élastique associée à Ω^1 , \mathbf{U}^1 désigne le vecteur dont les composantes sont les valeurs nodales de \mathbf{u}_h^1 et $\Lambda = (\Lambda_N, \Lambda_T)$ le vecteur de composantes $\lambda_{hn}(k)$, $\lambda_{ht}(k)$ pour $k = 1, \dots, m$. On note par F^1 le vecteur des forces extérieures tandis que G_N^1 et G_T^1 sont les matrices symétriques (d'ordre m) de raccord entre les multiplicateurs et les déplacements. Plus précisément, lorsque $\mathbf{M}_h = \mathbf{M}_h^1$ ou $\mathbf{M}_h = \mathbf{M}_h^0$ les coefficients des matrices G_N^1 et G_T^1 sont définis respectivement par :

$$a_{i,j}^1 = \int_{\Gamma_c} \varphi_i \cdot \mathbf{n}^1 \psi_j \, d\Gamma, \quad 1 \leq i, j \leq m, \quad a_{i,j}^1 = \int_{\Gamma_c} \varphi_i \cdot \mathbf{t} \psi_j \, d\Gamma, \quad 1 \leq i, j \leq m$$

Remarquons que pour un choix fixé de l'ensemble des multiplicateurs, les matrices G_N^1 et G_T^1 sont égales. On note alors $G^1 = G_N^1 = G_T^1$.

De la même manière, le système d'équations d'inconnues \mathbf{U}^2 et Λ sur Ω^2 s'écrit :

$$K^2 \mathbf{U}^2 - \begin{pmatrix} G_N^{2,1} \\ G_T^{2,1} \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = F^2 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{N_2}. \tag{16}$$

Dans (16) $G^{2,1} = G_N^{2,1} = G_T^{2,1}$ et $G^{2,1}$ est la matrice rectangulaire à n lignes et m colonnes de coefficients : $a_{i,j}^{2,1} = \int_{\Gamma_c} \varphi_i \cdot \mathbf{n}^2 \psi_j \, d\Gamma$, $N_1 \leq i \leq N_1 + n + 1$ et $1 \leq j \leq m$.

Finalement la première équation de (12) devient :

$$\begin{pmatrix} K^1 & 0 \\ 0 & K^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G^1 \\ 0 \\ G^{2,1} \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \tag{17}$$

On s'intéresse maintenant à l'écriture matricielle des conditions de contact et de frottement du problème (12) :

$$\int_{\Gamma_c} (\mu_{hn} - \lambda_{hn}) [u_{hn}] \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} (\mu_{ht} - \lambda_{ht}) [u_{ht}] \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall (\mu_{hn}, \mu_{ht}) \in \mathbf{M}_h \tag{18}$$

avec $\mathbf{M}_h = \mathbf{M}_h^1$ ou $\mathbf{M}_h = \mathbf{M}_h^0$. Soient U_N et U_T les vecteurs dont les composantes sont respectivement les valeurs nodales de $[u_{hn}]$ et $[u_{ht}]$. On peut montrer que la forme algébrique de l'inéquation (18) s'écrit : pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{cases} (G^1 \Lambda_N)_i \leq 0 \\ (U_N^1 + (G^1)^{-1} (G^{2,1})^t U_N^2)_i \leq 0 \\ (G^1 \Lambda_N)_i (U_N^1 + (G^1)^{-1} (G^{2,1})^t U_N^2)_i = 0 \\ |(G^1 \Lambda_T)_i| \leq -\mu (\Lambda_N)_i \\ |(G^1 \Lambda_T)_i| < -\mu (\Lambda_N)_i \Rightarrow (U_T^1 + (G^1)^{-1} (G^{2,1})^t U_T^2)_i = 0 \\ (G^1 \Lambda_T)_i (U_T^1 + (G^1)^{-1} (G^{2,1})^t U_T^2)_i \leq 0 \end{cases} \tag{19}$$

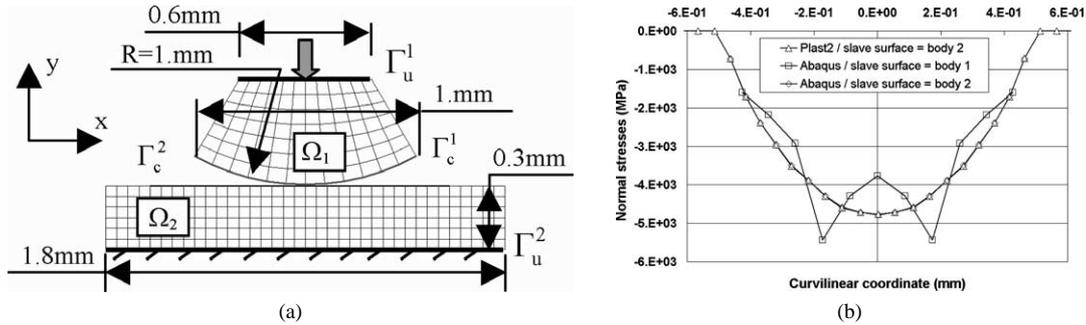


Fig. 1. (a) Le problème physique ; (b) Contrainte normale en raccord ponctuel.

Fig. 1. (a) Set-up of the problem; (b) Normal stress in node-on-segment approach.

4. Résultats numériques

Dans cette section, on étudie et on compare numériquement les performances des méthodes présentées précédemment dans le cas d'un contact frottant et non frottant; l'analyse de la qualité de l'approximation de ces méthodes a été présentée [2]. Ces méthodes ont été implantées dans le code d'éléments finis en dynamique explicite **PLAST2**. Les conditions de contact et de frottement sont traitées par les multiplicateurs de Lagrange (voir [4] pour une formulation en pénalisation).

Dans les tests numériques, on considère le problème de contact représenté sur la Fig. 1. Le domaine Ω^1 est une partie d'un disque de rayon 1 mm, le domaine Ω^2 est un rectangle de dimension 1,8 mm \times 0,3 mm. Sur chaque domaine, la loi de comportement est celle de Hooke pour les matériaux isotropes et homogènes. Pour $\ell = 1, 2$:

$$\sigma_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell) = \frac{E_\ell \nu_\ell}{(1 - 2\nu_\ell)(1 + \nu_\ell)} \delta_{ij} \epsilon_{kk}^\ell(\mathbf{u}^\ell) + \frac{E_\ell}{1 + \nu_\ell} \epsilon_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell)$$

avec $E_1 = 70000$ MPa, $E_2 = 7000$ MPa et $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Le domaine Ω^2 est encastré sur la partie Γ_u^2 . Le cycle de déplacement imposé sur Γ_u^1 est composé d'un déplacement vertical de $-0,1581$ mm, puis d'un retour à la position initiale (déplacement de $+0,1581$ mm).

Sur chaque solide, on utilisera des éléments finis rectangulaires de type Q_1 (quadrangles à 4 nœuds) ou quadratiques de type Q_2 (quadrangles à 8 nœuds). Les contraintes normale et tangentielle sont représentées pour l'enfoncement maximum de 0,1581 mm.

4.1. Le raccord ponctuel : comparaison avec ABAQUS

Il s'agit de comparer le code **PLAST2** et le code **ABAQUS** sur un problème de contact sans frottement en utilisant un raccord ponctuel de type nœud-segment (unique raccord implanté dans **ABAQUS**). Ceci permet, d'une part, de valider le code **PLAST2** et de montrer les limites du raccord ponctuel pour traiter les conditions de contact. La surface de contact se déformant au cours de ce cycle, il est nécessaire de réactualiser les matrices de raccord G^1 et $G^{2,1}$ à chaque incrément. La Fig. 1(b) représente la répartition des contraintes normales sur la zone de contact pour l'enfoncement maximum lorsque Γ_c^1 ou Γ_c^2 est la surface esclave. On notera la similitude des contraintes calculées par les deux codes lorsque la surface esclave est définie sur Ω_2 et la dissymétrie des résultats obtenus lorsque la surface esclave est permutée. Il est clair que sur ce test le raccord ponctuel a été mis en défaut à cause de son caractère très local.

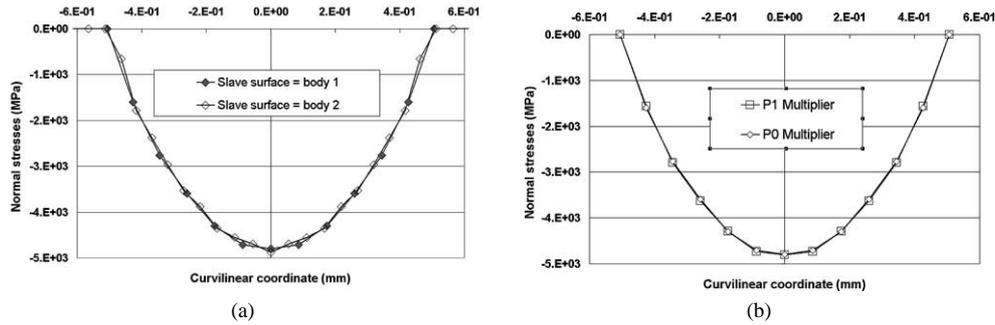


Fig. 2. Raccord intégral : (a) Contraintes normales sur Γ_c^1 et sur Γ_c^2 ; (b) Contraintes normales pour $M_{hn} = M_{hn}^0$ et $M_{hn} = M_{hn}^1$.
 Fig. 2. Integral matching: (a) Normal stresses on Γ_c^1 and on Γ_c^2 ; (b) Normal stresses for $M_{hn} = M_{hn}^0$ and $M_{hn} = M_{hn}^1$.

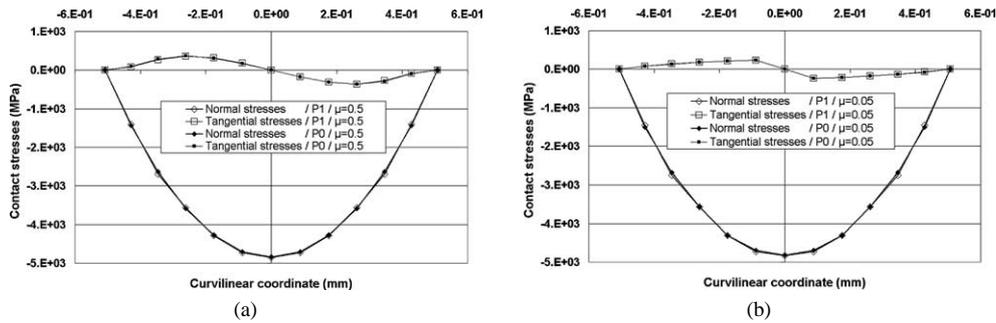


Fig. 3. Contraintes normales et tangentielles pour différents choix de multiplicateurs et pour différents coefficient de frottement μ .
 Fig. 3. Normal and tangential stresses for different multipliers and different friction coefficient μ .

4.2. Le raccord intégral

4.2.1. Éléments finis rectangulaires Q_1

On étudie dans ce paragraphe, la mise en œuvre numérique dans **PLAST2** d'une autre technique de raccord de maillages à l'interface de contact, appelée raccord intégral (voir la Section 2 pour les différentes méthodes utilisant ce raccord). En considérant d'abord le problème de contact sans frottement (voir aussi [6]), on étudie le comportement du raccord intégral selon que Γ_c^1 ou Γ_c^2 est choisie comme surface esclave.

Dans le cas de multiplicateurs constants (M_h^0) ou linéaires (M_h^1) sur l'interface de contact le raccord intégral rend la gestion du contact plus symétrique lorsque l'on permute les surfaces esclaves (Fig. 2(a)). Notons que dans [5] une méthode qui consiste à rajouter une surface de contact fictive entre les deux corps a été développée. Sur la Fig. 2(b), on notera la similitude des multiplicateurs traduisant la contrainte normale lorsque $M_{hn} = M_{hn}^0$ et $M_{hn} = M_{hn}^1$ (multiplicateur P_0 et multiplicateur P_1).

On se place maintenant dans le cas d'un problème de contact avec frottement de Coulomb. Il s'agit de s'assurer du bon comportement du raccord intégral en utilisant les différentes approximations des convexes associés aux contraintes normale et tangentielle ($M_h = M_h^1$ ou $M_h = M_h^0$) introduits dans la Section 2. Dans ce cas, les commentaires précédents s'appliquent. L'allure des contraintes normale et tangentielle est similaire (Fig. 3) pour les deux types d'approximations de M_h et pour différents coefficients de frottement μ .

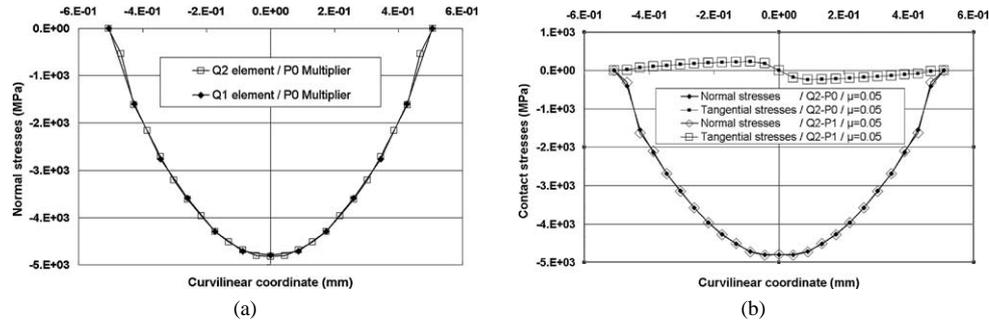


Fig. 4. (a) Contraintes normales pour différents éléments finis ; (b) Contraintes normales et tangentielles pour différents choix de multiplicateurs et pour des éléments finis Q_2 .

Fig. 4. (a) Normal stresses for Q_1 and Q_2 finite elements; (b) Normal and tangential stresses (Q_2 finite elements) for different multipliers.

4.2.2. Éléments finis quadratiques Q_2

Le raccord intégral a été implanté dans **PLAST2** pour les éléments finis quadratiques de type Q_2 . La Fig. 4 valide le bon comportement du raccord intégral pour des problèmes de contact avec et sans frottement. De même que pour les éléments finis de type Q_1 , les résultats sont identiques pour des multiplicateurs de Lagrange M_h^0 ou M_h^1 .

5. Conclusion

La méthode de raccord intégral a été implantée et validée dans un code d'éléments finis avec multiplicateurs de Lagrange pour des problèmes évolutifs de contact avec frottement. Par rapport au raccord ponctuel, le raccord intégral est plus précis et donne des résultats plus symétriques lorsqu'on inverse les surfaces esclaves.

La formulation du raccord intégral est appropriée aussi bien pour des éléments finis Q_1 que Q_2 et les résultats obtenus sont similaires avec des multiplicateurs M_h^1 ou M_h^0 .

Références

- [1] G. Duvaut, J.-L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.
- [2] L. Baillet, T. Sassi, Méthodes d'éléments finis avec hybridisation frontière pour les problèmes de contact avec frottement, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 917–922.
- [3] J. Haslinger, I. Hlaváček, Approximation of Signorini problem with friction by a mixed finite element method, J. Math. Anal. Appl. 86 (1982) 99–122.
- [4] T.W. McDevitt, T.A. Laursen, A mortar-finite element formulation for frictional contact problem, Int. J. Numer. Methods Engrg. 48 (2000) 1525–1547.
- [5] G. Rebel, K.C. Park, C.A. Felippa, A contact formulation based on localized Lagrange multipliers: formulation and application to two-dimensional problems, Int. J. Numer. Methods Engrg. 54 (2) (2002) 263–297.
- [6] P. Hild, Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 184 (2000) 99–123.