Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 332 (2004) 67–72

COMPTES RENDUS
MECANIQUE

# Sur le flambage plastique de l'éprouvette cruciforme

Alain Cimetière [a], Alain Léger [b,*], Michel Potier-Ferry [c]

[a] *Laboratoire de modélisation mécanique et de mathématiques appliquées, SP2MI, bd. 3, téléport 2, BP 179, 86960 Futuroscope cedex, France*
[b] *CNRS, laboratoire de mécanique et d'acoustique, 31, ch. Joseph Aiguier, 13402 Marseille cedex 20, France*
[c] *Laboratoire de physique et mécanique des matériaux, Ile du Saulcy, 57045 Metz, France*

Reçu le 3 septembre 2003 ; accepté le 14 octobre 2003

Présenté par Huy Duong Bui

**Résumé**

On construit un potentiel de vitesses grace à l'introduction d'une série d'hypothèses de comportement, dont on commente l'interprétation physique. Introduit dans les équations quasi-statiques, ce potentiel permet de rediscuter le problème générique du flambage plastique de l'éprouvette cruciforme. On obtient sur l'axe du paramètre de charge un intervalle dont tous les points sont des points de bifurcation. Ce résultat est qualitativement intéressant d'un point de vue d'analyse spectrale. En effet, il était jusqu'à présent admis que l'existence d'un tel continuum est la conséquence de la présence de discontinuités de modules dans le comportement, alors qu'ici tout est très régulier. ***Pour citer cet article : A. Cimetière et al., C. R. Mecanique 332 (2004).***


**Abstract**

**About the plastic buckling of the cruciform column.** We build a rate potential through the introduction of several behavior assumptions, of which we discuss the physical meaning. Inserted into the quasi-static equations, this potential allows us to revisit the generic problem of the plastic buckling of the cruciform column. We get an interval on the parameter axis of which any point is a bifurcation point. This result is qualitatively interesting from the point of view of spectral analysis, as the existence of such a continuum was up to now related to discontinuities in the constitutive law, while everything is very smooth in the present case. ***To cite this article: A. Cimetière et al., C. R. Mecanique 332 (2004).***


*Mots-clés :* Milieux continus ; J2 corner theory ; Bifurcations plastiques ; Éprouvette cruciforme

*Keywords:* Continuum mechanics; J2 corner theory; Plastic bifurcations; Cruciform column

## Abridged English version

It is well known that the so-called deformation theory of plasticity leads to results in better agreement with experiments than the classical incremental theory, at least in some generic bifurcation problems such as the buckling

* Corresponding author.
*Adresses e-mail :* alain.cimetiere@l3ma.univ-poitiers.fr (A. Cimetière), leger@lma.cnrs-mrs.fr (A. Léger), potier-ferry@lpmm.univ-metz.fr (M. Potier-Ferry).

1631-0721/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crme.2003.10.006

of a cruciform column and the striction in a plane tension test [1]. However, it is also known that, in spite of these results, one cannot conclude at the definite choice of the deformation theory as in particular the latter is no longer compatible with a post-buckling analysis (e.g., [2,3]). This difficulty began to be overcome in the seventies using an incremental constitutive law based on polycristalline considerations and taking into account the occurence of vertexes on the yield surface and a progressive transition from full plastic loading to elastic unloading [6,4]. The present work comes back to such a model, adding several constitutive assumptions which give in particular a more explicit form of the transition between full plastic loading and elastic unloading and which allow a correct bifurcation analysis. The study of the cruciform column within small strains leads to a two degrees of freedom problem. Let $u$ and $\theta$ be the axial displacement and the rotation of the loaded end of the column, and let a dot stand for a derivative with respect to the external compressive load $\lambda$. We are then building an energy type functional $W(\dot{u}, \dot{\theta})$ having the following properties:

- H1: $W(\dot{u}, \dot{\theta})$ is strictly convex with respect to $(\dot{u}, \dot{\theta})$, $\forall \lambda \geqslant 0$.
- H2: $W(\dot{u}, \dot{\theta})$ is homogeneous of degree 2 with respect to $(\dot{u}, \dot{\theta})$.
- H3: $W(\dot{u}, \dot{\theta})$ is of the class $C^1$ in $\mathbb{R}^2$, and $C^3$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- H4: $W(\cos(t), \sin(t))$ is a strictly increasing function on $[\tilde{t}, \pi]$, with $\tilde{t} < \frac{\pi}{2}$.
- H5: For any given $\dot{V}$ in $\mathbb{R}^2$, the map $g$, homogeneous of degree zero, defined by $(\dot{u}, \dot{\theta}) \mapsto g(\dot{u}, \dot{\theta}) = \dot{V}^{\mathrm{T}}[D^2 W(\dot{u}, \dot{\theta})]\dot{V}$ is nondecreasing on the unit circle $\Theta \equiv \{(\dot{u}, \dot{\theta}) \mid \dot{u}^2 + \dot{\theta}^2 = 1\}$, when the state $(\dot{u}, \dot{\theta})$ moves from $(1, 0)$ to $(-1, 0)$.
- H6: $g(1, 0) < g(0, 1)$ for $\dot{V} = (0, 1)$.
- H7: $W,_{\dot{u}\dot{\theta}}(\dot{u}, \dot{\theta}) < 0$ for $\dot{\theta} > 0$ and $\forall \dot{u}$.

Let us define two real numbers $\lambda_T$ and $\lambda_R$ as in formula (4). Then the main result is the following incipient buckling property:

**Theorem 0.1.** $\forall \lambda \in ]\lambda_T, \lambda_R[$, *there exists a solution* $(\dot{u}, \dot{\theta})$ *of the quasi-static problem, with* $\dot{\theta} \neq 0$.

## 1. Introduction

Plusieurs observations maintenant classiques sont à l'origine de l'introduction de lois de comportement élastoplastiques dites complexes : les théories dites de déformation conduisent à des résultats en bien meilleur accord avec l'expérience que les théories incrémentales, en particulier dans le cas des deux problèmes génériques que sont le flambage de l'éprouvette cruciforme en compression et la striction d'une plaque mince en traction [1]. Mais, alors que dans le cas du flambage en compression des imperfections extrêmement faibles abaissent la charge critique donnée par la théorie incrémentale jusqu'à la rapprocher suffisamment de la valeur expérimentale pour sembler maintenir la cohérence de la théorie, rien de tel n'est observé dans le cas de la striction. D'autre part, il est maintenant bien établi que la théorie de déformation est incompatible avec la compréhension du post-flambage (e.g., [2,3]). Les lois de comportement introduites pour pallier ces contradictions sont largement phénoménologiques, et étayées par des modélisations polycristallines [4].

Le présent travail reprend le modèle de comportement présenté dans [5] qui comprend la formation de coins sur la surface seuil et la transition progressive entre charge plastique totale et décharge élastique. Les hypothèses introduites ici explicitent les caractéristiques de cette transition et permettent d'obtenir correctement un résultat de bifurcation, ce qui complète et affine un résultat antérieur [6].

## 2. Hypothèses sur le comportement

On introduit un modèle de comportement de type élastoplastique complexe en caractérisant son potentiel par une série d'hypothèses. Afin d'en permettre un exposé simple et concis, on choisit d'en spécifier la présentation au cas particulier de l'éprouvette cruciforme. Il s'agit d'une poutre rectiligne à section droite cruciforme, constituée de quatre plaques longues soudées entre elles à angle droit sur un de leurs bords, la ligne de soudure étant la fibre moyenne de la poutre. On étudie l'ensemble des solutions en compression/torsion, ce qui, avec les symétries de la structure, signifie que le problème se réduit à celui d'une seule plaque rectangulaire, en appuis sur deux de ses bords, libre sur le deuxième bord long, et chargée en compression parallèlement à l'axe de la poutre sur le quatrième côté. La géométrie de la section droite est supposée ne pas se modifier au cours de la déformation. $u$ et $\theta$ désignent alors respectivement le déplacement longitudinal et la rotation autour de l'axe $Ox_1$ de l'extrémité chargée de la poutre, et le champ de déplacement s'exprime $U(x_1,x_2)=(-x_1u,0,-x_1x_2\theta)$. Les composantes non nulles du tenseur de déformation non linéarisé sont donc, à des termes d'ordre supérieur près :

$$\gamma_{11}=-u+x_2^2\theta^2,\qquad \gamma_{12}=x_3\theta+\frac{x_1x_2}{2}\theta^2 \tag{1}$$

Comme il est classique dans les problèmes d'évolution quasi-statique, on introduit la notation $(\dot{\ })$ pour désigner une dérivée par rapport à un paramètre lié à l'évolution du chargement. On considère la classe de solides pour lesquels la loi de comportement s'exprime sous la forme [7]

$$\dot\gamma=\frac{\partial w}{\partial\dot\sigma} \tag{2}$$

et l'on cherche des réponses en vitesses $(\dot u,\dot\theta)$ à une évolution $\dot\lambda$ du paramètre de charge $\lambda$ qui rendent stationnaire la fonctionnelle :

$$J(\lambda,\dot\lambda,\dot u,\dot\theta)=W(\dot u,\dot\theta)-\frac{\lambda}{2}\dot\theta^2-\dot\lambda a\dot u,\quad W(\dot u,\dot\theta)=\int_\omega w^*\bigl[\dot\gamma(\dot u,\dot\theta)\bigr]\,\mathrm{d}\Omega \tag{3}$$

$w^*$ désigne ici la transformée de Fenchel de $w$, $\lambda$ est relié à la résultante $F$ de la compression extérieure et à l'aire $S$ de la section droite, $a$ est un paramètre géométrique. Ce qui suit présente les propriétés de $W(\dot u,\dot\theta)$. On note, d'une part que les propriétés de $w^*[\dot\gamma(\dot u,\dot\theta)]\equiv\widetilde{w}(\dot u,\dot\theta)$ se transposent à celles de $W(\dot u,\dot\theta)$ par intégration, et l'on va les présenter sur $W$. Pour écrire la fonctionnelle $J(\lambda,\dot\lambda,\dot u,\dot\theta)$ on a d'autre part supposé que $W$ ne dépend pas de l'état actuel, c'est-à-dire $W(\sigma_{11},\sigma_{12},u,\theta,\dot u,\dot\theta)\equiv W(\dot u,\dot\theta)$ sur l'état fondamental, ce qui revient, en plasticité usuelle, à supposer que les modules tangents sont constants. Cela n'est justifié que pour l'étude du flambage naissant, c'est-à-dire pour la recherche de solutions non triviales du problème en vitesses à partir de l'état $(\sigma_{11}=-\frac{F}{S},\sigma_{12}=0)$. On note d'autre part que, dans le cas particulier traité ici, $W$ satisfait $W(\dot u,\dot\theta)=W(\dot u,-\dot\theta)$ pour des raisons de symétrie évidentes.

**Hypothèses.**

- *H1 :* $W(\dot u,\dot\theta)$ *est strictement convexe par rapport à* $(\dot u,\dot\theta)$, $\forall\lambda\geqslant 0$.
- *H2 :* $W(\dot u,\dot\theta)$ *est homogène de degré 2 par rapport à* $(\dot u,\dot\theta)$.
- *H3 :* $W(\dot u,\dot\theta)$ *est de classe* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$, *et de classe* $C^3$ *sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.
- *H4 :* $W(\cos(t),\sin(t))$ *est strictement croissante sur* $[\tilde t,\pi]$ *avec* $\tilde t<\frac{\pi}{2}$.
- *H5 : Pour chaque* $\dot V$ *donné dans* $\mathbb{R}^2$, *l'application* $g$, *homogène de degré zéro, définie par* $(\dot u,\dot\theta)\mapsto g(\dot u,\dot\theta)=\dot V^{\mathrm T}[D^2W(\dot u,\dot\theta)]\dot V$ *est non décroissante sur le cercle unité* $\Theta\equiv\{(\dot u,\dot\theta)\mid \dot u^2+\dot\theta^2=1\}$, *lorsque l'état* $(\dot u,\dot\theta)$ *évolue de* $(1,0)$ *à* $(-1,0)$.
- *H6 :* $g(1,0)<g(0,1)$ *pour* $\dot V=(0,1)$.
- *H7 :* $W,_{\dot u\dot\theta}(\dot u,\dot\theta)<0$ *pour* $\dot\theta>0$.

**Commentaires.**

- Aucune de ces différentes hypothèses n'est la conséquence des autres, et elles ne sont pas incompatibles comme le montre l'exemple suivant :

$W(\dot{u},\dot{\theta}) = (2 - \dot{u}/\sqrt{\dot{u}^2+\dot{\theta}^2})(\dot{u}^2+\dot{\theta}^2)$.

- Les hypothèses H1, H2 sont classiques, et sont présentes dans les travaux de Hill (e.g., [7]). En particulier H1 garantit l'existence et l'unicité d'une vitesse fondamentale $(\dot{u}_F, 0)$.
- L'hypothèse H3 signifie que $W$ appartient à une classe plus vaste que celle des formes quadratiques.
- Les hypothèses H2 et H4 impliquent que dans toute section parallèle à l'axe $\dot{u}$, le minimum est réalisé en un point $(\dot{u},\dot{\theta})$ avec $\dot{u} > 0$.
- L'hypothèse H5 traduit l'idée que $W$ est « de plus en plus strictement convexe », c'est-à-dire que les raideurs tangentes augmentent, à mesure que l'on s'éloigne de la direction $(1,0)$ correspondant à la charge totale. C'est l'hypothèse clé de ce modèle.
- L'hypothèse H6 traduit l'idée que, sur ce qui serait l'interface plastique/élastique en théorie de Prandl–Reuss, le matériau est strictement plus raide que dans la direction de charge totale.
- L'hypothèse H7 décrit la forme globale du potentiel : le potentiel s'aplatit (ou « s'évase ») de plus en plus à mesure que l'on avance dans la direction de charge totale $(1,0)$.

## 3. Résultat de bifurcation

On introduit les deux quantités réelles $\lambda_T$ et $\lambda_R$ définies comme suit :

$$\lambda_T = W,_{\dot{\theta}\dot{\theta}}(1,0), \qquad \lambda_R = 2\inf_{\dot{u}} W(\dot{u},1) \tag{4}$$

Utilisant les hypothèses H2, H4 et H5, on vérifie que $\lambda_T < \lambda_R$. Des hypothèses H1, H2 et H5, on déduit alors facilement :

**Proposition 3.1.** *La fonctionnelle $J(\lambda,\dot{\lambda},\dot{u},\dot{\theta})$ est strictement convexe pour $\lambda < \lambda_T$, $\forall\dot{\lambda}$.*

On introduit la fonctionnelle

$$P_\lambda(\dot{u},\dot{\theta}) = J(\lambda,\dot{\lambda},\dot{u},\dot{\theta}) - J(\lambda,\dot{\lambda},\dot{u}_F,0) \tag{5}$$

et l'on montre

**Lemme 3.2.** (i) *$P_\lambda(\dot{u},\dot{\theta})$ prend des valeurs strictement négatives pour tout $\lambda > \lambda_T$ et $\dot{\lambda} > 0$*
(ii) $\forall\lambda \in ]\lambda_T,\lambda_R[$, *$P_\lambda(\dot{u},\dot{\theta})$ admet un minimum strictement négatif.*

Le résultat central, de bifurcation plastique sous charge croissante, est alors le suivant :

**Théorème 3.3.** $\forall\lambda \in ]\lambda_T,\lambda_R[$, *il existe une solution $(\dot{u},\dot{\theta})$, avec $\dot{\theta} \neq 0$.*

**Démonstration.** Disposant du Lemme 3.2, le Théorème 3.3 résulte simplement du fait que, par construction, $P_\lambda(\dot{u},0) \geqslant 0$, $\forall\dot{u}$, $\lambda$, $\dot{\lambda}$, l'égalité à zéro ayant lieu seulement pour $\dot{u} = \dot{u}_F$. On expose maintenant les grandes lignes de la démonstration du Lemme 3.2. On remarque tout d'abord que $P_\lambda(\dot{u},\dot{\theta})$ se réécrit sous la forme

$$P_\lambda(\dot{u},\dot{\theta}) = \left[W(\dot{u},\dot{\theta}) - W(\dot{u}_F,0) - \frac{\lambda_T}{2}\dot{\theta}^2\right] - \frac{\lambda-\lambda_T}{2}\dot{\theta}^2 \tag{6}$$

où l'on injecte un développement de Taylor de $W$ autour du point $(1,0)$ après adimensionalisation par $\dot{u}_F = 1$. H3 implique alors $W,_{\dot{\theta}\dot{\theta}}(1, \dot{\theta}/\dot{u}_F) = W,_{\dot{\theta}\dot{\theta}}(1,0) + \delta(\dot{\theta})$, où $\delta(\dot{\theta})$ est une fonction petite devant $\dot{\theta}$. On obtient en conséquence

$$P_\lambda(\dot{u}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\big(\delta(\dot{\theta}) - (\lambda - \lambda_T)\big) \tag{7}$$

Pour tout $\lambda > \lambda_T$, on peut donc trouver un $\dot{\theta}$ pour lequel $\delta(\dot{\theta})$ est assez petit et donc pour lequel $P_\lambda(\dot{u}, \dot{\theta})$ est négatif, ce qui établit le point (i).

Pour établir le point (ii), on introduit tout d'abord la fonction $h(\dot{\theta})$ suivante

$$h(\dot{\theta}) = \inf_{\dot{u}}\big[W(\dot{u}, \dot{\theta}) - \dot{\lambda} a \dot{u}\big] \tag{8}$$

et l'on observe que $P_\lambda(\dot{u}, \dot{\theta}) \geqslant h(\dot{\theta}) - \frac{\lambda}{2}\dot{\theta}^2$. H1 permet tout d'abord de montrer

$$h(\dot{\theta}) > \inf_{\dot{u}}\big[W(\dot{u}, 0) - \dot{\lambda} a \dot{u}\big] > -\infty \tag{9}$$

et l'on a d'autre part

**Lemme 3.4.** *$h(\dot{\theta})$ a un comportement quadratique à l'infini sous la forme*

$$\lim_{\dot{\theta}\to\pm\infty} \frac{h(\dot{\theta})}{\dot{\theta}^2} = \inf_{\dot{u}} W(\dot{u}, 1) \tag{10}$$

Soit en effet, par H1, $\dot{v}_0$ l'élément qui réalise le minimum de l'application $\dot{u} \to W(\dot{u}, 1)$, et $\dot{v}_1$ celui qui réalise le minimum de l'application $\dot{u} \to W(\dot{u}, 1) - (\dot{\lambda}/\dot{\theta}) a \dot{u}$. On peut alors écrire

$$\big(W,_{\dot{u}}(\dot{v}_1, 1) - W,_{\dot{u}}(\dot{v}_0, 1)\big)(\dot{v}_1 - \dot{v}_0) = \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\theta}} a (\dot{v}_1 - \dot{v}_0) \tag{11}$$

et il existe donc dans $]\dot{v}_1, \dot{v}_0[$ (ou $]\dot{v}_0, \dot{v}_1[$) un élément $\dot{v}$ tel que

$$W,_{\dot{u}\dot{u}}(\dot{v}, 1)(\dot{v}_1 - \dot{v}_0)^2 = \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\theta}} a |\dot{v}_1 - \dot{v}_0| \tag{12}$$

Par H2 et H5, on montre facilement que $W,_{\dot{u}\dot{u}}(\dot{v}, 1) \geqslant W,_{\dot{u}\dot{u}}(1, 0)$, et donc

$$W,_{\dot{u}\dot{u}}(1, 0)(\dot{v}_1 - \dot{v}_0)^2 \leqslant \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\theta}} a |\dot{v}_1 - \dot{v}_0| \tag{13}$$

On a donc $\dot{v}_1 \to \dot{v}_0$ lorsque $\dot{\theta} \to +\infty$, ce qui établit le Lemme 3.4. On en déduit

$$\lim_{\dot{\theta}\to\pm\infty} \left[\frac{h(\dot{\theta})}{\dot{\theta}^2} - \frac{\lambda}{2}\right] = \frac{1}{2}(\lambda_R - \lambda). \tag{14}$$

Pour tout $\lambda \in ]\lambda_T, \lambda_R[$, $P$ est donc minoré pour $\dot{\theta}$ fini, et tend vers l'infini quand $\dot{\theta}$ tend vers l'infini. Par H2, l'ensemble des points où $P$ est négatif est compact, et $P$ atteint donc un minimum strictement négatif.

**Remarque.** Il est tout à fait possible de prouver l'existence de branches de bifurcation, mais il faut alors introduire la dépendance de $W$ par rapport à l'état actuel.

## 4. Conclusion

Le modèle de compression/torsion étudié ici a conduit à un problème à deux degrés de liberté, ce qui rapproche son étude de celle d'un modèle simple de type Shanley–Hutchinson [2]. Pour un problème plus général, on peut toutefois avancer le commentaire suivant. Le continuum de points de bifurcations est une caractéristique bien connue du flambage plastique. Le calcul explicite des charges et branches correspondantes [8,9] avait conduit à admettre que c'est la présence de discontinuités dans le comportement qui explique ce continuum. On observe qu'il n'en est rien. Le potentiel est ici $C^3$ par hypothèse dans la partie concernée de son domaine, et le résultat serait bien évidemment inchangé avec $C^\infty$. On sait en revanche que l'étude du flambage élastique des structures usuelles conduit à un spectre constitué de valeurs propres isolées. Il est donc vraisemblable que ce continuum ne soit lié qu'au caractère irréversible de la loi de comportement, c'est-à-dire physiquement à la dissipation.

## Références

[1] G. Gerard, H. Becker, Handbook of Structural Stability: Part I – Buckling of Flat Plates, 1957.

[2] A. Cimetière, A. Elkoulani, A. Léger, Flambage naissant et post-flambage d'un modèle simple en élastoplasticité, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II 298 (1994) 1263–1269.

[3] J.W. Hutchinson, Plastic buckling, Adv. Appl. Mech. 14 (1974) 67–144.

[4] J.W. Hutchinson, Elastic–plastic behavior of polycristalline metals and composites, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 319 (1970) 247–272.

[5] J. Christoffersen, J.W. Hutchinson, A class of phenomenological corner theories of plasticity, J. Mech. Phys. Solids 27 (1979) 465–487.

[6] A. Cimetière, M. Potier-Ferry, Flambage plastique naissant de la poutre cruciforme avec loi de comportement complexe, in: 11ème Congrès Français de Mécanique, Lille, 1993.

[7] R. Hill, A general theory of uniqueness and stability in elastic–plastic solids, J. Mech. Phys. Solids 6 (1958) 236–249.

[8] A. Cimetière, Flambage naissant des plaques élastoplastiques minces, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II 298 (1984) 157–160.

[9] A. Elkoulani, A. Léger, Comportement post-critique des poutres élastoplastiques: existence et régularité des branches bifurquées, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 324 (1997) 1307–1313.