Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Mecanique 332 (2004) 237–240

COMPTES RENDUS MECANIQUE

Espaces d'écoulements dits « universels », suite 2

Michel Bouthier

Laboratoire de modélisation en mécanique, UPMC, tour 66, 4, place Jussieu, 75252 Paris, France

Reçu le 12 août 2003 ; accepté le 16 décembre 2003

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

À basse vitesse, les mouvements premiers sont réalisables dans tous les matériaux dont le comportement approche un modèle rhéologique linéaire des plus généraux. Les célèbres théorèmes d'Appell, Cauchy, Helmholtz, Kelvin sont caractéristiques des mouvements premiers. Le théorème de Bernoulli admet, lui, quatre extensions. Enfin, le théorème de Helmholtz–Rayleigh sur la dissipation est converti en une définition des mouvements premiers parmi d'autres. ***Pour citer cet article : M. Bouthier, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Abstract

Spaces of universal flows, part 2. At small velocities, every universal motion can be performed in a fluid whenever the constitutive equation approaches a most general linear model. Both the celebrate theorems of Appell, Cauchy, Helmholtz, Kelvin hold true when dealing with the universal motions. Here the theorem of Bernoulli admits four generalisations. At last, the Helmholtz–Rayleigh theorem about dissipation may be regarded as defining the universal motions. ***To cite this article: M. Bouthier, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Mots-clés : Génie des matériaux ; Viscoélasticité ; Fluides simples ; Tourbillon

Keywords: Material engineering; Visco-elasticity; Simple fluids; Vorticity

A défaut d'universelle, la polyvalence des mouvements premiers est exceptionnelle : la Section 1 nous montre qu'à basse vitesse ils sont (aussi) réalisables dans la plupart des matériaux usuels. Quant à la Section 2, elle établit qu'au regard de nombreuses propriétés, la similitude des mouvements premiers et des écoulements potentiels est patente, générique.

1. Les mouvements premiers sont réalisables dans tout matériau « viscoélastique linéairement »

Un mouvement isochore de vitesse $\boldsymbol{u}$ et de vorticité $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ est dit « controllable », « universal », ou premier si

$$\boldsymbol{\omega}'_t + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u}) = \mathbf{0}, \qquad \Delta\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

Les symboles Δ, div, ∇ représenteront le laplacien, la divergence et le gradient. Si les forces massiques dérivent d'un potentiel noté ς, et si p, ρ, $\rho\boldsymbol{T}$ désignent la pression, la masse volumique et le déviateur des contraintes, les mouvements d'un fluide homogène incompressible sont régis par

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2003.12.007

$$\boldsymbol{u}'_t + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u} + \nabla h = \operatorname{div} \boldsymbol{T}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad \text{où } h \equiv p\rho^{-1} + \varsigma + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 \tag{2}$$

Référons-nous maintenant à la présentation générale des milieux viscoélastiques [1]. Sous hypothèse d'incompressibilité, supposons la déformation $\boldsymbol{D} \equiv \nabla \boldsymbol{u} + \nabla^t \boldsymbol{u}$ indépendante de p, et considérons la loi de comportement

$$\sum_{i=0}^{M} \lambda_i \frac{\partial^i T}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \frac{\partial^i D}{\partial t^i}, \quad \text{où } \lambda_i,\ \alpha_i \text{ sont des constantes} \tag{3}$$

Bien que ce modèle linéaire viole souvent le principe d'objectivité, il couvre cependant les fluides newtoniens, les milieux élastiques classiques et moult rhéologies anciennes encore usitées en unidimensionnel. Pour notre propos, retenons qu'il *reflète le comportement à basse vitesse de nombreux fluides* (*Maxwell, Oldroyd, Rivlin–Ericksen, Walters*, ...), *ainsi que de nombreux autres matériaux lors de petits déplacements à partir d'un état naturel* (*hypoélasticité, élasticité finie*, ...). Regardons par exemple la loi de comportement $\boldsymbol{T} + \lambda\delta\boldsymbol{T}/\delta t = \nu\boldsymbol{D} + \alpha_1\delta\boldsymbol{D}/\delta t$ d'un fluide de type mixte (Oldroyd-B). On a posé ici $\delta\boldsymbol{T}/\delta t \equiv \boldsymbol{T}'_t + u^i\partial\boldsymbol{T}/\partial x^i + \boldsymbol{T}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla^t\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}^t$, où $u^1,\ u^2,\ u^3$ sont les composantes de $\boldsymbol{u}$ dans un système de coordonnées orthonormées $x^1,\ x^2,\ x^3$. Quand le mouvement est lent, $\boldsymbol{u}$ et $\nabla\boldsymbol{u}$ sont petits devant 1, et une bonne approximation de la loi sera $\boldsymbol{T} + \lambda\boldsymbol{T}'_t = \nu\boldsymbol{D} + \alpha_1\boldsymbol{D}'_t$, cas particulier de (3) correspondant à $M = 1,\ \lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = \lambda,\ N = 1,\ \alpha_0 = \nu$. De même, on pourra montrer que les mouvements lents de fluides de Rivlin–Ericksen d'ordre N quelconque obéissent à (3) avec $M = 0,\ \lambda_0 = 1,\ N = N$. Puisqu'en incompressible $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \Delta\boldsymbol{u}$, l'élimination de $\boldsymbol{T}$ entre $(2)_1$ et (3) fournit l'équation du mouvement

$$\sum_{i=0}^{M} \lambda_i \frac{\partial^i(\boldsymbol{u}'_t + \omega \wedge \boldsymbol{u} + \nabla h)}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \frac{\partial^i(\Delta\boldsymbol{u})}{\partial t^i} \tag{4}$$

On en déduit immédiatement l'équation au tourbillon

$$\sum_{i=0}^{M} \lambda_i \frac{\partial^i[\boldsymbol{\omega}'_t + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u})]}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \frac{\partial^i(\Delta\boldsymbol{\omega})}{\partial t^i} \tag{5}$$

ou encore mieux

$$\sum_{i=0}^{M} \lambda_i \frac{\partial^i(\boldsymbol{\omega}'_t)}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \frac{\partial^i(\Delta\boldsymbol{\omega})}{\partial t^i} \tag{6}$$

où nous omettons les termes quadratiques négligeables à basses vitesse. La théorie de Stokes est ainsi parfaitement prolongée en viscoélasticité. Il est évident qu'alors, *d'après* (5) *les mouvements premiers sont réalisables dans tout matériau dont le comportement obéit à* (3), voire de surcroît, *si leur vorticité est stationnaire, qu'ils satisfont* (6), *généralisation de l'équation de Stokes pour les fluides viscoélastiques*. Notons que, si les effets de compressibilité sont négligeables, les équations de l'élasticité classique s'écrivent (après dérivation) $\boldsymbol{u}''_{tt} = \mu\rho^{-1}\Delta\boldsymbol{u} - \nabla\varsigma'_t,\ \mu$ étant un coefficient de Lamé. L'élimination des forces massiques fournira $\boldsymbol{\omega}''_{tt} = \mu\rho^{-1}\Delta\boldsymbol{\omega}$, cas limite de (6). Par suite, les mouvements premiers tels que $\partial^2\boldsymbol{\omega}/\partial t^2 = 0$ vérifieront les équations de l'élasticité, et ce sont les seuls mouvements premiers à posséder cette propriété.

Pour les mouvements obéissant à (5), les coupes parallèles aux écoulements potentiels sont conformément à [2] définies par

$$\sum_{i=0}^{M} \lambda_i \frac{\partial^i[\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v})]}{\partial t^i} = 0, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{7}$$

Ces coupes, qui dépendent de $\boldsymbol{\omega}$ et des seuls coefficients λ_i, forment des espaces affines fermés. Les coupes des mouvements premiers (voire celles des mouvements de fluide parfait) en sont des sous-espaces stricts. En effet, l'Éq. (7) peut être considérée comme différentielle en t. Sa solution s'écrit $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}) \exp(k_j t)$, où les fonctions $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})$ sont arbitraires, et les k_j, $j=1,\ldots,M$, sont les racines de $\sum_{i=0}^{M}\lambda_i k^i=0$. La solution de cette nouvelle équation linéaire est $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_h$, où $\boldsymbol{v}_0$ est une solution particulière et $\boldsymbol{v}_h$ la solution générale de l'équation homogène $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}_h)=\mathbf{0}$. Les éventuels mouvements premiers (voire les mouvements de fluide parfait) de la coupe correspondent bien sûr à $\boldsymbol{v}_h$. Cherchons une solution particulière de la forme $\boldsymbol{v}_0\equiv\sum_{j=1}^{M}\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x})\exp(k_j t)$. Les fonctions $\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x})$ doivent vérifier $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})$, mais comme les $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})$ sont arbitraires les $\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x})$ le sont aussi. Reste à satisfaire les deux conditions finales $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0=\mathbf{0}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0=0$, ce qui impose $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_j=\mathbf{0}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_j=0$, c'est-à-dire des mouvements $\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x})$ potentiels isochores. Sous cette réserve, choisissons des $\boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{x})$ tels que $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}_j)\neq\mathbf{0}$, ce qui est possible. L'inclusion stricte est démontrée : les mouvements correspondant à $\boldsymbol{v}_0$ existent, et sont non premiers car $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}_0)\neq\mathbf{0}$. La Fig. 2 de [2] résume le propos quand on y remplace les fluides de Maxwell par un quelconque des fluides relevant de (3).

2. Propriétés caractéristiques des mouvements premiers, conclusion

Puisque les mouvements premiers vérifient l'Éq. $(1)_1$, ils possèdent toutes les propriétés cinématiques connues en fluide parfait. En particulier,

(i) La circulation $\int_C \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ de la vitesse le long d'un contour matériel C fermé est conservée lorsque l'on suit le contour dans son mouvement (théorème de Kelvin).

(ii) Le vorticité est l'image de la vorticité initiale $\boldsymbol{\omega}_0$ par l'application tangente au mouvement, autrement dit $\boldsymbol{\omega}=(\nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}_0$, où $\nabla_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}$ est la matrice des $\partial x^i/\partial a^k$ et $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)$ est la position de la particule située initialement en $\boldsymbol{a}$ (théorème de Cauchy).

(iii) Les lignes et les tubes de vorticité sont des lignes et tubes matériels (deuxième théorème d'Helmholtz). L'étirement des lignes de vorticité est proportionnel au module ω de la vorticité $\rho\omega^{-1}\,\mathrm{d}s=\rho_0\omega_0^{-1}\,\mathrm{d}s_0$ (théorème d'Appell).

(iv) Et puisque tout tube de vorticité est un tube matériel, l'intensité d'un tube de vorticité reste constante lors de la convection du tube par le fluide (troisième théorème d'Helmholtz).

Ces propositions découlent de l'hypothèse que le mouvement est premier. Réciproquement, *chacun des quatre alinéas précédents définit et caractérise les seuls mouvements premiers* (i) *de chaque fluide de Rivlin–Ericksen de grade* 2 (ii) *de chaque matériau relevant de* (3) *sous réserve que respectivement* (i) *la vorticité et* (ii) *ses* N-1 *premières dérivées temporelles soient harmoniques à un instant donné*. Dans (iii) le deuxième théorème d'Helmholtz n'équivaut isolément qu'à $\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega}'_t+\boldsymbol{\omega}\wedge\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$ [1], voire $\boldsymbol{\omega}\wedge\Delta\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ en fluides newtoniens [3].

La cinématique ne permet pas ici de distinguer les rhéologies. En revanche, voici quatre extensions du théorème de Bernoulli montrant que la pression dépend du comportement. La vorticité étant harmonique, nous poserons $\Delta\boldsymbol{u}\equiv-\nabla\sigma$, où le potentiel σ correspond aux forces visqueuses newtoniennes. Dans un fluide de Rivlin–Ericksen du second ordre, le mouvement obéit à l'Éq. (11) de [2] :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}'_t+(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}={}&-\nabla\bigl\{p\rho^{-1}+\varsigma-(2\alpha_1+\alpha_2)\bigl(\boldsymbol{u}\Delta\boldsymbol{u}+|\boldsymbol{D}|^2/4\bigr)\bigr\}\\&+\nu\Delta\boldsymbol{u}+\alpha_1\Delta\boldsymbol{u}'_t+(\alpha_1+\alpha_2)\bigl\{\Delta\bigl[(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\bigr]-2\bigl[\nabla^t(\Delta\boldsymbol{u})\bigr]\boldsymbol{u}\bigr\}\end{aligned}\tag{8}$$

où α_1, α_2 et ν désignent les coefficients viscométriques et la viscosité cinématique du fluide, et $|\boldsymbol{D}|^2/4$ égale la somme des carrés des éléments de la vitesse de déformation $(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla^t\boldsymbol{u})/2$.

(v) Dans pareil fluide, un mouvement premier est réalisable si et seulement si $\operatorname{rot}[(\nabla^t(\Delta\boldsymbol{u}))u]=\mathbf{0}$. Définissons donc un potentiel η tel que $\Delta[(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}]-2[\nabla^t(\Delta\boldsymbol{u})]\boldsymbol{u}\equiv-\nabla\eta$. Si le mouvement est stationnaire, nous pouvons alors réduire (8) à

$$\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{u}=-\nabla\bigl\{p\rho^{-1}+\varsigma+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{u}^2+\nu\sigma-(2\alpha_1+\alpha_2)\bigl(\boldsymbol{u}\Delta\boldsymbol{u}+|\boldsymbol{D}|^2/4\bigr)+(\alpha_1+\alpha_2)\eta\bigr\}\tag{9}$$

Il en résulte : *Dans un mouvement premier stationnaire de fluide de Rivlin–Ericksen du second ordre, la quantité* $p\rho^{-1}+\varsigma+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2+\nu\sigma-(2\alpha_1+\alpha_2)(\boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{u}+|\boldsymbol{D}|^2/4)+(\alpha_1+\alpha_2)\eta$ *est constante sur chaque surface de Lamb, partant, le long de chaque ligne de courant et de chaque ligne de vorticité. Si le fluide est du second grade* $(\alpha_1+\alpha_2=0)$, *elle est indépendante du potentiel viscoélastique* η.

(vi) Puisque les mouvements potentiels sont ici réalisables, considérons le cas $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$, $\boldsymbol{u} \equiv \nabla\phi$. Le potentiel ϕ satisfait alors

$$\nabla\phi_t' = -\nabla\left\{p\rho^{-1} + \varsigma + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 - (2\alpha_1 + \alpha_2)|\boldsymbol{D}|^2/4\right\} \tag{10}$$

D'où : *Dans un mouvement potentiel, stationnaire ou non, de fluide Rivlin–Ericksen du second ordre, la quantité* $\phi_t' + p\rho^{-1} + \varsigma + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 - (2\alpha_1 + \alpha_2) \mid \boldsymbol{D}|^2/4$ *est constante dans tout l'écoulement, et ne dépend que du temps*.

Complétons par deux propositions analogues pour les mouvements lents et les matériaux introduits en Section 1 :

(vii) *Dans un mouvement premier stationnaire de fluide relevant de* (3), *la quantité* $\lambda_0 u^2/2 + \sum_{i=0}^{M} \lambda_i \partial^i (p\rho^{-1} + \varsigma)/\partial t^i + \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \partial^i \sigma/\partial t^i$ *est constante sur chaque surface de Lamb, partant, le long de chaque ligne de courant et de chaque ligne de vorticité*. Si ∇p et $\nabla\zeta$ sont stationnaires, alors c'est $u^2/2 + p\rho^{-1} + \varsigma + \lambda_0^{-1} \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \partial^i \sigma/\partial t^i$, qui est constante, et la pression est explicite.

En effet, sous les hypothèses indiquées, l'Éq. (4) du mouvement se réduit à

$$\lambda_0 \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{u} + \lambda_0 \nabla \frac{u^2}{2} + \nabla\left(\sum_{i=0}^{M} \lambda_i \frac{\partial^i (p\rho^{-1} + \varsigma)}{\partial t^i}\right) + \nabla\left(\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i}\right) = 0 \tag{11}$$

d'où le résultat.

(viii) Quand le mouvement est potentiel, $\boldsymbol{u} \equiv \nabla\phi$ et (exemple du fluide de Maxwell) l'Éq. (4) du mouvement devient $\nabla(\phi_t' + p\rho^{-1} + \varsigma + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2) + \lambda\nabla(\phi_t' + p\rho^{-1} + \varsigma + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2)_t' = \boldsymbol{0}$ d'où $\lambda\big(p\rho^{-1} + \varsigma + \phi_t' + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\big)_t' + \big(p\rho^{-1} + \varsigma + \phi_t' + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\big) = h(t)$ La fonction arbitraire $h(t)$ ne dépend ici que de t. Si $(p\rho^{-1} + \varsigma + \phi_t' + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2)_0$ désigne la valeur de l'inconnue à $t = 0$, la solution de cette équation est

$$p\rho^{-1} + \varsigma + \phi_t' + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 = \left(p\rho^{-1} + \varsigma + \phi_t' + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\right)_0 \mathrm{e}^{-t/\lambda} + \rho^{-1}\big(1 - \mathrm{e}^{-t/\lambda}\big) p_\infty(t) \tag{12}$$

où $\rho^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-t/\lambda}) p_\infty(t)$ représente une fonction arbitraire de t qui résulte de l'intégration. *Dans un mouvement potentiel de fluide de Maxwell, il existe une pression* $p_\infty(t)$ *ne dépendant que de* t *telle que la quantité* $\rho^{-1}[p - p_\infty(t)] + \varsigma + \phi_t' + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2$ *varie à partir de sa distribution initiale proportionnellement à* $\mathrm{e}^{-t/\lambda}$.

(ix) Comme ultime propriété caractéristique, actualisons le théorème. de Helmholtz–Rayleigh [4] lié aux vorticités harmoniques : *la dissipation newtonienne d'un mouvement premier dans toute région* $\Re$ *est moindre* (*au sens large*) *que la dissipation newtonienne de tout mouvement isochore ayant même vitesse sur la frontière* $\partial\Re$ *de cette région. Réciproquement, si un écoulement newtonien possède une dissipation moindre que les dissipations newtoniennes de tous ces mouvements isochores, son mouvement est premier*.

Bien que pour l'instant l'auteur ignore si un mouvement initialement premier demeure premier aux instants ultérieurs (extension du théorème de Lagrange), la parenté des mouvements premiers et des mouvements potentiels se révèle manifeste. Les mouvements premiers forment une généralisation des écoulements potentiels, et c'est la seule si l'on veut que l'une ou l'autre des propriétés célèbres en fluide parfait perdurent en de nombreux matériaux, dont les fluides newtoniens et viscoélastiques. Groupés en un faisceau d'espaces conoïdes [2], les mouvements premiers constituent une fratrie dont *les écoulements potentiels seront les aînés*.

Références

[1] C. Truesdell, R. Toupin, The Classical Field Theories, in: Handbuch der Physik, vol. III/1, Springer, Berlin, 1959, p. 733; Visco-elastic and accumulative theories, Eq. (305.2), p. 388; Criteria for permanence and constant strength of the vortex tubes, Eq. (107.3).

[2] M. Bouthier, Espaces d'écoulements dits « universels », C. R. Mécanique 331 (2003) 165–172.

[3] H. Poincaré, Théorie des tourbillons, Georges Carré, Paris, 1893, réédité Jacques Gabay, Paris, 1990, p. 193; Conditions nécessaires pour que le théorème de Helmholtz soit encore applicable, Section 151, Eq. (9).

[4] J. Serrin, Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics, in: Handbuch der Physik, vol. VIII/1, Springer, Berlin, 1959, p. 258; The Helmholtz–Rayleigh dissipation theorem.