Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Mecanique 332 (2004) 109–114

COMPTES RENDUS
MECANIQUE

Une alternative aux hypothèses de Boussinesq des gaz chauds : L'approximation polytropique

Claude Rey, Saïd Benjeddou

Laboratoire de modélisation et simulation numérique en mécanique, L3M-FRE 2405 du CNRS, les Universités d'Aix-Marseille, IMT La Jetée, technopôle de Château-Gombert, 38, rue Frédéric Joliot Curie, 13451 Marseille cedex 20, France

Reçu le 1er avril 2003 ; accepté après révision le 10 décembre 2003

Présenté par Michel Combarnous

Résumé

Une nouvelle approximation est proposée pour les équations de bilan des écoulements de gaz chauffés avec une prise en compte totale des couplages dynamiques et thermiques, et de la compressibilité, en utilisant un changement de variable issus de l'écriture sous forme « polytropique » des relations entre les grandeurs d'état. L'exposant polytropique est la nouvelle variable, il caractérise les transferts, il substitue ainsi la température à la pression et à la masse volumique, grandeurs physiques difficiles à appréhender. La méthode ouvre des perspectives intéressantes pour l'étude des gaz chauffés, sur le plan expérimental, de la modélisation et de la simulation numérique. ***Pour citer cet article : C. Rey, S. Benjeddou, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Abstract

An alternative to Boussinesq hypothesis for hot gases, the polytropic approximation. A new approximation is proposed for the balance equations of heated gas flows, taking into account completely the couplings between dynamic and thermal fields, as well as compressibility, stating in a polytropic formulation the relation between the quantities of corresponding state. The polytropic exponent is the new variable that characterises the transfers; it substitutes the temperature for the pressure and the density that are physical quantities difficult to grasp. The method opens interesting prospects for the study of heated gases, for experiments, or for modelling and numerical simulation. ***To cite this article: C. Rey, S. Benjeddou, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Gaz chauffés ; Turbulence ; Convection naturelle ; Convection mixte ; Compressibilité

Keywords: Fluids mechanics; Heated gases; Turbulence; Free convection; Mixed convection; Compressibility

Adresse e-mail : crey@L3M.univ-mrs.fr (C. Rey).

1631-0721/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2003.12.002

Abridged English version

Slightly heated gases or isothermal gas mixtures with variable densities are analysed by using a theoretical framework resulting from approximations justified for liquids [1–4]. Analogy between heated liquids and binary mixtures of isothermal gases equations, validates this extension; it is not the case for heated gases [5–7]. It was experimentally proven that it was necessary to take into account compressibility to explain a certain number of phenomena observed and measured in turbulent natural convection [8]. Numerical tests, using a second order code, highlighted different comportment of free jets strongly heated or cooled, according to whether the divergence of velocity is, or is not neglected [9]. A new approximation, to approach the real phenomenology of heated gas flows is proposed in this Note. The equations given use usual parameters to describe the effects of buoyancy, with aim of comparing to Boussinesq equations.

Polytropic approximation: We propose to represent all thermodynamic transformations by a succession of elementary polytropic transformations whose exponent is adjusted (thus variable), so that the sum well represents the real transformation. The fluid physical properties are postulated invariable, $\mu = Cste$, $c_P = Cste$, $c_V = Cste$, $k = Cste$: The velocity, temperature and pressure fields are described as a deviation of an adiabatic reference hydrostatic at rest. Deviatory fields state variables are supposed in polytropic evolution of ratio χ compared to the adiabatic state, for each elementary transformation. χ is variable; the approximation consists in supposing that the variations are such as the effect is negligible in space–time derivations terms of the balance equations. The restriction χ slightly variable is proposed here to simplify the presentation. This condition could be replaced later on by χ non-fluctuating.

Conclusion: The approximation suggested here allows a statement of the heated gas flows equations with a complete coupling between dynamic and thermal field, with only restriction of slightly variability of the polytropic coefficient that is determined in each point. It characterises the gas transfer, and replaces two of the state variables by coupling with the third; here it allows us to substitute the temperature for the pressure and the density. Then the difficulties of apprehension of pressure and density are avoided. This method opens interesting prospects for the study for heated gases, on the experimental level, modelling and digital simulation.

1. Introduction

La notion de masse volumique variable dans l'analyse des écoulements est tout à fait différente suivant que l'on considère ou non la compressibilité du fluide. Il y a ainsi deux démarches : l'une appliquée au gaz, compressibles par effets dynamiques, et pour lesquels les variations de température sont une conséquence de ces effets, l'autre appliquée aux liquides, par définition, incompressibles et pour lesquels il se produit une dilatation (ou contraction) par effet thermique. Par extension, les gaz supposés quasi incompressibles faiblement chauffés ou les mélanges de gaz isothermes de différentes densités, sont analysés en utilisant une trame théorique issue d'approximations justifiées pour les liquides [1–4]. Il existe une analogie d'écriture des équations entre liquides chauffés et mélanges binaires de gaz isothermes qui valide cette extension, ce n'est pas le cas pour les gaz chauffés [5–7].

Sur le plan expérimental, il a été prouvé qu'il fallait prendre en compte la compressibilité des gaz pour expliquer un certain nombre de phénomènes observés et mesurés en convection naturelle turbulente [8]. De même des essais numériques, utilisant un code au second ordre, ont mis en évidence une différence de comportement des jets libres fortement chauffés ou refroidis, suivant que la divergence du vecteur vitesse est ou n'est pas négligée [9].

Il est proposé dans cette Note une nouvelle démarche, dite approximation polytropique, dans le but de s'approcher d'une réelle prise en compte de la phénoménologie des écoulements de gaz chauffés. L'écriture des équations utilise les paramètres usuels pour décrire les effets de flottabilité, ce qui permet de comparer cette démarche à celle proposée par Boussinesq. Le problème est posé ici en terme d'analyse d'expériences par la prise en compte, à travers cette approximation, de tous les mécanismes régissant les transferts au cours de l'écoulement.

La présentation de ces approximations dites « polytropiques » est donnée en rappelant la philosophie des approximations usuelles dites de « Boussinesq ».

2. Les approximations de Boussinesq

2.1. L'équation du mouvement

On décrit le fluide en mouvement comme un état de déviation de la situation adiabatique au repos indicé « a ». Alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho}\right)\vec{g} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P - P_a) + \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\bar{\bar{\tau}}$$

Les approximations dites de Boussinesq :

- $\Delta P/P_a$ négligeable devant l'unité, soit pour la loi d'état : $(\rho - \rho_a)/\rho \approx -(T - T_a)/T_a$,
- $\Delta\rho/\rho_a$ négligeable devant l'unité sauf quand il est couplé au champ de gravité, alors : $\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P \approx \frac{1}{\rho_a}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$,
- $\mathrm{div}\,\vec{U} = 0$,
- Les propriétés physiques du fluide sont invariables en particulier $\mu = Cste$ (et $\mathrm{div}\,\vec{U} = 0$), soit $\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\tau = \nu\nabla^2\vec{U}$,

donnent :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}}_{(1)} = -\underbrace{\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right)\vec{g}}_{(2)} - \underbrace{\frac{1}{\rho_a}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P - P_a)}_{(3)} + \underbrace{\nu\nabla^2\vec{U}}_{(4)} \tag{1}$$

2.2. Remarque sur l'équation de continuité

Le fluide est supposé incompressible, alors l'approximation entraîne :

$$\mathrm{div}\,\vec{U} = 0 = \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\rho}{\rho_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho_a}{\rho} - 1\right) - \frac{1}{\rho_a}\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho - \rho_a}{\rho}\right) = -\frac{\rho_a}{\rho\gamma P_a}\frac{\mathrm{d}P_a}{\mathrm{d}t}$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right) \cong \frac{T}{\gamma r T_a^2}\vec{U}\cdot\vec{g}\left(1 - \frac{\Delta P}{P_a}\right) \cong \frac{T}{T_a}\frac{\vec{U}\cdot\vec{g}}{\gamma r T_a} \tag{2}$$

2.3. Remarque sur l'écriture du bilan d'énergie interne

Le bilan d'énergie interne pour un fluide incompressible est :

$$\rho c_V\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + P\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{U}}_{=0} - k\nabla^2 T = 0$$

L'équation de continuité donne :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = T_a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right) + \frac{T}{T_a}\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}t} \cong \frac{T}{rT_a}\vec{U}\cdot\vec{g}$$

on note $\alpha = k/(\rho c_P)$, $\gamma = c_P/c_V$, alors :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{T}{rT_a}\vec{U}\cdot\vec{g} = \alpha\gamma\nabla^2 T \tag{3}$$

Cette relation impose la structuration du champ de température, d'autant plus que l'équation se réduit à l'équation de Laplace si l'écoulement est horizontal.

3. L'approximation polytropique

Il y a analogie formelle pour les champs scalaires entre liquide chauffé (Boussinesq), mélange binaire de gaz isothermes de densité différente et gaz chauffé de façon polytropique proche d'une transformation isotherme.

Nous proposons alors de représenter les transformations thermodynamiques par une suite de transformations polytropiques élémentaires dont l'exposant est ajusté (donc variable), de telle sorte que la somme représente bien la transformation réelle.

3.1. Approximation polytropique

Seule la quatrième approximation de Boussinesq est conservée (Propriétés physiques du fluide invariables, $\mu = Cste$, $c_P = Cste$, $c_V = Cste$, $k = Cste$) :

Les champs de vitesse, de température et de pression sont décrits comme un état de déviation de l'état de référence adiabatique hydrostatique au repos noté P_a, ρ_a et T_a (avec P_0, ρ_0 et T_0, valeurs à une altitude de référence fixe) :

$$\frac{T_a}{\rho_a^{\gamma-1}} = \frac{T_0}{\rho_0^{\gamma-1}} = Cste \quad \text{et} \quad \frac{P_a}{T_a^{\gamma/(\gamma-1)}} = \frac{P_0}{T_0^{\gamma/(\gamma-1)}} Cste$$

Les grandeurs d'état des champs déviatoires sont supposées en évolution polytropique de rapport χ par rapport à l'état adiabatique, pour chaque transformation élémentaire :

$$\frac{T}{\rho^{\chi-1}} = \frac{T_a}{\rho_a^{\chi-1}} \quad \text{et} \quad \frac{P}{T^{\chi/(\chi-1)}} = \frac{P_a}{T_a^{\chi/(\chi-1)}}$$

χ est variable, l'approximation consiste à supposer que les variations soient telles que l'effet soit négligeable dans les dérivations spatio-temporelles.

La restriction χ faiblement variable est proposée ici pour simplifier la présentation des idées directrices. Cette condition pourra être remplacée ultérieurement par χ non fluctuant.

3.2. L'équation du mouvement

Calcul du terme de pression de l'équation du mouvement :

$$\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \frac{P}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\ln\frac{P}{P_a} + \ln\frac{P_a}{P_0}\right) = \frac{rT_a\chi}{\chi-1}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{T}{T_a}\right) + \frac{r\gamma}{\gamma-1}\frac{T}{T_a}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T_a$$

On note que l'état adiabatique au repos vérifie la loi de la statique :

$$\vec{g} = \frac{1}{\rho_a}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P_a = \frac{\gamma r}{(\gamma-1)}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T_a$$

L'équation du mouvement écrit en déviation par rapport à un état adiabatique au repos devient par conséquence :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t} = -\frac{T-T_a}{T_a}\vec{g} - \frac{\chi r T_a}{\chi-1}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{T-T_a}{T_a}\right) + \nu\left(\Delta\vec{U} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{U}\right)\right) \tag{4}$$

soit en posant $\mathcal{T} = (T - T_a)/T_a$, l'écriture devient :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{T}\vec{g} - \frac{\chi r T_a}{\chi - 1}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{T} + \nu\left(\Delta\vec{U} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(\mathrm{div}\,\vec{U}\big)\right) \tag{5}$$

3.3. L'équation de continuité

Il vient pour la divergence de la vitesse :

$$\mathrm{div}\,\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_a}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{\rho_a}{\rho_0}\right)$$

soit :

$$\mathrm{div}\,\vec{U} = -\frac{T_a}{T(\chi - 1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{T}{T_a}\right) - \frac{1}{T_a(\gamma - 1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_a \tag{6}$$

ou

$$\mathrm{div}\,\vec{U} = -\frac{1}{(\chi - 1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(\mathcal{T} + 1) - \frac{\vec{U}\cdot\vec{g}}{\gamma r T_a} \tag{7}$$

3.4. L'équation d'énergie interne

L'équation d'énergie interne est écrite avec l'hypothèse des propriétés moléculaires constantes ($k = Cste$), le chauffage est supposé tel que la dissipation d'énergie cinétique en chaleur soit négligeable ainsi que le rayonnement (soit $Re\,Ec(\gamma - 1)/\gamma \geqslant 10^4$, *Re* nombre de Reynolds, *Ec* nombre d'Eckert) :

$$\rho c_V\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -P\,\mathrm{div}\,\vec{U} + k\nabla^2 T + \underbrace{\phi_1 + \mathcal{R}ay}_{\text{négligés}}$$

L'hypothèse d'une représentation polytropique par petites variations donne si $\chi \neq 1$, en divisant l'équation par $\rho c_V T$ et remplaçant $\mathrm{div}\,\vec{U}$ utilisant (6) :

$$\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{T_a}\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}t} - \frac{\gamma - 1}{\chi - 1}\frac{T_a}{T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right) = \frac{\alpha\gamma}{T}\nabla^2 T$$

d'où

$$\left(\frac{\chi - \gamma}{\chi - 1}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right) = \frac{\alpha\gamma}{T_a}\nabla^2 T \tag{8}$$

Il est intéressant d'introduire la variable adimensionelle $\mathcal{T}$, pour cela on développe :

$$\frac{\nabla^2 T}{T_a} = \nabla^2\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right) + \frac{2}{T_a}\vec{\nabla}T_a\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right) = \nabla^2\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right) + \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma r T_a}\vec{\nabla}\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right)\cdot\vec{g}$$

et l'équation d'évolution de la variable thermique adimensionnelle devient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right) = \frac{\alpha\gamma(\chi - 1)}{\chi - \gamma}\left(\nabla^2\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right) + \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma r T_a}\vec{\nabla}\left(\frac{T - T_a}{T_a}\right)\cdot\vec{g}\right) \tag{9}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{T} = \frac{\alpha\gamma(\chi - 1)}{\chi - \gamma}\left(\nabla^2\mathcal{T} + \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma r T_a}\vec{\nabla}\mathcal{T}\cdot\vec{g}\right) \tag{10}$$

4. Conclusions

L'approximation proposée permet une écriture des équations de bilan des écoulements de gaz chauffés pour laquelle les couplages entre les champs dynamiques et thermiques sont pris en compte totalement, ainsi que la compressibilité, sous la seule restriction de l'existence d'un coefficient polytropique faiblement variable. Le système d'équation régissant le problème est réduit à cinq, l'exposant polytropique est une propriété physique caractérisant les transferts dans le gaz, il remplace deux des grandeurs d'état par couplage avec la troisième, ici il permet de substituer la température à la pression et à la masse volumique, la température étant facilement mesurable et donnée par une équation d'évolution spécifique. Alors les difficultés d'appréhension des grandeurs physiques pression et masse volumique, sont évitées. Cette méthode ouvre des perspectives intéressantes pour l'étude des gaz chauffés, sur le plan expérimental, de la modélisation et de la simulation numérique.

5. Résumé synthétique

Tableau 1
La comparaison des approximations différentes

Table 1
The comparison of the different approximations

	Boussinesq	Approximation polytropique	
	$\operatorname{div}\vec{U}=0$	$\operatorname{div}\vec{U}=0$	$\operatorname{div}\vec{U}\neq 0$
$\operatorname{div}\vec{U}=$	0	0	$-\frac{1}{(\chi-1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(\mathcal{T}+1)-\frac{\vec{U}\cdot\vec{g}}{\gamma r T_a}$
$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t}+\mathcal{T}\vec{g}-\nu\nabla^2\vec{U}=$	$\frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}}(P-P_a)}{\rho_a}$	$-\frac{\chi r T_a}{\chi-1}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\mathcal{T}$	$-\frac{\chi r T_a}{\chi-1}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\mathcal{T}+\frac{\nu}{3}\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{U})$
$\nabla^2 T=$	$\frac{T}{T_a}\frac{\vec{U}\cdot\vec{g}}{\alpha\gamma r}$	$-\frac{(\chi-\gamma)T}{\alpha\gamma}(\frac{\vec{U}\cdot\vec{g}}{\gamma r T_a})$	$\frac{(\chi-\gamma)T_a}{\alpha\gamma(\chi-1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{T})$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{T}=$	$(\mathcal{T}+1)\frac{\vec{U}\cdot\vec{g}}{\gamma r T a}$	$-(\chi-1)(\mathcal{T}+1)\frac{\vec{U}\cdot\vec{g}}{\gamma r T_a}$	$\frac{\alpha\gamma(\chi-1)}{\chi-\gamma}(\nabla^2\mathcal{T}+\frac{2(\gamma-1)}{\gamma r T_a}\vec{\nabla}\mathcal{T}\cdot\vec{g})$

Soit $\mathcal{T}=(T-T_a)/T_a$; on obtient le Tableau 1. On obtient $\chi=0$, pour les approximations de Boussinesq appliquées aux équations de la thermique (comparaison des colonnes 2 et 3), ce qui exprime bien la liaison entre la masse volumique et la température, et la décorrélation de la pression par rapport aux deux autres grandeurs d'état.

Références

[1] J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur, vol. 2, Gautier–Villard, 1903.
[2] E.A. Spiegel, G. Veronis, On the Boussinesq approximation for a compressible fluid, Astrophys. J. 131 (1962) 442–447.
[3] J.M. Mihaljan, A rigourous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid, Astrophys. J. 136 (1962) 1126–1133.
[4] J.N. Gence, J.P. Schon, J. Mathieu, Justification des approximations de Boussinesq pour la description d'une turbulence thermique et cinématique homogène, J. Mécanique 17 (1978) 299–321.
[5] P.C.T. De Boer, Thermally driven motion of strongly heated fluids, Int. J. Heat Mass Transfer 27 (12) (1984) 2239–2251.
[6] C. Rey, On the similarity between variable density flows, in: Int. Conf. on Variable Density Turbulent Flows, 22–23 June 2000, Banyuls, France, Collection Etudes, Presses Universitaires de Perpignan, 2000, pp. 99–108.
[7] A. Favre, L. Kovasznay, R. Dumas, J. Gaviglio, M. Coantic, La turbulence en mécanique des fluides, Gauthiers–Villars, 1976.
[8] M. Pavageau, C. Rey, Observation of volume variation effects in turbulent free convection, Int. J. Heat Mass Transfer 45 (2002) 181–192.
[9] Th. Aurier, C. Rey, Modelisation of variable volume turbulent flows, a comparison between a cold and a hot plume, in: Int. Conf. on Variable Density Turbulent Flows, 22–23 June 2000, Banyuls, France, Collection Etudes, Presses Universitaires de Perpignan, 2000, pp. 175–186.