



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mécanique 332 (2003) 271–277



Application de l'approximation polytropique à la Simulation Numérique Directe de gaz chauds

Saïd Benjeddou, Claude Rey*, Eric Serre

Laboratoire de modélisation et simulation numérique en mécanique (LMSNM-L3M) FRE n° 2405 du CNRS, Technopôle de Château Gombert, IMT La Joliette, 38, rue F. Joliot-Curie, 13451 Marseille cedex 20, France

Reçu le 24 août 2003 ; accepté le 4 septembre 2003

Présenté par Michel Comberous

Résumé

En alternative aux hypothèses habituelles de Boussinesq, nous proposons ici, pour les gaz non isothermes, une nouvelle approximation dite approximation polytropique. Dans cette approximation les grandeurs d'état sont liées par une loi polytropique d'exposant χ dont nous négligeons la variabilité dans les dérivations spatio-temporelles dans les équations régissant l'écoulement considéré. Comme application, nous avons utilisé cette nouvelle démarche pour résoudre numériquement un écoulement d'un gaz chauffé dans une cavité annulaire de type rotor-stator. Nous exposons ici la méthode numérique utilisée et quelques résultats de l'approximation polytropique ainsi qu'une comparaison avec des résultats de l'approximation de Boussinesq. *Pour citer cet article : S. Benjeddou et al., C. R. Mécanique 332 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Application of the polytropic approximation to Direct Numerical Simulation of heated gases. As alternative to the usual assumptions of Boussinesq, we propose, for heated gases, a new approximation called polytropic approximation. With this approximation the quantities of corresponding state are related by a polytropic law of exponent χ of which we neglect the variability in space-time derivations in the equations governing the flow considered. As application, we used this new proposition to solve numerically a heated gas flow in an annular cavity of rotor-stator type. We expose here the numerical method and some results of the polytropic approximation with comparison to results of Boussinesq approximations. *To cite this article: S. Benjeddou et al., C. R. Mécanique 332 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Gaz chauffés ; Effets de compressibilité ; Approximations de Boussinesq ; Transformation Polytropique ; Simulation Numérique Directe (DNS)

Keywords: Fluid Mechanics; Heated gases; Compressibility effects; Boussinesq approximations; Polytropic transformation; Direct Numerical Simulation (DNS)

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : crey@l3m.univ-mrs.fr (C. Rey).

Abridged English version

This Note concerns with results issued from numerical resolution of Navier–Stokes equations written with new variables and a polytropic approximation concerning the relation between the state variable quantities. In this approximation, there is a total taking into account of the couplings between dynamical and thermal fields, as well as of compressibility effects.

A pseudospectral method is proposed for the computation of the 3D Navier–Stokes equations inside an annular rotor-stator cavity. The method uses a second order semi-implicit scheme for the time integration. The spatial discretization uses a Fourier–Galerkin approximation leading to a set of 2D elliptic equations depending on the radial and axial directions. Each equation is solved with a Chebyshev-collocation method coupled with a full diagonalization technique.

We have adapted the direct numerical simulation code, previously written in Boussinesq approximation, to take into account the polytropic connection between the state variable quantities. As application, we used this new proposition to numerically solve a heated gas flow in an annular rotor-stator cavity. The adaptation of this code represents a completely new step in the study of the heated gas flows. The objective is a better comprehension of the complex phenomena occurring by heating the gas flows with variable density effect.

We use the volume variation parameter noted $\Theta (= -\ln(\rho/\rho_0))$ in order to completely take into account the couplings between dynamical and thermal fields. Index 0 indicates the value of reference. We propose to represent all thermodynamic transformations by a succession of elementary polytropic transformations whose exponent is adjusted (thus variable), so that the sum well represents the real transformation. The fluid physical properties are postulated invariable, velocity, temperature and pressure fields are described like a deviation of the reference state at rest. Deviatory fields state variables are supposed in polytropic evolution of ratio χ compared to the reference state, for each elementary transformation: $P/\rho^\chi = P_0/\rho_0^\chi$ where χ is variable in time and space and must be calculated in each point. The approximation consists in supposing that the variations are such as the effect is negligible in space-time derivations terms of the balance equations. The restriction χ slightly variable is used to perform the calculation.

The numerical feasibility of the method is firstly tested on cases with constant polytropic exponent. These first tests show that it is possible to proceed by a simple adaptation of the existing code.

Calculations were then continued in the case of variable χ , in polytropic approximation, which must be checked at every moment and in each point of the cavity. In order to improve the method used to satisfy a resolution of the equations written in polytropic approximation, the code is written in a new form enabled to calculate a field of χ in any point of space–time space: The code determines in each point the velocity field, the parameter Θ and the polytropic exponent χ .

We conclude that polytropic approximation allows us to completely take into account the coupling between the fields speed and temperature, without making restrictive assumptions on the effects of compressibility. The calculation of the χ field and the values of the volume variation parameter, Θ , made possible to restore the temperature, pressure and density fields. Pressure, that is difficult to apprehend, does not appear explicitly any more and we do not need additional equation to calculate it. The comparison with calculations using the Boussinesq approximation is proposed as a first validation of the approach presented here. We can consider that conceptually our results are more physically reliable than those using the Boussinesq approximation since those involve in our formulation $\chi = \text{constant} = 0$. Consequently, we consider that the analysis of heated gas flows should be clearly improved using this new approach, that is well adapted for gases. Polytropic approximation opens new prospects in particular using a polytropic modelling, that correspond to a simple variable change, without any restrictive conditions.

1. Introduction

Nous donnons dans cette Note les résultats issus de la résolution numérique du système d'équations écrit dans le cas d'une approximation polytropic de rapport χ . Dans cette approximation, il y a une prise en compte totale des

couplages entre les champs dynamique et thermique, aussi bien que des effets de compressibilité. Nous utilisons un code de simulation numérique directe existant en approximation de Boussinesq : *code 3d Chebyshev pour une configuration de cavité annulaire de type rotor-stator*, dont nous avons apporté des modifications pour l'adopter à notre choix d'une liaison polytropique entre les grandeurs d'états. L'adaptation de ce code de calcul représente une démarche tout à fait nouvelle dans l'étude des écoulements des gaz chauffés. Cette démarche ayant pour objectif une meilleure compréhension des phénomènes complexes se produisant dans les écoulements des gaz à densité variable par effet thermique.

2. Méthode numérique

Nous utilisons le paramètre de variation volumique [1] noté $\Theta (= -\ln(\rho/\rho_0))$ afin de prendre totalement en compte les couplages entre les champs cinématique et thermique, l'indice 0 étant la valeur de référence. L'approximation polytropique a été exposée par Rey et al. [2,3], elle s'écrit ici : $P/\rho^\chi = P_0/\rho_0^\chi$ où χ est variable dans le temps et dans l'espace et doit être calculé en chaque point, l'approximation consiste à négliger les effets dus aux gradients de χ . Utilisant le paramètre Θ , la pression et la température s'écrivent : $\ln(P/P_0) = \chi\Theta$ et $\ln(T/T_0) = (1 - \chi)\Theta$. Le système d'équations est alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{\partial}{\partial t} \Theta + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \Theta \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{U} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{U} - \frac{1}{\text{Fr}} \vec{k} + \chi \text{Eu. exp}[(1 - \chi)\Theta] \vec{\nabla} \Theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Theta + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \Theta = \frac{\gamma}{\text{Pe}} \frac{(1 - \chi)}{(\gamma - \chi)} [\nabla^2 \Theta + (1 - \chi)(\vec{\nabla} \Theta)^2] \quad (3)$$

Ce système d'équations est résolu directement par une méthode spectrale basée sur une approximation spatiale de Chebyshev dans les directions non-périodiques et une approximation de Fourier dans la direction azimutale :

$$\psi_{NKM}(r, \theta, z) = \sum_{k=-K/2}^{K/2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{\psi}_{nkm} T_n(r) T_m(z) e^{ik\theta}$$

T_k et T_m sont les polynômes de Chebyshev, avec $\psi_{NKM}(r, \theta, z) = \Theta, u, v, w$. La discrétisation temporelle utilise un schéma semi-implicite d'Adams–Bashforth/Euler retardé au second ordre. C'est un schéma d'ordre 2 mettant en jeu une approximation implicite des termes diffusifs et explicite des termes convectifs non linéaires. Nous aboutissons à des équations de Helmholtz résolues utilisant une méthode de diagonalisation matricielle complète pour des configurations tridimensionnelles [4].

Le calcul d'un champ de χ en tout point de la cavité (cf. Fig. 1) et à chaque instant est fait en prenant une valeur initiale χ_0 , cette valeur permet de résoudre le système (1), (2). Le premier champ de solution $U^{(1)}, \Theta^{(1)}$ est ensuite utilisé dans l'Éq. (3) pour obtenir une première valeur corrigée de l'exposant polytropique $\chi^{(1)}$. A convergence on obtient les valeurs postulées correctes : U, Θ et χ [5]. Ainsi, le code détermine en chaque point le champ des vitesses, le paramètre Θ et l'exposant polytropique χ qui permettent de restituer les champs de température, pression et masse volumique. La pression difficile à calculer n'est plus une variable du problème ce qui représente un des avantages de cette approximation [2,6].

On définit le rapport de forme $L = \Delta R/2h_0$ et le paramètre de courbure $Rm = (R_1 + R_0)/\Delta R$, $\Delta R = R_1 - R_0$. Nous considérons les paramètres géométriques suivants : $L = 2$ et $Rm = 5$.

Les paramètres de l'écoulement sont : les nombres de Reynolds, $\text{Re} = 10^3$, de Froude, $\text{Fr} = 1$, de Prandtl, $\text{Pr} = 0,71$, d'Euler, $\text{Eu} = rT/U_0^2 = 10^5$, le rapport des chaleurs massiques, $\gamma = 1,4$. Dimension de Grille $(N \times M) = (65 \times 65)$ (suivant r, z).

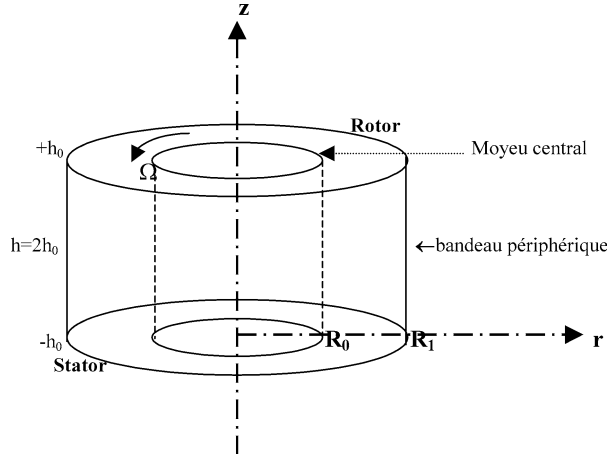


Fig. 1. Configuration géométrique de la cavité rotor-stator annulaire.

Fig. 1. Geometrical configuration of the annular rotor-stator cavity.

3. Résultats de l'approximation polytropique

– Conditions aux limites :

(1) Sur le paramètre de variation volumique :

$$z = -h_0, r \in [R_0; R_1], \quad \Theta = \Theta_B = \frac{1}{1-\chi} \ln \left(1 + \frac{\Delta T_{\max}}{T_0} \right), \quad T_0 = 300 \text{ K}$$

$$z = +h_0, r \in [R_0; R_1], \quad \Theta = \Theta_H = 0$$

$$r = R_0, z \in [-h_0; +h_0], \quad \Theta = \Theta_S = \frac{1}{1-\chi} \ln \left(1 + \frac{\Delta T(z^*)}{T_0} \right)$$

$$\text{avec } \frac{\Delta T}{T_0}(z^*) = \frac{\Delta T_{\max}}{2T_0}(1 - z^*), \quad z^* = z/h_0$$

$$r = R_1, z \in [-h_0; +h_0], \quad \Theta = \Theta_E = \Theta_S$$

(2) Sur les trois composantes de vitesse

$$z = -h_0, r \in [R_0; R_1], \quad u_B = 0, \quad v_B = 0, \quad w_B = 0$$

$$z = +h_0, r \in [R_0; R_1], \quad u_H = 0, \quad v_H = (Rm + r^*)/(Rm + 1), \quad r^* \in [-1; 1], \quad w_H = 0$$

$$r = R_0, z \in [-h_0; +h_0], \quad u_S = 0, \quad v_S = e^{((z/h_0)-1)/0,06}, \quad w_S = 0$$

$$r = R_1, z \in [-h_0; +h_0], \quad u_E = 0, \quad v_E = ((Rm - 1)/(Rm + 1)) e^{((z/h_0)-1)/0,06}, \quad w_E = 0$$

– Conditions initiales :

$$u^0 = u^1 = 0, \quad v^0 = v^1 = 0, \quad w^0 = w^1 = 0$$

$$\Theta^0 = \Theta^1 = \frac{1}{1-\chi} \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}(z^*) \right) \quad \text{avec } \frac{\Delta T}{T_0}(z^*) = \left(\frac{T_{\max} - T_0}{T_0} \right) \left(-\frac{z^*}{2} + 0,5 \right), \quad T_0 = 300 \text{ K}$$

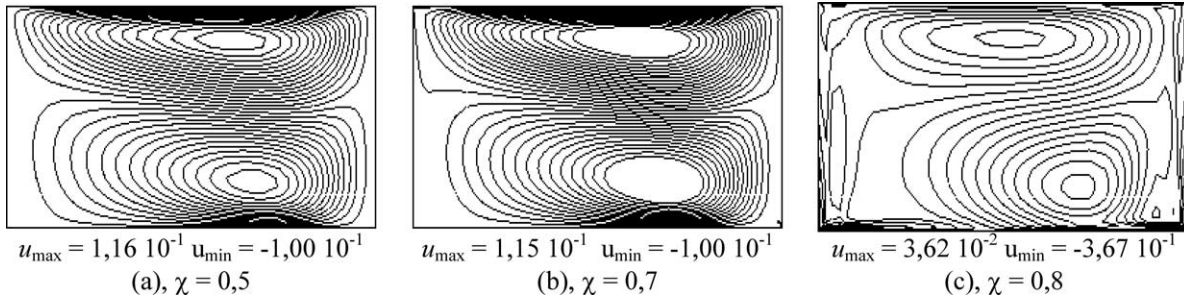


Fig. 2. Iso-valeurs des vitesses radiales u pour différentes valeurs de l'exposant polytropique χ constant.

Fig. 2. Iso-values of the radial component of the velocity u for different values of a constant polytropical exponent χ .

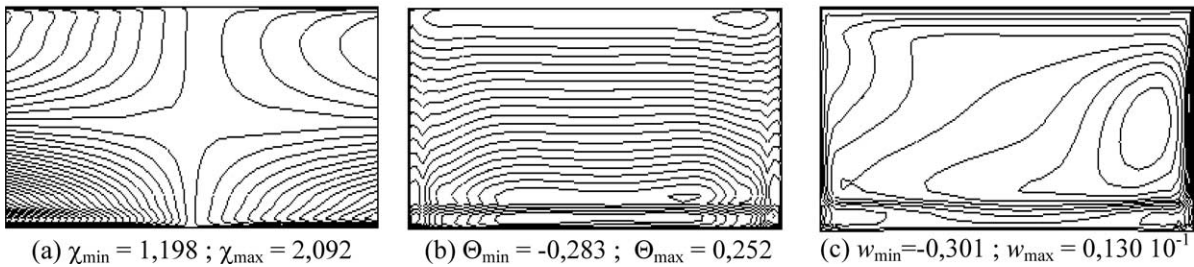


Fig. 3. Iso-valeurs de l'exposant polytropique χ calculé en approximation polytropique.

Fig. 3. Iso-values of the polytropical exponent χ calculated using the polytropical approximation.

3.1. Tests préliminaires

Afin de procéder par étape et de ne pas superposer les difficultés, la faisabilité numérique de la méthode est en premier temps testée sur des cas à exposant polytropique constant. Nous avons pu résoudre l'écoulement pour plusieurs valeurs de cet exposant (Fig. 2), pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et pour des écarts de températures maxima entre le rotor et le stator de la cavité annulaire. Ces premiers tests montrent qu'il est possible de procéder par une simple adaptation du code existant aux nouvelles équations.

Les équations sont résolues successivement pour chaque plan (r, z) , $0 \leq \theta < 2\pi$. Nous calculons le champ de vitesse, le paramètre de variation volumique Θ , et nous déduisons les champs de température et de pression.

Les iso-vitesses (Fig. 2) donnent les configurations de l'écoulement, qui sont modifiées selon la valeur prise de χ . Ces résultats prouvent qu'il faut tenir compte de la variabilité de cet exposant pour appréhender d'une façon plus exacte le couplage entre la dynamique et la thermique au sein de l'écoulement et pour interpréter d'une façon plus précise les effets de la compressibilité. Pour ces raisons les calculs ont été poursuivis dans le cas χ variable, en approximation polytropique qui doit être vérifiée à chaque instant et en chaque point de la cavité. Nous essayons, par extension de ces premiers tests sur le cas χ variable, de nous rapprocher d'une réelle prise en compte de la phénoménologie des écoulements des gaz chauffés.

3.2. Tests à χ « variable » en approximation polytropique

L'amélioration de la méthode utilisée pour satisfaire une résolution des équations écrites en approximation polytropique est faite utilisant la méthode proposée par Rey [5] dont nous avons rappelé les grandes lignes dans le paragraphe 2. Le code de calcul sous cette nouvelle forme nous a permis d'avoir un champ de χ en tout point de l'espace spatio-temporel (Fig. 3). La valeur initiale de l'exposant polytropique est $\chi_0 = 0,1$ les autres paramètres

physiques et géométriques sont les mêmes que dans le cas $\chi = \text{cste} = 0,1$ avec $\Delta T_{\text{max}} = 30^\circ\text{C}$. Nous présentons ici (Fig. 3) le champ de vitesse le paramètre de variation volumique Θ et l'exposant polytropique χ les autres variables densité, pression et température seront déduites directement de Θ et χ . Nous constatons que χ présente des gradients notables au niveau des parois verticales et radiales, alors que nous avons négligé sa variabilité dans les dérivations spatio-temporelle, cette hypothèse est alors contestable au niveau des parois. La situation la plus complète serait alors celle qui considère χ totalement variable, ce qui nous envisagerons ultérieurement.

3.3. Comparaison avec le calcul utilisant les approximations de Boussinesq

Nous effectuons ici une comparaison entre les calculs utilisant les approximations de Boussinesq [7] et ceux issus de notre formulation polytropique pour deux cas, compressible et incompressible [3]. Le nombre de Reynolds est fixé à $Re = 1000$ et l'écart de la température maximale est fixé à $\Delta T_{\text{max}} = 30^\circ\text{C}$. Les paramètres géométriques de la cavité annulaire et les nombres caractéristiques de l'écoulement sont identiques pour les trois types de calcul : Boussinesq, Polytropique incompressible et Polytropique compressible.

Dans les trois cas d'écoulement, la composante azimutale, qui débute avec des valeurs faibles (Fig. 4(b)) s'intensifie en s'approchant du disque tournant, le fluide serait entraîné par la rotation du rotor. La valeur maximale de cette composante est égale à l'unité et atteinte près du rotor. L'effet de la rotation est de réduire la vitesse radiale (Fig. 4(a)), et par la suite, la circulation dans l'ensemble de la cavité [8].

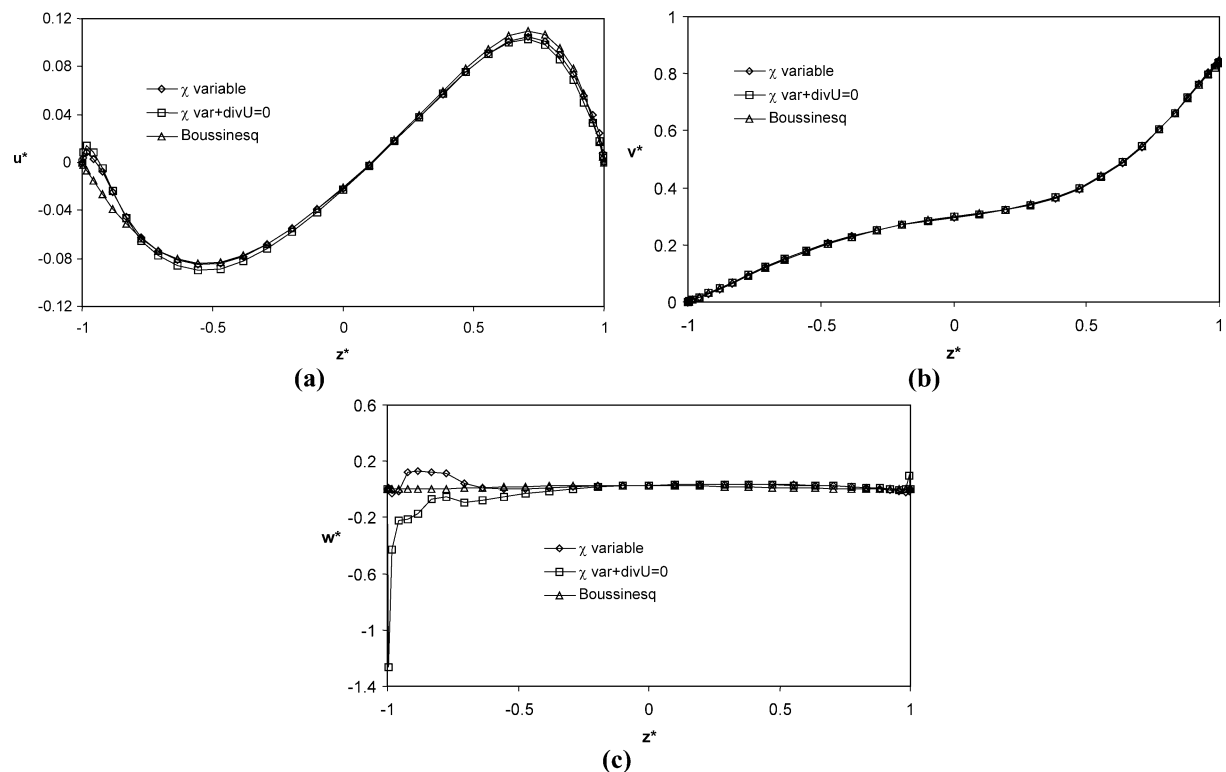


Fig. 4. Profils axiaux des vitesses, (a) radiales, (b) azimutales, (c) axiales au centre de la cavité. Comparaison des calculs utilisant les approximations de Boussinesq, polytropique incompressible, polytropique compressible.

Fig. 4. Axial profiles of (a) radial, (b) azimuthal, (c) axial component of the velocity at the center of the cavity. Comparison between calculations using Boussinesq approximation, and polytropical incompressible or compressible ones.

Nous observons que les profils axiaux des vitesses (Figs. 4 (a), (b), (c)) présentent tous des comportements semblables à proximité de la paroi supérieure isotherme froide. Ces comportements diffèrent près de la paroi chauffée (au niveau du stator $z^* = -1$). Certains profils révèlent que les calculs « polytropique compressible » et « polytropique incompressible » (à divergence de vitesse nulle) sont très proches (Fig. 4(a)) et d'autres indiquent un comportement voisin pour les calculs « Boussinesq » et « polytropique compressible » (Fig. 4(c)). Nous signalons que les calculs « polytropiques » sont le plus sensibles aux effets de la paroi et plus précisément au niveau de la paroi chauffée. Cela permet de conclure que l'approximation polytropique donne une description des effets thermiques qui n'apparaît pas en approximation de Boussinesq, dont celle des effets de compressibilité en écoulement de gaz chauffés. L'approximation polytropique ouvre de nouvelles perspectives pour l'étude des écoulements de gaz chauffés, la seule restriction ici est l'hypothèse de la faible variabilité de l'exposant polytropique χ en tout point de l'espace spatio-temporel.

4. Conclusion

L'approximation polytropique permet une prise en compte totale du couplage entre les champs de vitesse et de température, sans faire d'hypothèses restrictives sur les effets de compressibilité. Le calcul du champ de χ et des valeurs du paramètre de variation volumique Θ a permis de restituer les champs de température, de pression et de densité. La pression difficile à appréhender, n'apparaît plus de façon explicite et nous n'utilisons pas d'équation supplémentaire pour la calculer. La comparaison avec les calculs utilisant les approximations de Boussinesq est proposée comme première validation de l'approche présentée ici. Nous pouvons considérer que conceptuellement nos résultats sont plus fiables que ceux utilisant les approximations de Boussinesq puisque celles-ci entraînent dans notre formulation $\chi = 0$. Par conséquent, nous considérons que l'analyse des écoulements de gaz chauffés devrait en être nettement améliorée.

L'approximation polytropique ouvre de nouvelles perspectives notamment en introduisant plus complètement la variation spatio-temporelle de l'exposant χ . Dans ce cas une optimisation du code de calcul sera nécessaire ce qui peut conduire à écrire une méthode numérique spécifique.

Références

- [1] C. Rey, Analyse des effets de variation de volume des gaz dans les équations générales de bilan, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (23) (2000) 4311–4326.
- [2] C. Rey, S. Benjeddou, Une alternative aux hypothèses de Boussinesq des gaz chauds : L'approximation polytropique, *C. R. Acad. Sci.* (2003), à paraître.
- [3] C. Rey, S. Benjeddou, Application de l'approximation polytropique à la turbulence statistique en moyenne de Favre, *C. R. Acad. Sci.* (2003), à paraître.
- [4] E. Serre, J.P. Pulicani, Three-dimensional pseudo-spectral method for convection in rotating cylinder, *Computers & Fluids* 30 (4) (2001) 491–519.
- [5] C. Rey, Modèle polytropique pour la simulation numérique des écoulements de fluides supercritiques, in: 16^{ème} Congrès Français de Mécanique, Nice, 1–5 sept., 2003.
- [6] S. Benjeddou, Simulation numérique directe des gaz fortement chauffés et approximation polytropique, Thèse de Doctorat, LMSNM, Université d'Aix-Marseille II, Marseille, 12/09/2003.
- [7] E. Serre, Instabilités de couche limite dans des écoulements confinés en rotation-Simulation numérique directe par une méthode spectrale de comportement complexe, Thèse de Doctorat de l'Université d'Aix-Marseille II, janvier 2000.
- [8] I. Raspo, S. Hugues, E. Serre, A. Randriamampianina, P. Bontoux, Spectral projection methods for the simulation of complex three-dimensional rotating flows, *Int. J. Computers and Fluids* 31 (4–7) (2002) 745–767.