Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT

C. R. Mecanique 331 (2003) 739–744

COMPTES RENDUS

MECANIQUE

Evolution de la fonction de répartition d'un gaz de tourbillons 2D en présence d'un bruit

Stéphane Decossin, Vadim Pavlov

Université de Lille 1, laboratoire de mécanique de Lille, UMR 8107, boulevard Paul Langevin, 59655 Villeneuve-d'Ascq cedex, France

Reçu le 5 juin 2003 ; accepté après révision le 11 septembre 2003

Présenté par Patrick Huerre

Résumé

Dans ce travail, nous étudions le mouvement de N tourbillons localisés en présence de « bruit ». Afin d'appliquer les méthodes de la mécanique statistique, nous introduisons une fonction de la distribution de probabilité des tourbillons et déterminons l'équation d'évolution pour cette fonction dans laquelle la présence du « bruit » se manifeste comme un terme similaire à la dissipation visqueuse. Cette équation est isomorphe aux systèmes d'équations permettant de décrire la turbulence 2D avec viscosité. L'avantage de cette formulation est qu'elle peut être appliquée numériquement pour des très grands nombres de Reynolds. ***Pour citer cet article : S. Decossin, V. Pavlov, C. R. Mecanique 331 (2003).***

Abstract

Evolution of the repartition function of 2D vortex gaz in presence of noise. In this work, we study the motion of N localized vortices in the presence of 'noise'. To apply the methods of statistical mechanics, we determine the evolution equation for the probability density function of vortices in which the presence of the 'noise' is accounted for by as a term similar to viscosity. This equation is isomorph to the system of equations which describe 2D turbulence with viscosity. The advantage of this formulation is that it can be numerically implemented at very large Reynolds numbers. ***To cite this article: S. Decossin, V. Pavlov, C. R. Mecanique 331 (2003).***

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Tourbillons localisés ; Probabilité de répartition ; Écoulements visqueux

Keywords: Fluid mechanics; Localized vorticity; Probability distribution; Viscous flows

Abridged English version

Consider a two-dimensional 'vortex gas', with vorticity distribution given by $\Omega = \sum_i \gamma^{(i)}\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(i)}(t))$. Here, $\gamma^{(i)}$ represents the intensity of the ith point vortex and $\delta(\cdot)$ the Dirac delta function. Given the great number number of vortices, we can choose to use a statistical approach. So, it is natural to introduce a function ($N \gg 1$)

Adresse e-mail : stephane.decossin@univ-lille1.fr (S. Decossin).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2003.09.002

to describe the probability of their spatial distribution. We deduce the temporal evolution equation of this function in the presence of external 'noise'. We show how, in the case of a localized vortex model, we can approach a description of 'viscous' flow.

From the system of equations for a barotropic compressible fluid (completed by the state equation $p = p(\rho)$), we can establish a Hamiltonian formulation [1] of the motion of localized vortex centers in a compressible fluid.

Consider a collection of N localized vortices, the velocities of which are perturbed by some independent 'noise' $s_i^{(n)}(t)$ defined by compressibility effects. Then, the equations of motion take the form presented in (3).

The physical significance of the equations consists of the velocity of displacement of the vortex n (the term $\partial_t q_i^{(n)}$) is defined by the total velocity of the flow where is the vortex. In fact, the total velocity can be written as the sum: $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(t)} + \mathbf{v}^{(s)}$, where $\operatorname{div} \mathbf{v}^{(t)} = 0$ and $\operatorname{rot} \mathbf{v}^{(s)} = 0$. From the operator identity $\Delta \mathbf{v} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$, and with the Green function which satisfies the equation $\Delta G = \delta$, we find Eq. (2) which shows that the flow velocity has two parts: a potential one and and rotational one. The rotational part of the velocity is determined by the field induced by the vortices when $\operatorname{rot} \mathbf{v}^{(t)} \neq 0$. In Eq. (3), this corresponds to the term with the Hamiltonian. Moreover, in the general case, the flow is influenced by the potential part of the flow, $s_i^{(n)}(t)$. For our purpose, this part is supposed to be fixed by external constraints defined in the statistical sense. Designate by $\langle \cdots \rangle$ the statistical averaged operator with respect to initial conditions, and suppose that, in this sense, the part $s_i^{(n)}(t)$ of the full field verifies conditions (4) which respectively correspond to zero averaged condition and to the presence of 'white noise'. So, it is a model similar to the Langevin pattern model: the system is excited by external noise.

It clearly appears, from Eq. (3), that when a vortex undergoes a 'Brownian' motion, the spatial distribution of a great number of vortices is going to yield a similar solution to the heat equation solution, where the 'viscous' evolution is unavoidable.

The object of this Note is essentially to give the arguments that a numerical simulation with the help of Eqs. (3) and (4) allows to approach the solutions of the Navier–Stokes equations.

Eqs. (19) and (20) represent the desired result: the evolution equation for the vortex probability distribution. This probability becomes the basic quantity from which we can calculate the averaged vorticity $\langle \Omega \rangle$: this is calculated with the help of the formula $\langle \Omega \rangle = \sum_i \gamma^{(i)} n^{(i)}(\mathbf{x}, t)$.

We have established, in the framework of localized vortices with external noise, an evolution equation for the vortex distribution which presents a term similar to viscosity. This equation is isomorph to the 2D turbulence equations with viscosity. The advantage of our description is that the equations can be easily numerically resolved at very large Reynolds numbers.

1. Introduction

Soit un « gaz de tourbillons » bidimensionnels localisés. On a donc la vorticité qui se met sous la forme $\Omega = \sum_i \gamma^{(i)} \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(i)}(t))$, où $\gamma^{(i)}$ représente l'intensité du i-ème tourbillon. Etant donné le grand nombre de ces tourbillons, il est raisonnable d'introduire une fonction de leur distribution qui décrit la probabilité de leur répartition dans l'espace ; le champ de vitesse moyenné de l'écoulement est déduit donc de la répartition de la vorticité localisée dans les tourbillons moyennée statistiquement. Nous déduisons l'équation d'évolution temporelle de cette fonction. Plusieurs questions se posent donc : comment évolue le système en présence de bruit ? Est-il possible, dans le cadre du modèle des tourbillons ponctuels, d'approcher une description de l'écoulement « visqueux » ?

2. Equation d'évolution pour la probabilité de répartition de tourbillons

En partant du système d'équations régissant le mouvement d'un fluide parfait barotrope compressible (complété par l'équation d'état $p = p(\rho)$)

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p, \quad \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1}$$

et en appliquant le rotationnel à cette équation de mouvement, on trouve l'équation d'évolution de la vorticité. Dans le cas 2D, on a $\partial_t \Omega + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\Omega = 0$, où la vitesse $\mathbf{v}$ contient deux parties : rotationnelle et potentielle. En effet, la vitesse totale peut être présentée comme une somme : $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(t)} + \mathbf{v}^{(s)}$, où $\operatorname{div}\mathbf{v}^{(t)} = 0$ et $\operatorname{rot}\mathbf{v}^{(s)} = 0$. De la formule bien connue $\Delta\mathbf{v} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}$, en introduisant la fonction de Green qui vérifie l'équation $\Delta G = \delta$, on trouve que

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\nabla'\operatorname{div}'\mathbf{v}' - \int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\operatorname{rot}'\operatorname{rot}'\mathbf{v}' \\ &= \nabla \int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\operatorname{div}\mathbf{v}' - \operatorname{rot}\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\operatorname{rot}\mathbf{v}'\end{aligned} \tag{2}$$

et on voit que la vitesse de l'écoulement comporte deux composantes : potentielle et rotationnelle. La composante rotationnelle de la vitesse est déterminée par le champ induit par les tourbillons lorsque $\operatorname{rot}\mathbf{v}^{(t)} \neq 0$ (il s'agit d'une composante incompressible, quand $\operatorname{div}\mathbf{v}^{(t)} = 0$). Outre cela, dans le cas général, l'écoulement est influencé par la composante potentielle de la vitesse, $s_i^{(n)}(t)$ (cette composante vérifie la condition $\operatorname{rot}\mathbf{v}^{(s)} = 0$). Dans ce qui suit, cette composante est supposée être fixée par des contraintes extérieures définies au sens statistique.

On suppose que le champ de vorticité est localisé essentiellement dans les tourbillons. On peut établir une formulation Hamiltonienne [1] du mouvement de leurs centres.

Considérons un ensemble de N tourbillons localisés dont les vitesses sont perturbées par des « bruits » indépendants $s_i^{(n)}(t)$. Les équations de leur mouvement prennent alors la forme Hamiltonienne [1,2]

$$\partial_t q_i^{(n)} = \frac{1}{\gamma^{(n)}}\varepsilon^{ij}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i^{(n)}} + s_i^{(n)}(t) \tag{3}$$

Ici $q_i^{(n)}$ est la coordonnée du n-ème tourbillon, $\gamma^{(n)}$ sont intensité, $\mathcal{H}$ est l'énergie totale du fluide et ε^{ij} représente le tenseur de Levi–Civitta.

Le sens physique de ces équations consiste en ce que la vitesse de déplacement du tourbillon n (le terme $\partial_t q_i^{(n)}$) est définie par la vitesse *totale* de l'écoulement à l'endroit où se trouve celui-ci.

Désignons par $\langle\cdots\rangle$ l'opérateur de moyenne statistique par rapport aux coordonnées initiales, et supposons que, dans ce sens, la composante $s_i^{(n)}(t)$ du champ complémentaire vérifie les conditions

$$\langle s_i^{(n)}\rangle = 0, \qquad \langle s_i^{(n)}(t)s_j^{(m)}(t')\rangle = 2\nu\delta_{ij}\delta(t-t')\delta_{nm} \tag{4}$$

qui correspondent respectivement à la condition de moyenne nulle, et à la présence d'un « bruit blanc ». Il s'agit donc d'un modèle similaire à celui de Langevin : le système est excité par des bruits extérieurs. D'après l'Éq. (3), il apparaît clairement que lorsqu'un tourbillon effectue un mouvement « Brownien », la distribution dans l'espace d'un grand nombre de tourbillons va tendre vers une solution similaire à celle de l'équation de la chaleur. L'évolution « visqueuse » devient donc inévitable.

L'objectif de cette note est essentiellement de présenter les arguments selon lesquels une simulation numérique à l'aide des Éqs. (3) et (4) permet d'approcher les solutions des équations de Navier–Stokes.

Introduisons une fonction-indicatrice de la position d'un tourbillon

$$J(\mathbf{x},t) = \delta^{(2)}\big(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}(t)\big) \tag{5}$$

Introduisons également la densité de probabilité en la définissant par l'expression :

$$n^{(n)}(\mathbf{x},t) = \big\langle \delta^{(2)}\big(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}(t)\big)\big\rangle \tag{6}$$

Remarquons que

$$\int \mathrm{d}\mathbf{x}\,\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}-\mathbf{q}^{(n)}(t)\big)=1, \quad \text{et} \quad \int \mathrm{d}\mathbf{x}\,n^{(n)}(\mathbf{x},t)=1 \tag{7}$$

L'intensité moyenne de vorticité, $\langle\Omega\rangle$, est donc calculée d'après la formule

$$\langle\Omega\rangle=\left\langle\sum_i \gamma^{(i)}\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}-\mathbf{q}^{(i)}(t)\big)\right\rangle=\sum_i \gamma^{(i)}n^{(i)}(\mathbf{x},t) \tag{8}$$

Sachant que pour un champ $u_i(t)$, on a : $\delta u_i(t)/\delta u_i(t')=\delta_{ij}\delta(t-t')$, on trouve

$$\gamma^{(n)}\partial_s\frac{\delta q_i^{(n)}(s)}{\delta s_k^{(m)}(t')}=\varepsilon^{ij}\frac{\delta}{\delta s_k^{(m)}(t')}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i^{(n)}}+\gamma^{(n)}\delta(s-t')\delta_{ik}\delta_{mn} \tag{9}$$

En intégrant l'Éq. (9) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\delta q_i^{(n)}(t)}{\delta s_k^{(m)}(t')}=\underbrace{\{\cdots\}}_{(*)}+\theta(t-t')\delta_{ik}\delta_{mn} \tag{10}$$

Le terme entre crochets $(*)$ ne présente pas d'intérêt pour nous car c'est le cas $t'\to t$ qui nous intéresse dans ce qui suit. Si $t'\to t$, la valeur de ce terme (borné) est multipliée par $\Delta t=t-t'$ et devient donc négligeable. Dans ce cas, $\theta(t-t')\to\frac{1}{2}$. Par conséquent, on trouve que :

$$\lim_{t'\to t}\left[\frac{\delta q_i^{(n)}(t)}{\delta s_k^{(m)}(t')}\right]=\frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{mn} \tag{11}$$

En dérivant l'expression (6) et en introduisant l'Éq. (3), on trouve :

$$\gamma^{(n)}\partial_t n^{(n)}(\mathbf{x},t)=-\gamma_{(i)}\partial_i\big\langle s_i^{(n)}(t)\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}-\mathbf{q}^{(n)}\big)\big\rangle-\partial_i\left\langle\varepsilon^{ij}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j^{(n)}}\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}-\mathbf{q}^{(n)}\big)\right\rangle \tag{12}$$

Calculons tout d'abord le premier terme dans l'Éq. (12). En appliquant la formule de Furutsu–Novikov [3] pour des processus gaussiens

$$\big\langle s_i^{(n)}(t)F[s]\big\rangle=\sum_j\int \mathrm{d}t'\left\langle\frac{\delta F[s]}{\delta s_j^{(m)}(t')}\right\rangle\left\langle s_i^{(n)}(t)s_j^{(m)}(t')\right\rangle \tag{13}$$

nous trouvons :

$$\big\langle s_i^{(n)}(t)\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}-\mathbf{q}^{(n)}\big)\big\rangle=-2\nu\partial_j\left\langle\frac{\delta q_i^{(n)}(t)}{\delta s_j^{(n)}(t')}\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}-\mathbf{q}^{(n)}\big)\right\rangle=-\nu\partial_i n^{(n)}(\mathbf{x},t) \tag{14}$$

Le second terme de l'Éq. (12) est déterminé en exprimant l'hamiltonien à l'aide de la fonction de Green. En utilisant les propriétés de la fonction de Dirac, on obtient :

$$\varepsilon^{ij}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j^{(n)}}=\varepsilon^{ij}\gamma^{(n)}\sum_{m=1}^{N}{}'\gamma^{(m)}\frac{\partial}{\partial q_j^{(n)}}G\big(\mathbf{q}^{(n)},\mathbf{q}^{(m)}\big)=\varepsilon^{ij}\gamma^{(n)}\sum_{m=1}^{N}{}'\gamma^{(m)}\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\,\frac{\partial G(\mathbf{q}^{(n)},\mathbf{x}')}{\partial q_j^{(n)}}\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}'-\mathbf{q}^{(m)}\big)$$

Le second terme de l'Éq. (12) devient alors :

$$\left\langle\varepsilon^{ij}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j^{(n)}}\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}'-\mathbf{q}^{(n)}\big)\right\rangle=\varepsilon^{ij}\gamma^{(n)}\sum_{m=1}^{N}{}'\gamma^{(m)}\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\,\frac{\partial G(\mathbf{q}^{(n)},\mathbf{x}')}{\partial q_j^{(n)}}\big\langle\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}'-\mathbf{q}^{(m)}\big)\delta^{(2)}\big(\mathbf{x}-\mathbf{q}^{(n)}\big)\big\rangle \tag{15}$$

Dans notre cas, compte tenu que l'interaction à longue distance des tourbillons dont « l'énergie de l'interaction » individuelle est ($\sim \ln|\mathbf{q}^m - \mathbf{q}^{(n)}|$), on peut considérer que les tourbillons sont fortement influencés, non pas par les tourbillons voisins, mais par les tourbillons se trouvant aux grandes distances.

En effet, nous justifions nos propos en considérant un grand nombre de tourbillons répartis de façon homogène et positionnés autour d'un tourbillon (i). En considérant n la concentration des tourbillons et $2\pi r\,\mathrm{d}r$ le « volume » dans lequel ceux-ci se trouvent, le champ de vitesse, là où se trouve le tourbillon (i), dû à l'influence de l'ensemble des autres tourbillons, peut être estimé comme ayant la forme $\sim r^{-1} n 2\pi r\,\mathrm{d}r$. Cette vitesse, induite par l'ensemble des tourbillons se trouvant dans la bande concentrique de rayon r, devient donc indépendante de r. Ceci signifie que ce ne sont pas uniquement les tourbillons voisins qui influencent fortement le mouvement du tourbillon (i), mais l'ensemble des tourbillons éloignés. L'influence des tourbillons situés dans une bande de même largeur $\mathrm{d}r$, mais à une distance plus grande, a même valeur.

Le tourbillon (i) se déplace donc par rapport aux « voisins » de façon indépendante. Dans cette situation, la probabilité mutuelle peut être décomposée comme [6]

$$\begin{aligned}\big\langle \delta^{(2)}\big(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(m)}\big)\delta^{(2)}\big(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}\big)\big\rangle &= \big\langle \delta^{(2)}\big(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(m)}\big)\big\rangle\big\langle \delta^{(2)}\big(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}\big)\big\rangle\big[1 + P_{12}\big(\mathbf{x}', \mathbf{x}; \mathbf{q}^{(m)}, \mathbf{q}^{(n)}\big)\big] \\ &\simeq \big\langle \delta^{(2)}\big(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(m)}\big)\big\rangle\big\langle \delta^{(2)}\big(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}\big)\big\rangle \end{aligned} \tag{16}$$

lorsque l'on néglige le coefficient de corrélation mutuelle, $P_{12} \ll 1$, et avec

$$\big\langle \delta^{(2)}\big(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(m)}\big)\big\rangle\big\langle \delta^{(2)}\big(\mathbf{x} - \mathbf{q}^{(n)}\big)\big\rangle = n^{(m)}(\mathbf{x}', t) n^{(n)}(\mathbf{x}, t) \tag{17}$$

On obtient donc le résultat suivant :

$$\left\langle \varepsilon^{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j^{(n)}} \delta^{(2)}\big(\mathbf{x}' - \mathbf{q}^{(n)}\big)\right\rangle = \varepsilon^{ij} \gamma^{(n)} n^{(n)}(\mathbf{x}, t) \partial_j \int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, n^{(m)}(\mathbf{x}', t) \sum_{m=1}^{N}{}' \gamma^{(m)} G\big(\mathbf{q}^{(n)}, \mathbf{x}'\big) \tag{18}$$

L'équation d'évolution s'écrit alors :

$$\partial_t n^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta n^{(n)}(\mathbf{x}, t) - \partial_i \varepsilon^{ij} n^{(n)}(\mathbf{x}, t) \partial_j U(\mathbf{x}, t) \tag{19}$$

où

$$U(\mathbf{x}, t) = \int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sum_m{}' \gamma^{(m)} n^{(m)}(\mathbf{x}', t) \tag{20}$$

Ces deux équations représentent le résultat cherché : l'équation d'évolution pour la probabilité de répartition des tourbillons. Cette probabilité devient la quantité de base à partir de laquelle on peut calculer la vorticité moyenne $\langle \Omega \rangle$: celle ci est calculée à laide de la formule $\langle \Omega \rangle = \sum_i \gamma^{(i)} n^{(i)}(\mathbf{x}, t)$.

Pour les tourbillons identiques de même signe, l'équation d'évolution s'écrit :

$$\partial_t n^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta n^{(1)}(\mathbf{x}, t) - \partial_i \varepsilon^{ij} n^{(1)}(\mathbf{x}, t) \partial_j U(\mathbf{x}, t) \tag{21}$$

où (le petit domaine $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$ est exclu)

$$U(\mathbf{x}, t) = \gamma N \int \mathrm{d}\mathbf{x}'\, G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') n^{(1)}(\mathbf{x}', t) \tag{22}$$

L'Éq. (21) peut être réécrite sous la forme

$$[\partial_t - \nu \Delta]\langle \Omega \rangle - \varepsilon^{ij}\big(\partial_i U(\mathbf{x}, t)\big)\partial_j \langle \Omega \rangle = 0 \tag{23}$$

Cette équation a été obtenue en remplaçant dans l'Éq. (19) la densité de probabilité $n^{(1)}$ par l'expression $n = \langle \Omega \rangle / \gamma N$. Le paramètre ν peut être estimé par l'expression $\nu \sim \langle s_i^2(t) \rangle \tau$, où τ est le temps caractéristique de corrélation du bruit. Cette formule découle de (4).

3. Conclusion

Nous avons établi, dans le cadre du modèle des tourbillons localisés soumis à un bruit externe (voir Eqs. (3) et (4)), une équation d'evolution dans laquelle intervient un terme similaire à la viscosité (23). Cette équation est isomorphe aux systèmes d'équations permettant de décrire la turbulence 2D avec viscosité. L'avantage de notre description consiste en ce que les Éqs. (3) et (4) peuvent être résolues numériquemment par des moyens relativement simples, même pour les très grands nombres de Reynolds quand les méthodes traditionnelles rencontrent des difficultés.

Références

[1] V.P. Goncharov, V.I. Pavlov, Some remarks on the physical foundation of the Hamiltonian description of fluid motions, Eur. J. Mech. B Fluids 16 (4) (1997) 509–555.
[2] S. Decossin, V. Pavlov, Quelques remarques sur la dynamique Hamiltonienne des tourbillons, C. R. Acad. Sci. Sér. IIb 329 (2001) 901.
[3] A.S. Monin, A.M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, MIT Press, 1975.
[4] A. Ishimaru, Wave Propagation and Scattering in Random Media, Vol. I: Single Scattering and Transport Theory, Academic Press, New York, 1978.
[5] A.J. Chorin, Numerical study of slightly viscous flow, J. Fluid Mech. 57 (1973) 785.
[6] L.D. Landau, E.M. Lifchitz, Cours de physique théorique, in : Cinétique physique, Tome 10, MIR, 1994.