Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Mecanique 332 (2004) 217–222

COMPTES RENDUS
MECANIQUE

Application de l'approximation polytropique à la turbulence statistique en moyenne de Favre

Claude Rey, Saïd Benjeddou

Laboratoire de modélisation et simulation numérique en mécanique, LMSNM – FRE 2405 du CNRS, les Universités d'Aix-Marseille, IMT La Jetée, technopôle de Château-Gombert, 38, rue Frédéric Joliot Curie, 13451 Marseille cedex 20, France

Reçu le 1er avril 2003 ; accepté après révision le 10 décembre 2003

Présenté par Michel Combarnous

Résumé

L'application à l'analyse expérimentale de l'approximation polytropique reliant les grandeurs d'état, est explicitée. Une méthode de détermination de l'exposant polytropique χ (variable mais non fluctuant) en chaque point de l'écoulement est donnée. Cette approximation permet de générer des signaux représentatifs des grandeurs fluctuantes, comme la pression ou la masse volumique. Le problème de la mesure pour les gaz chauffés, des termes des équations écrites en moyennes de Favre, est ainsi quasiment résolu : La mesure de χ permet la détermination par l'expérience des termes cruciaux comme les flux turbulents de masse et de quantité de mouvement, et les presso corrélations. ***Pour citer cet article : C. Rey, S. Benjeddou, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Abstract

Application of the polytropic approximation to turbulence statistics using Favre averaging. The application of the polytropic approximation connecting the quantities of corresponding state, to experimental analysis, is clarified. A method of polytropic determination of the exponent χ (variable but non-fluctuating) in each point of the flow is given. This approximation makes it possible the generation of representative signals of fluctuating quantities, like pressure or density. For heated gases, the problem of measurement of the equations terms written with Favre averaging is thus almost solved. Then, measurement of χ allows the determination by the experiment of crucial terms like turbulent fluxes of mass and momentum, and presso correlation. ***To cite this article: C. Rey, S. Benjeddou, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Gaz chauffés ; Turbulence ; Convection naturelle ; Convection mixte ; Compressibilité

Keywords: Fluids mechanics; Heated gases; Turbulence; Free convection; Mixed convection; Compressibility

Abridged English version

Heated gas flows with variable density pose the problem of measurement of the instantaneous quantities as mass volume or pressure. Indeed both terms related to density and to pressure fluctuations are unknown, as well

Adresse e-mail : crey@l3m.univ-mrs.fr (C. Rey).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2003.12.005

the coupling of the two effects. Their measurements are not directly realisable, or their values are not deductible from a balance. Concerning the numerical simulation of variable density flow, the codes use statistical description in mass weighted averaging (Favre averaging), which cannot be directly validated by experiments. It is thus necessary to build an experimental procedure in order to approach the main turbulent terms and close Favre averaging balance equations. In particular, the modelling of the pressure-correlations, whose writing is the same in Reynolds or Favre averaging, is fundamental to well describe the physics of the flow. The measurement of these terms could provide very significant improvements of the simulations.

The polytropic approximation is a good way to manage with these questions. We propose to represent all thermodynamic real transformations by a succession of elementary polytropic transformations whose exponent is adjusted (thus variable), so that the sum well represents the real transformation. The polytropic exponent χ is a new variable, changing in time and space; that leads to proceed to a change of variable resulting from this polytropic writing of the relation between state quantities (P, ρ, T) and based on the polytropic exponent χ . Then system (P, ρ) is replace with (χ, T) and the approximation consists in the hypothesis that χ is not fluctuating within the meaning of the statistical properties of turbulence.

We show that the new variable χ can be directly deduced from both measurements of the mean pressure and temperature, and from the measurements of the variance of the temperature fluctuations (second order approximation). The accuracy on this coefficient is significant and therefore, the values of χ must be checked using the energy equation.

Once the field of χ is determined in experiments, the polytropical modelling relations allow a good estimate of Favre averaging. Now, we can easily deduce the expression of pressure fluctuation according to the first and second order temperature fluctuation. In the same way, the application to density permits us to deduce the instantaneous values of density. Theses relations give a way to determine pressure correlations and turbulent mass fluxes using classical measurements, with data based on centred fluctuating quantities (i.e., Reynolds averaging). Therefore, all the terms in the equations using Favre averaging become experimentally reachable, and second order mass-weighted model can be well tested. The closure of Favre average modelling equations can be tested to the second order, improving the role of compressibility effect for strongly heated subsonic gas flows (mixed convection).

The approximation suggested for the analysis of the heated gas flows, makes that possible to take into account all the mechanisms of transfers, without prejudging their weight, through the estimate in each point of a new variable χ that is a local polytropic ratio. Restrictive assumption as this variable is non-fluctuating, can be justified because it is a physical property qualifying the transfers and that does not generate turbulent flow. The groundwork of the flow analysis is thus improved relatively with that established using Boussinesq approximations. This new approximation makes that possible, either to generate signals of the fluctuating quantities (inaccessible to measurement), like pressure or density, or to generate the correspondent terms of the evolution equations for the turbulent fields speed and temperature and whose modelling becomes conventional. The problem of calibration of the numerical simulation codes using Favre averaging, is thus almost solved, since the polytropic exponent χ measurable and is led to the determination by the experiment of the crucial terms like turbulent flows and the pressure correlations.

1. Introduction

Les écoulements de gaz à volume variable par effet thermique posent le problème de la mesure des grandeurs quasi-instantanées du volume massique et de la pression. Les capteurs doivent être sensibles et rapides.

Sur le plan expérimental, l'écriture du bilan théorique permet de déduire du bilan un terme non mesurable, s'il est isolé, ce qui est généralement possible pour les fluides incompressibles ou faiblement dilatables ou encore les mélanges isothermes de gaz dont on sait mesurer la masse volumique [1–4].

Dans le cas qui nous intéresse, nous ne connaissons ni les termes liés à la masse volumique instantanée, ni ceux liés à la pression instantanée, ni le couplage des deux effets. Leur mesure n'est pas réalisable, il y a trop de termes à déduire du bilan.

Sur le plan de la simulation numérique des écoulements à densité variable, les codes RANS utilisent la description statistique en variable aléatoire non centrée, pondérée par la masse, dite moyenne de Favre [4–6]. La modélisation en moyenne de Favre est souvent validée pour les gaz chauffés à partir de mesures réalisées en moyenne classique de Reynolds. Il est donc nécessaire de disposer d'une procédure expérimentale [7,8] permettant d'approcher les grandeurs turbulentes indispensables pour valider un bilan écrit en moyenne de Favre. En particulier la modélisation des presso-correlations dont l'écriture est la même quelque soit la décomposition statistique, est fondamentale pour une prise en compte correcte de la physique de l'écoulement. L'accès à la mesure de ces termes peut apporter des améliorations très significatives de la simulation.

L'approximation polytropique [9] apporte une réponse : On suppose qu'il existe une grandeur χ autorisant un changement de variable issue d'une écriture polytropique des relations entre les grandeurs d'état, $P/P_{\mathrm{ref}} = (\rho/\rho_{\mathrm{ref}})^{\chi}$, dont l'exposant polytropique χ est supposé ne pas être fluctuant au sens des propriétés statistiques de la turbulence. Cette nouvelle approximation, dite approximation polytropique conduit à de nombreux développements à caractères généraux et l'application présentée ici en est une présentation restrictive.

2. Procédure expérimentale de mesure de l'exposant polytropique

On montre que χ peut être déduit directement des mesures des grandeurs moyennes de pression et de température, par approximation au second ordre des fluctuations :

Si $\Psi = \overline{\Psi} + \psi'$ représente une grandeur d'état ρ, P ou T, alors :

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{\Psi}{\Psi_a}\right) = \mathrm{Ln}\left(\frac{\Psi}{\overline{\Psi}}\right) + \mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{\Psi}}{\Psi_a}\right) = \mathrm{Ln}\left(1 + \frac{\psi'}{\overline{\Psi}}\right) + \mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{\Psi}}{\Psi_a}\right) \approx \frac{\psi'}{\overline{\Psi}} - \frac{\psi'^2}{2\overline{\Psi}^2} + \mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{\Psi}}{\Psi_a}\right) \tag{1}$$

l'application à la pression et à la température donne ($\chi \neq 1$) :

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{P}{P_a}\right) = \frac{\chi}{\chi - 1}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{T}{T_a}\right)$$

soit au second ordre :

$$\frac{p'}{\overline{P}} - \frac{p'^2}{2\overline{P}^2} + \mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{P}}{P_a}\right) \approx \frac{\chi}{\chi - 1}\left(\frac{\theta'}{\overline{T}} - \frac{\theta'^2}{2\overline{T}^2} + \mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{T}}{T_a}\right)\right) \tag{2}$$

et pour les valeurs moyennes, en négligeant le second ordre en pression :

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{P}}{P_a}\right) \approx \frac{\chi}{\chi - 1}\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{T}}{T_a}\right) + \frac{\overline{\theta'^2}}{2(\chi - 1)\overline{T}^2}\right)$$

Alors la valeur de χ est déterminée à partir de l'équation du second degré :

$$(\chi - 1)^2\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{P}}{P_a}\right) - \chi(\chi - 1)\,\mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{T}}{T_a}\right) - \chi\frac{\overline{\theta'^2}}{2\overline{T}^2} = 0 \tag{3}$$

dont on retient a priori la valeur la plus proche de :

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{P}}{P_a}\right) \Big/ \left(\mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{P}}{P_a}\right) - \mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{T}}{T_a}\right)\right)$$

La précision sur la détermination de ce coefficient est importante, aussi les valeurs de χ doivent être vérifiées par les bilans moyens et en particulier le bilan d'énergie interne écrit en termes accessibles à la mesure. Pour cela on écrit l'équation d'énergie en termes de température en faisant apparaître les flux de chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\big(T\vec{U}\big) + (\gamma - 2)T\,\mathrm{div}\,\vec{U} = \alpha\gamma\nabla^2 T \tag{4}$$

Le terme lié à la divergence de la vitesse est déduit de l'équation de continuité ($\chi \neq 1$) :

$$\operatorname{div}\vec{U} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\ln(T/T_a)}{(\chi-1)}\right) - \frac{\vec{U}\cdot\vec{g}}{\gamma r T_a} + \frac{1}{(\chi-1)^2}\ln\left(\frac{T}{T_a}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi$$

$$T\operatorname{div}\vec{U} = -\frac{T_a}{\chi-2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{T}{T_a}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{T\vec{U}}{T_a}\right)\right) - \frac{\chi-1}{\chi-2}\frac{T\vec{U}\cdot\vec{g}}{\gamma r T_a} + \frac{T\ln(T/T_a)\vec{U}}{(\chi-1)(\chi-2)}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\chi$$

Après substitution dans (4) il vient :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(T\vec{U}) - \frac{\gamma-2}{\chi-2}\left(\frac{\partial}{\partial t}T + T_a\operatorname{div}\left(\frac{T\vec{U}}{T_a}\right)\right)\\ &\quad - \frac{(\gamma-2)(\chi-1)}{(\chi-2)}\frac{T\vec{U}\cdot\vec{g}}{\gamma r T_a} + \frac{T\ln(T/T_a)\vec{U}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\chi}{(\chi-1)(\chi-2)} = \alpha\gamma\nabla^2 T\end{aligned}$$

ou en grandeurs moyennes :

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{T} + \operatorname{div}(\overline{T\vec{U}}) - \frac{(\gamma-2)}{\gamma r}\frac{(\overline{T\vec{U}})\cdot\vec{g}}{T_a} + \frac{\gamma-2}{(\chi-\gamma)(\chi-1)}\overline{T\ln\left(\frac{T}{T_a}\right)\vec{U}}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\chi = \alpha\gamma\frac{\chi-2}{\chi-\gamma}\nabla^2\overline{T} \tag{5}$$

Tous les termes de cette équation sont mesurables, ce qui permet de préciser la valeur en tout point de l'exposant polytropique χ.

On note qu'il faut développer les termes moyennés (pour la réalisabilité expérimentale, les fluctuations sont des variables aléatoires centrées) :

$$\overline{T\vec{U}} = \overline{T}\,\overline{\vec{U}} + \overline{\theta'\vec{u}'}$$

et écrire au second ordre :

$$\overline{T\ln\left(\frac{T}{T_a}\right)\vec{U}} \cong \overline{T}\,\overline{\vec{U}}\left(\ln\frac{\overline{T}}{T_a} + \frac{\overline{\theta'^2}}{2\overline{T}^2} - \frac{\overline{\theta'^3}}{2\overline{T}^3}\right) + \overline{\theta'\vec{u}'}\left(1 + \ln\frac{\overline{T}}{T_a}\right)$$

Cas particuliers. Outre les cas triviaux $\chi = \gamma$ (adiabatique) ou $\chi = 1$ (isotherme), l'Éq. (5) ne permet pas une vérification expérimentale fiable si χ est constant. On montre que dans ce cas, une détermination précise peut être apportée par la mesure des grandeurs turbulentes liées à la température jusqu'au troisième ordre, ou par approximation quasi-incompressible par l'équation de la dynamique :

$$\frac{\partial\overline{\vec{U}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{\vec{U}\otimes\vec{U}}) - \overline{\vec{U}\operatorname{div}\vec{U}} = -\left(\frac{\overline{T}-T_a}{T_a}\right)\vec{g} - \frac{\chi r T_a}{\chi-1}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{\overline{T}-T_a}{T_a}\right) + \nu\Delta\overline{\vec{U}}$$

En effet Pavageau et al. [7] ont montré expérimentalement que $\overline{\vec{U}\operatorname{div}\vec{U}}$ était négligeable pour la dynamique en convection naturelle, on peut donc considérer que ce terme n'intervient pratiquement pas pour le calcul de χ, si χ est constant.

3. Exploitation pour la génération expérimentale de signaux de fluctuations de pression et de masse volumique

L'approximation polytropique permet, à partir de l'acquisition expérimentale de signaux de température, la construction de signaux représentatifs des fluctuations de masse volumique et de pression, soit directement (ce qui est très difficile compte tenu des valeurs élevées des composantes continues), soit par linéarisation au second ordre (1) :

On déduit aisément de l'Éq. (2) l'expression de la fluctuation de pression en fonction de la fluctuation de température, connaissant χ,

$$\frac{p'}{\overline{\overline{P}}} \approx \frac{\chi}{\chi-1}\frac{\theta'}{\overline{\overline{T}}} + \frac{\chi}{2(\chi-1)^2}\frac{\theta'^2 - \overline{\theta'^2}}{\overline{\overline{T}}^2} \tag{6}$$

de même, l'application à la masse volumique donne :

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{\rho}{\rho_a}\right) = \frac{1}{\chi-1}\mathrm{Ln}\left(\frac{T}{T_a}\right)$$

soit au second ordre :

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{\rho}{\rho_a}\right) \approx \frac{\rho'}{\bar\rho} - \frac{\rho'^2}{2\bar\rho^2} + \mathrm{Ln}\left(\frac{\bar\rho}{\rho_a}\right) \approx \frac{1}{\chi-1}\left(\frac{\theta'}{\overline{\overline{T}}} - \frac{\theta'^2}{2\overline{\overline{T}}^2} + \mathrm{Ln}\left(\frac{\overline{\overline{T}}}{T_a}\right)\right)$$

avec

$$\frac{T_a}{\overline{\overline{T}}}\left(\frac{\bar\rho}{\rho_a}\right)^{(\chi-1)} \approx \exp\left(-\frac{(\chi-2)}{2(\chi-1)}\frac{\overline{\rho'^2}}{\bar\rho^2}\right) \approx \exp\left(-\frac{(\chi-2)}{2(\chi-1)}\frac{\overline{\theta'^2}}{\overline{\overline{T}}^2}\right) \tag{7}$$

Il est évident que la valeur $\chi = 1$ est exclue, puisqu'elle représente le cas isotherme. La fluctuation de masse volumique est alors donnée par :

$$\frac{\rho'}{\bar\rho} \approx \frac{1}{\chi-1}\frac{\theta'}{\overline{\overline{T}}} - \frac{\chi-2}{2(\chi-1)^2}\frac{\theta'^2 - \overline{\theta'^2}}{\overline{\overline{T}}^2} \tag{8}$$

Remarque concernant la fluctuation de volume spécifique :

$$\frac{\mathrm{v}'}{\overline{\overline{\mathrm{V}}}} \approx -\frac{1}{\chi-1}\frac{\theta'}{\overline{\overline{T}}} + \frac{\chi}{2(\chi-1)^2}\frac{\theta'^2 - \overline{\theta'^2}}{\overline{\overline{T}}^2}$$

vérifie bien que la fluctuation de volume massique n'est pas proportionnelle à la fluctuation de masse volumique.

4. Application à la mesure des termes des équations statistiques de bilan écrites en moyenne de Favre

Une fois déterminé expérimentalement le champ de χ, les relations (3) et (8) permettent une bonne estimation des moyennes statistiques non centrées pondérées par la masse, dites moyennes de Favre.

4.1. Grandeurs moyennes

Soit Ψ la grandeur physique concernée (principalement $\Psi = \vec{U}$ ou $\Psi = T$), sa décomposition en grandeur moyenne et en grandeur fluctuante s'écrit dans la description de Favre :

$$\Psi = \tilde\Psi + \psi'' \quad \text{avec } \overline{\psi''} \neq 0$$

soit d'après (8)

$$\tilde\Psi = \frac{\overline{\rho\Psi}}{\bar\rho} = \overline{\Psi} + \frac{\overline{\rho'\psi'}}{\bar\rho} \cong \overline{\Psi} + \frac{1}{\chi-1}\frac{\overline{\theta'\psi'}}{\overline{T}} - \frac{\chi-2}{2(\chi-1)^2}\frac{\overline{\theta'^2\psi'}}{\overline{T}^2}$$

et $\overline{\psi''} = \overline{\Psi} - \tilde\Psi$ où ρ' et ψ' sont mesurés en moyennes centrées dites moyennes de Reynolds.

4.2. Flux turbulents

Sachant que $\psi'' = \psi' + \overline{\psi''}$ et $\overline{\psi''} = -\frac{\overline{\rho\psi'}}{\bar\rho}$, le flux turbulent de la grandeur ψ écrit en moyenne de Favre, peut être estimé à partir des mesures en statistiques centrées suivant :

$$\overline{\rho u''\psi''} = \overline{\rho u'\psi'} - \bar\rho\overline{u''}\,\overline{\psi''}$$

soit

$$\widetilde{u''\psi''}=\frac{\overline{\rho u''\psi''}}{\bar{\rho}}\cong\overline{u'\psi'}\left(1+\frac{\chi-2}{2(\chi-1)^2}\frac{\overline{\theta'^2}}{\overline{\overline{T}}^2}\right)+\frac{1}{\chi-1}\frac{\overline{\theta'u'\psi'}}{\overline{\overline{T}}}-\frac{\chi-2}{2(\chi-1)^2}\frac{\overline{\theta'^2u'\psi'}}{\overline{\overline{T}}^2}-\overline{u''}\,\overline{\psi''}$$

Si la grandeur physique Ψ est mesurable ($\vec{U}$ ou T) alors tous les termes écrits ci-dessus sont mesurables et le flux turbulent de la grandeur ψ est accessible par l'estimation au préalable de l'exposant χ.

4.3. *Presso corrélations*

Le terme qui apparaît naturellement lors de l'écriture des équations du second ordre est de la forme $\overline{\psi'\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p'}=\overline{\psi''\overrightarrow{\mathrm{grad}}p'}$, alors en utilisant (6) :

$$\overline{\psi'\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p'}=\overline{\psi''\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p'}=\frac{\chi}{\chi-1}\overline{\psi'\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left\{\frac{\theta'}{\overline{\overline{T}}}\left(1+\frac{\theta'}{2(\chi-1)\overline{\overline{T}}}\right)\right\}}$$

Cette relation permet une détermination expérimentale des termes de presso corrélation, extrêmement précieuse pour le contrôle comportemental des modèles et leur calage.

5. Conclusion

L'approximation proposée pour l'analyse des écoulements de gaz chauffés, permet de prendre en compte tous les mécanismes de transferts, sans préjuger de leur poids, à travers l'estimation en chaque point de l'exposant polytropique correspondant. L'hypothèse restrictive est que cet exposant est non fluctuant, c'est une propriété physique qualifiant les transferts et qui ne génère pas de flux turbulent. Le canevas d'analyse des écoulements est donc amélioré relativement à celui établi sur la base des approximations de Boussinesq. Cette nouvelle approximation permet soit de générer des signaux représentatifs des grandeurs fluctuantes inaccessibles à la mesure, comme la pression ou la masse volumique, soit de générer de nouveaux termes des équations d'évolution des champs turbulents de vitesse et de température et dont la modélisation est conventionnelle. Le problème de « calage » des codes numériques utilisant les moyennes de Favre, est ainsi quasiment résolu, puisque l'exposant polytropique χ est mesurable et conduit à la détermination par l'expérience des termes cruciaux comme les flux turbulents et les presso corrélations.

Références

[1] J. Way, P.A. Libby, Application to hot wire anemometry and digital techniques to measurements in a turbulent helium jet, AIAA J. 9 (8) (1971) 1567–1573.
[2] R. Hermouche, Analyse expérimentale dans les jets de mélange hélium–air, Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1996.
[3] L. Fulachier, R. Borghi, F. Anselmet, P. Paranthoën, Influence of density variations on the structure of low-speed turbulent flows: a report on Euromech 237, J. Fluid Mech. 203 (1989) 577–593.
[4] L. Fulachier, J.L. Lumley, F. Anselmet (Eds.), IUTAM Symposium on variable density flows, in: R. Moreau (Ed.), Fluid Mechanics and its Applications, Kluwer Academic, 1997, pp. 65–84, 101–108, 279–301, 325–332.
[5] A. Favre, L. Kovasznay, R. Dumas, J. Gaviglio, M. Coantic, La turbulence en mécanique des fluides, Gauthiers–Villars, 1976.
[6] P. Chassaing, G. Harran, L. Joly, Density fluctuations correlations in free turbulent binary mixing, J. Fluid Mech. 279 (1994) 239–278.
[7] M. Pavageau, C. Rey, Observation of volume variation effects in turbulent free convection, Int. J. Heat Mass Transfer 45 (2002) 181–192.
[8] F. Anselmet, P. Chassaing, L. Petri (Eds.), Proceedings of the International Conference on Variable Density Turbulent Flows. Collection Etudes, Presses Universitaires de Perpignan, 2000, pp. 77–86, 99–108, 141–152.
[9] C. Rey, S. Benjeddou, Une alternative aux approximations de Boussinesq pour les gaz chauffés : l'approximation polytropique, C. R. Mecanique (2004) 332.