

Étude analytique de perturbations de l'écoulement de Poiseuille dans un canal

Ahmed Hifdi, Jaâfar Khalid Naciri

Laboratoire de mécanique, faculté des sciences Aïn chock, BP 5366 Maârif, Casablanca, Maroc

Reçu le 3 mai 2002 ; accepté après révision le 7 janvier 2004

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

On propose dans cette étude une solution analytique, valable pour des nombres de Reynolds intermédiaires, de perturbations faibles de l'écoulement de Poiseuille dans un canal. La méthode considérée est basée sur la résolution d'une forme linéarisée des équations aux perturbations. La solution obtenue permet de déterminer les deux bases de fonctions propres symétriques et antisymétriques de ces perturbations. Par la suite, ces bases sont orthonormalisées et utilisées pour établir la solution complète de l'écoulement lorsqu'un profil de vitesses, introduisant ce genre de perturbations, est imposé à l'entrée du canal. *Pour citer cet article* : A. Hifdi, J. Khalid Naciri, *C. R. Mecanique 332 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Analytical study of Poiseuille flow perturbations in a channel. We present in this study an analytic solution, valid for intermediate Reynolds numbers, of the Poiseuille flow perturbation in a channel. We use a method based on the solution of a linearized form of perturbation equations. The analytic solutions allow us to determine the symmetric and antisymmetric eigenmodes. For any given entry velocity profile in the channel slightly perturbed from Poiseuille flow, the complete flow solution is obtained by using an appropriate orthonormalisation procedure for the bases of the two types of eigenfunctions. *To cite this article*: A. Hifdi, J. Khalid Naciri, *C. R. Mecanique 332 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Perturbations en canal ; Perturbations symétriques ; Antisymétriques ; Profils de vitesses

Keywords: Fluid mechanics; Flow perturbations; Symmetric; Antisymmetric; Velocity profiles

Abridged English version

The study of the entry flow of incompressible viscous fluids in channels and ducts is a relatively classical theme for which analytic or numeric solutions are available. Van Dyke and Wilson [1,2] consider the zone of the entry flow by making use of a boundary layer approach with an inviscid core. A different approach has been used by Targ [3]

Adresse e-mail : ahmedhifdi@yahoo.fr (A. Hifdi).

where the convection acceleration terms are linearized in the region of the inlet duct. However, in the case of the channel flow, the spatial evolution of any perturbation of the velocity profile and development of axial parabolic velocity profile are only accessible numerically [4–7]. For large Reynolds numbers, approaches based on the triple deck theory [8,9] permit, in only a few cases, to obtain solutions for the spatial evolution of the perturbation in the channel flow.

The problem considered is that of one-dimensional viscous flow in a straight channel. The steady Navier–Stokes equations are linearized in the limiting case of intermediate Reynolds numbers and on the assumption of small disturbance from the fully developed flow, leading to the eigenvalue equation (4). The aim of this work is to propose analytic solutions of this equation. They can be separated into odd and even solutions related respectively to symmetric and antisymmetric perturbations of the velocity. Eq. (4) has been solved [4–6] numerically giving only eigenvalues but not eigenfunctions. The odd eigenfunctions only have been determined numerically by Kumar et al. [7]. These eigenfunctions are used as the expansion set to give flow evolutions at some configurations in which the channel has a symmetric expansion or a base.

In this paper, We give an analytic solution (9) of Eq. (4). Table 1 contains our results for the first twelve even and odd eigenvalues. These values are accurate and their number is larger than those given in the past [4–7], which are also shown in this table. This large spectrum of symmetric and antisymmetric eigenmodes is then used to find the complete flow solution when velocity profiles, slightly perturbed from Poiseuille flow, are imposed at the entry of a channel. The development of the flow is affected by the presence of antisymmetric eigenmodes. An improvement of the results has been obtained by introducing analytic higher order eigenmodes which have never been determined numerically [7].

1. Introduction

L'étude de l'établissement d'écoulements de fluides visqueux incompressibles dans des canaux et des conduites est un thème relativement classique pour lequel plusieurs auteurs ont proposé des solutions analytiques ou numériques. C'est le cas des travaux de Van Dyke et de Wilson [1,2] où la zone d'entrée est traitée par une approche de couche limite avec un noyau central et celle de Targ [3] dans le cas d'une conduite à partir d'une linéarisation directe des termes convectifs de l'accélération. Toutefois, dans le cas de l'écoulement dans un canal, la détermination de l'évolution spatiale d'une petite perturbation quelconque d'un profil de vitesse et l'établissement d'un profil de vitesse axiale parabolique n'est toujours accessible que par résolution numérique [4–7]. Dans le cas des très grands nombres de Reynolds Re , des approches basées sur la théorie de la triple couche [8,9] permettent, pour certaines situations, d'obtenir des solutions pour l'évolution spatiale de la perturbation dans des écoulements en canaux.

En effet, Wilson [4], Stocker et al. [6] ont résolu numériquement l'équation aux valeurs propres d'un écoulement bidimensionnel, dans un canal, légèrement perturbé par rapport à l'écoulement de Poiseuille. Lorsque les nombres de Reynolds sont intermédiaires, leurs travaux ont porté sur la détermination d'un nombre restreint de valeurs propres d'ordre Re^{-1} qu'ils ont obtenu à partir de la résolution de la limite asymptotique de cette équation. De même, Bramley et al. [5] calculent, pour une large gamme de Reynolds, les valeurs propres du problème original par l'algorithme QR. Pour valider ses résultats asymptotiques, Stocker et al. [6] utilisent l'algorithme QZ. Signalons que dans ces travaux [4–6], les fonctions propres n'ont pas été déterminées.

Par ailleurs et toujours dans le cadre des petites perturbations de l'écoulement de Poiseuille, Kumar et al. [7] supposent d'une part que le rapport des échelles de longueurs caractéristiques axiale et radiale de la perturbation est d'ordre Re . D'autre part, ils considèrent la forme linéarisée des équations aux perturbations. Dans ce cas, la formulation du problème aux valeurs propres correspondant conduit à une équation identique à celle obtenue par Wilson [4], Stocker et al. [6] lorsque ces valeurs sont d'ordre Re^{-1} . Sa résolution numérique par la méthode de Runge–Kutta–Gill, permet à ces auteurs de calculer les toutes premières valeurs propres associées respectivement aux modes symétriques et antisymétriques. Les applications dans ce cadre (écoulements d'entrée dans un

élargissement brusque et dans des canaux en cascade) n’ont été toutefois considérées que pour les perturbations de natures symétriques.

Dans ce travail où nous nous plaçons dans le cadre des mêmes hypothèses que Kumar et al. [7], notre but est de proposer des solutions purement analytiques du problème aux valeurs propres d’ordre Re^{-1} . On est ainsi en mesure d’accéder à un large spectre de modes propres aussi bien symétriques qu’antisymétriques. L’introduction des modes de rangs élevés, dans les solutions donnant l’évolution des écoulements d’entrée au sein du canal, contribue à l’amélioration de certains résultats [7]. On se propose aussi de mettre en évidence le rôle que peuvent jouer les perturbations antisymétriques sur la longueur d’établissement de l’écoulement dans un canal. Ceci est d’autant plus justifié que le mode le plus persistant dans l’écoulement est antisymétrique.

Enfin nous considérons pour cette approche, en guise d’applications, les évolutions dans le canal de certains écoulements légèrement perturbés par rapport à celui de Poiseuille.

2. Formulation

Dans le système de coordonnées cartésiennes (x^*, y^*) , on considère l’écoulement stationnaire d’un fluide visqueux incompressible entre deux plans parallèles d’équations $y^* = h$ et $y^* = -h$. On introduit les quantités adimensionnelles suivantes : $x = x^*/L$, $y = y^*/h$, $U = U^*/U_0$, $V = V^*/\varepsilon U_0$ et $P = \varepsilon h P^*/\rho \nu U_0$ où U^* est la vitesse axiale, V^* la vitesse normale, P^* la pression, ν la viscosité cinématique, ρ la masse volumique et où $\varepsilon = h/L$ est un paramètre de forme. L et U_0 sont respectivement la longueur et la vitesse axiales caractéristiques de l’écoulement. Dans le cas où $\varepsilon \ll 1$ et en l’absence de forces volumiques, les équations de Navier–Stokes s’écrivent à l’ordre 1 en ε , sous la forme adimensionnelle suivante :

$$Re \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

où $Re = \varepsilon U_0 h / \nu$ est le nombre de Reynolds. Cette approche est largement utilisée pour la modélisation des écoulements en canaux et conduites [7,11–13]. Les conditions aux limites de ce système, traduisant l’adhérence du fluide aux parois $y = 1$ et $y = -1$, s’écrivent : $U(x, 1) = U(x, -1) = V(x, 1) = V(x, -1) = 0$. On considère en plus, qu’à l’entrée du canal ($x = 0$) est imposé un profil de vitesse axiale $U_e(y)$ qui vérifie $U_e(1) = U_e(-1) = 0$ et $\int_{-1}^1 U_e(y) dy = 2$. Pour le système (1), nous nous proposons dans la suite de chercher des solutions qui s’écrivent sous la forme : $U = U_p(y) + u(x, y)$, $V = v(x, y)$ et $P = P_0(x) + p(x)$ où $u(x, y)$, $v(x, y)$ et $p(x)$ sont des faibles perturbations de l’écoulement de Poiseuille avec $U_p(y) = 3(1 - y^2)/2$ et $dP_0(x)/dx = -3$. Dans ce cadre et pour le cas où, en terme de perturbation, le rapport des échelles de longueurs caractéristiques axiale et radiale est de l’ordre de Re [12,13], le système d’équations aux perturbations linéarisées s’écrit :

$$Re \left(\frac{3}{2}(1 - y^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 3yv \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2a,b}$$

Les conditions aux limites en $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont données par : $u(x, 1) = u(x, -1) = v(x, 1) = v(x, -1) = 0$ et $u(0, y) = U_e(y) - U_p(y)$.

3. Étude analytique

Nous introduisons dans l’Éq. (2a), comme cela est le cas pour de nombreux travaux [4–7], la fonction de courant de la perturbation $\Psi_p(x, y) = \Phi(y) e^{-\alpha x}$. Dans le cadre de notre approche, le coefficient α est un réel positif [4,7]. On obtient ainsi :

$$\Phi^{(3)}(y) + [3\alpha Re(1 - y^2)/2] \Phi^{(1)}(y) + 3\alpha Re y \Phi(y) = e^{\alpha x} dp/dx \tag{3}$$

où $\Phi^{(i)}(y) = d^i \Phi(y)/dy^i$. Les conditions aux limites sur $\Phi(y)$ et $\Phi^{(1)}(y)$ découlent des conditions d'adhérence, elles s'écrivent : $\Phi(1) = \Phi(-1) = 0$ et $\Phi^{(1)}(1) = \Phi^{(1)}(-1) = 0$. Cette équation où le second membre est obligatoirement constant ($= k$) permet d'écrire le gradient de pression de la perturbation sous la forme : $dp/dx = k e^{-\alpha x}$. Elle permet en plus, de vérifier que $\Phi(y)$ ne peut être paire que si $k = 0$. Cela signifie que les profils de vitesses antisymétriques induits par la perturbation sont observés à des gradients de pression nuls pour celle-ci [7,8]. Enfin, en considérant la dérivée de cette équation, on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\Phi^{(4)}(y) + [3\alpha Re(1 - y^2)/2]\Phi^{(2)}(y) + 3\alpha Re\Phi(y) = 0 \quad (4)$$

dont la résolution, par des méthodes numériques, a déjà fait l'objet de nombreux travaux [4–7].

Compte tenu du fait que l'objet essentiel de notre travail est la détermination de solutions analytiques pour cette équation, nous procédons de la façon ci-après :

(i) On considère la combinaison suivante des Éqs. (3) et (4) :

$$[\Phi^{(4)}(y) - y\Phi^{(3)}(y)] + [3\alpha Re(1 - y^2)/2][\Phi^{(2)}(y) - y\Phi^{(1)}(y) + 2\Phi(y)] = -ky \quad (5)$$

(ii) On introduit le changement de fonction défini par :

$$\Theta(y) = \Phi^{(2)}(y) - y\Phi^{(1)}(y) + 2\Phi(y) \quad (6)$$

ce qui permet d'écrire (5) sous la forme :

$$\Theta^{(2)}(y) + [3\alpha Re(1 - y^2)/2]\Theta(y) = -ky \quad (7)$$

En tenant compte du fait que la forme homogène associée à l'Éq. (7) admet deux solutions linéairement indépendantes qui sont des fonctions cylindriques [14] que l'on notera $\tilde{u}(a, y/\beta)$ et $\tilde{v}(a, y/\beta)$ où $a = -\sqrt{3\alpha Re}/8$ et $\beta = \sqrt{2}(3\alpha Re/2)^{-1/4}/2$, on est en mesure de dégager la solution suivante de (7) :

$$\Theta(y) = k\beta^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \tilde{u}\left(a, \frac{y}{\beta}\right) \int_0^{y/\beta} t \tilde{v}(a, t) dt - \tilde{v}\left(a, \frac{y}{\beta}\right) \int_0^{y/\beta} t \tilde{u}(a, t) dt \right\} + d_1 \tilde{v}\left(a, \frac{y}{\beta}\right) + d_2 \tilde{u}\left(a, \frac{y}{\beta}\right) \quad (8)$$

d_1 et d_2 étant des constantes. Il en résulte alors :

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(y) = & y \int_0^y t \Theta(t) dt - y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^y F\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \Theta(t) (t^2 - 1) e^{-t^2/2} dt + 2c_1 y \\ & + \left\{ y \sqrt{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) - e^{y^2/2} \right\} \left\{ c_2 + \int_0^y \Theta(t) (t^2 - 1) e^{-t^2/2} dt \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes et $F(y/\sqrt{2}) = \sqrt{2/\pi} \int_0^y e^{-t^2/2} dt$.

En conséquence, le profil de vitesses axiales, qui correspond à la solution exacte du système (2a,b) lorsque les conditions à l'entrée du canal fixent $u(x = 0, y) = \Phi^{(1)}(y)$, est : $u(x, y) = \Phi^{(1)}(y) e^{-\alpha x}$. Ce profil est symétrique (respectivement antisymétrique) lorsque $c_1 = 0$ (respectivement $c_2 = 0$).

Par ailleurs, On peut démontrer à partir de l'Éq. (4) que les fonctions propres $\Phi_i^{(1)}(y)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) sont linéairement indépendantes. Il en résulte alors deux systèmes libres de fonctions propres symétriques $\{\Phi_i^{(1)s}(y)\}$ et antisymétriques $\{\Phi_i^{(1)as}(y)\}$ associées respectivement aux valeurs propres $\alpha_i^s Re$ et $\alpha_i^{as} Re$ données dans le

Tableau 1
Les valeurs propres $\alpha_i Re$ de l'Éq. (4)

Table 1
The eigenvalues $\alpha_i Re$ of Eq. (4)

<i>i</i>	Modes antisymétriques					Modes symétriques				
	Nos résultats	Kumar et al. [7]	Bramley et al. [5]		Stocker et al. [6]	Nos résultats	Kumar et al. [7]	Bramley et al. [5]		Stocker et al. [6]
			<i>Re</i> = 10 ²	<i>Re</i> = 10 ³				<i>Re</i> = 10 ²	<i>Re</i> = 10 ³	
1	14,45307	14,45 [†]	14,54	14,45	14,453	18,81389	18,81 [†]	18,808	18,81	18,814
2	48,87212	48,87 [†]	52,747	48,90	48,872	57,52266	57,52 [†]	57,534	57,52	57,5226
3	104,43071	104,43 [†]	–	104,69	104,433	117,29114	117,30	117,751	117,29	117,293
4	181,22838	181,25	140,059	182,49		198,23319	198,26	203,429	198,25	
5	279,30231	279,38	236,435	283,84		300,40007	300,50	–	300,44	
6	398,67100		353,450			423,82254		397,201		
7	539,34464					568,51662				
8	701,33019					734,49504				
9	884,63156					921,76636				
10	1089,25259					1130,33694				
11	1315,19472					1360,21163				
12	1562,46081					1611,39424				

[†]: valeurs fournies aussi par Wilson [4].

[†]: values also given by Wilson [4].

Tableau 1. Compte tenu de ceci et de la nature linéaire du système (2a,b), la composante axiale de la vitesse de la perturbation s'écrit :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i^{(1)s}(y) e^{-\alpha_i^s x} + \sum_{i=1}^n b_i \Phi_i^{(1)as}(y) e^{-\alpha_i^{as} x} \tag{10}$$

Pour cette solution, nous utilisons le procédé de Gram–Schmidt [10] pour orthogonaliser les fonctions propres et par la suite déterminer les coefficients a_i et b_i . Le profil de vitesse axiale $u(x, y)$ s'écrit finalement :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \Phi_{oi}^{(1)s}(y) e^{-\alpha_i^s x} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Phi_{oi}^{(1)as}(y) e^{-\alpha_i^{as} x} \tag{11}$$

où $\Phi_{oi}^{(1)s}(y)$ et $\Phi_{oi}^{(1)as}(y)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) sont les fonctions propres orthonormées avec : $\gamma_i = [\int_{-1}^1 u_e^s(y) \Phi_{oi}^{(1)s} \times (y) dy]/2$ et $\beta_i = [\int_{-1}^1 u_e^{as}(y) \Phi_{oi}^{(1)as}(y) dy]/2$. Les fonctions $u_e^s(y)$ et $u_e^{as}(y)$ sont respectivement définies par : $u_e^s(y) = [u(0, y) + u(0, -y)]/2$ et $u_e^{as}(y) = [u(0, y) - u(0, -y)]/2$. La solution complète de l'écoulement dans le canal s'écrit alors : $U(x, y) = U_p(y) + u(x, y)$.

4. Résultats et discussion

L'objectif concret de l'établissement des solutions analytiques (9) est de pouvoir d'une part, calculer l'évolution dans un canal droit, d'un profil d'entrée arbitraire de vitesses faiblement perturbé par rapport à l'écoulement de Poiseuille et d'autre part, de cerner l'impact qu'aurait la présence de perturbations antisymétriques sur l'établissement du profil de Poiseuille. On se distingue ainsi des travaux menés dans des cas similaires où seules les perturbations symétriques de vitesses ont été prises en compte [7, 11–13].

Les solutions analytiques de (9), que nous avons calculé en respectant la condition de débit nul pour toutes les perturbations, permettent en effet, d'accéder à deux spectres de valeurs propres plus larges que ceux rencontrés

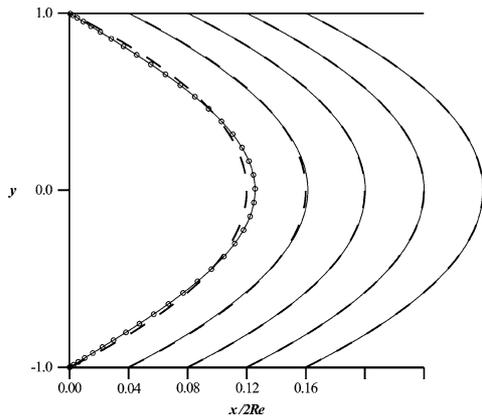


Fig. 1. Evolution de l'écoulement dans la zone d'entrée lorsque le profil $U_{e1}(y)$ est imposé. — : $U(x, y)$, --- : $U_p(y)$, o o o : $U_{e1}(y)$.

Fig. 1. Evolution of the flow in the entry zone when the profile $U_{e1}(y)$ is imposed.

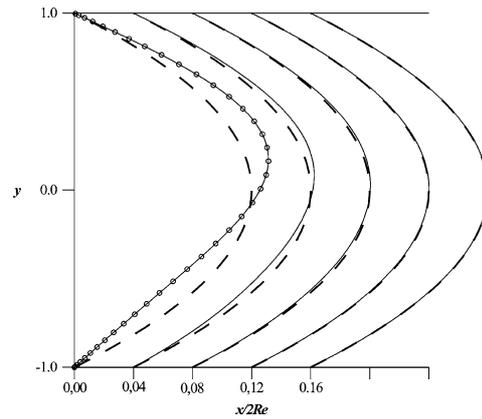


Fig. 2. Evolution de l'écoulement dans la zone d'entrée lorsque le profil $U_{e2}(y)$ est imposé avec $A = 0,25$. — : $U(x, y)$, --- : $U_p(y)$, o o o : $U_{e2}(y)$.

Fig. 2. Evolution of the flow in the entry zone when the profile $U_{e2}(y)$ is imposed with $A = 0.25$.

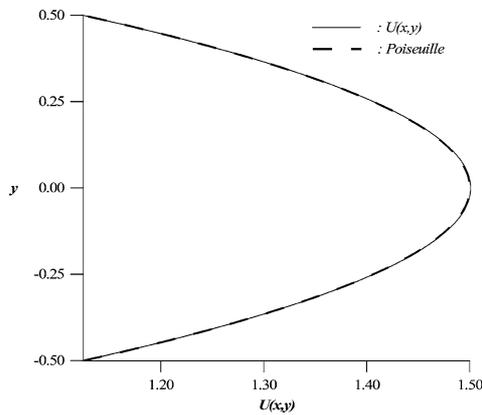


Fig. 3. Le profil $U(x, y)$ à $x/2Re = 0,12$ lorsque le profil $U_{e1}(y)$ est imposé.

Fig. 3. The $U(x, y)$ profile at $x/2Re = 0.12$ when the $U_{e1}(y)$ profile is imposed.

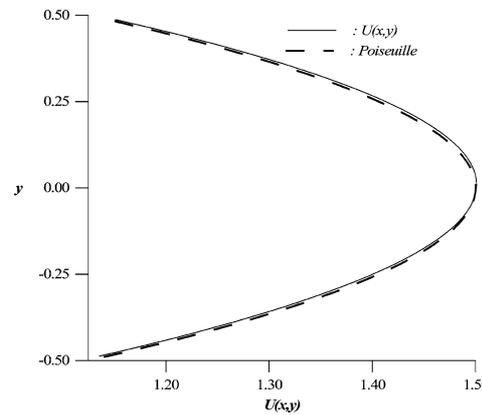


Fig. 4. Le profil $U(x, y)$ à $x/2Re = 0,12$ lorsque le profil $U_{e2}(y)$ est imposé avec $A = 0,25$.

Fig. 4. The $U(x, y)$ profile at $x/2Re = 0.12$ when the $U_{e2}(y)$ profile is imposed with $A = 0.25$.

dans la littérature (cf. Tableau 1). Il est à noter que la première d'entre elles correspond à un mode antisymétrique et que leur apparition est ensuite alternée. Par ailleurs, sur le Tableau 1, où nous comparons nos résultats avec ceux de Wilson [4], Kumar et al. [7], Bramley et al. [5], Stocker et al. [6], il apparaît clairement que, même dans le cas où nous nous limitons au même rang que ces auteurs, nos résultats sont plus précis. Soulignons au passage que pour cette comparaison, les valeurs de Bramley et al. [5], qui donnent les α_i pour Re donné, sont adaptées aux valeurs $\alpha_i Re$ lorsque $Re = 10^2$ et $Re = 10^3$.

Pour illustrer notre démarche, nous considérons dans un premier temps, pour $n = 12$, deux exemples d'application relatifs à l'évolution d'un écoulement d'entrée dans un canal et pour lesquels les profils imposés à l'entrée $U_{e1}(y)$ et $U_{e2}(y)$ sont présentés sur le Tableau 2. A partir des Figs. 1, 3 et 2, 4, relatives respectivement aux cas où $U(x = 0, y) = U_{e1}(y)$ et $U(x = 0, y) = U_{e2}(y)$, on constate que la présence des perturbations antisymétriques au sein de l'écoulement retarde son développement et augmente la longueur d'entrée Le dans

Tableau 2
Résumé des résultats et figures selon le profil d'entrée $U_e(y)$ imposé

Table 2
Summary of the results and figures according to the imposed entry profile $U_e(y)$

Profil $U_e(y)$ imposé à l'entrée du canal	Fig	A	$Le/2Re$
$U_{e1}(y) = -(\pi/2) \cos[\pi(1 - y/2)]$	1,3 et 8	–	0,105
	–	0,125	0,155
$U_{e2}(y) = -(\pi/2) \cos[\pi(1 - y/2)] + A \sin[\pi(1 - y)]$	2 et 4	0,25	0,176
	–	0,50	0,196
$U_{e3}(y) = 1$	5,6 et 7	–	0,1575

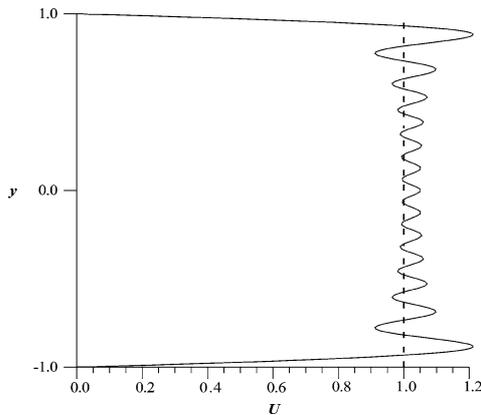


Fig. 5. Le profil $U(0, y)$ lorsque le profil $U_{e3}(y)$ est imposé.
— : $U(0, y)$, --- : $U_{e3}(y)$.

Fig. 5. The $U(0, y)$ profile when the $U_{e3}(y)$ profile is imposed.

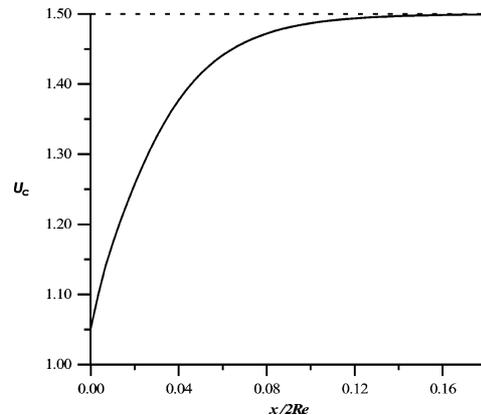


Fig. 6. Evolution de la vitesse au centre pour le profil $U_{e3}(y)$.

Fig. 6. Centre line velocity distribution for the $U_{e3}(y)$ profile.

le canal (cf. Tableau 2). Remarquons au passage, que sur les Figs. 1 et 2, les profils obtenus à l'entrée par notre approche coïncident parfaitement avec les profils imposés.

Lorsque le profil imposé à l'entrée est uniforme ($U_{e3}(y) = 1$), cas pour lequel les conditions d'adhérence ne sont plus vérifiées, nous présentons le profil obtenu $U(0, y)$ (cf. Fig. 5) ainsi que la vitesse au centre $U_c(x) = U(x, 0)$ (cf. Fig. 6). Notons à ce niveau que ce profil ne coïncide pas exactement avec le profil imposé ; ceci est dû au fait que dans le cadre de notre formulation, les conditions d'adhérence et de débit nul pour les perturbations doivent être simultanément vérifiées. Néanmoins et pour la vitesse au centre, la valeur obtenue à l'entrée ($U_c(0) = 1,051$) est légèrement différente de celle obtenue par Kumar et al. [7] ($U_c(0) = 1,1$) mais assez proche de celle obtenue par Wang et al. [15] ($1,05 < U_c(0) < 1,1$), qui procèdent à une résolution numérique des équations de Navier–Stokes par un schéma aux différences finies. Par ailleurs, le tracé de l'évolution du profil $U_{e3}(y) = 1$ (cf. Fig. 7), dans une partie de la zone d'entrée du canal, laisse apparaître l'existence des aspects qualitatifs d'une couche limite à côté d'un noyau central uniforme.

Sur le Tableau 2, nous résumons les résultats relatifs aux valeurs de $Le/2Re$, déduites des Figs. 1, 2, 6 et 8 avec une erreur relative $e = 10^{-3}$ définie par : $|(U(x, y) - U_p(y))/U_p(y)| \leq e$. Ceux qui correspondent aux cas des profils $U_{e1}(y)$ et $U_{e3}(y)$ (symétriques) peuvent être aussi constatés respectivement sur les Figs. 6 et 8.

5. Conclusion

Dans le cadre de ce travail, l'approche utilisée a permis de déterminer analytiquement, pour un écoulement d'entrée quelconque mais faiblement perturbé par rapport à l'écoulement de Poiseuille et lorsque les nombres de

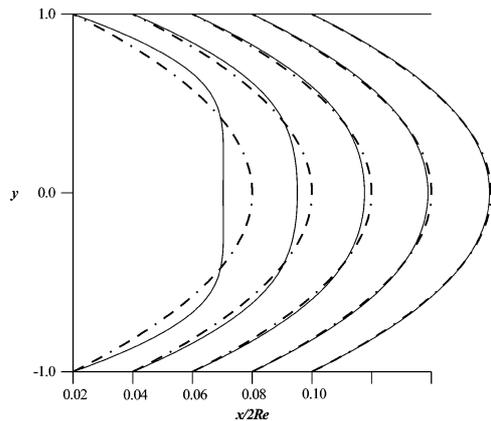


Fig. 7. Evolution de l'écoulement dans une partie de la zone d'entrée lorsque le profil $U_{e3}(y)$ est imposé. — : $U(x, y)$, - - - : $U_p(y)$.

Fig. 7. Evolution of the flow in the entry zone when the profile $U_{e3}(y)$ is imposed.

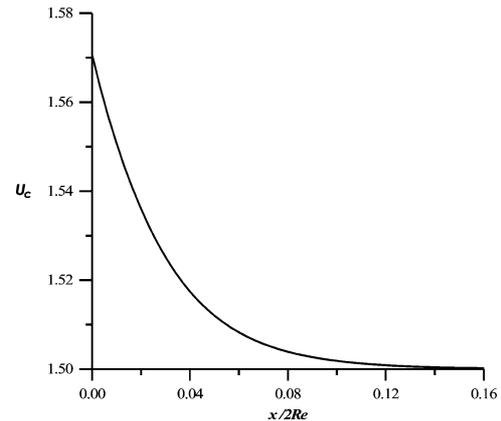


Fig. 8. Evolution de la vitesse au centre pour le profil $U_{e1}(y)$.

Fig. 8. Centre line velocity distribution for the $U_{e1}(y)$ profile.

Reynolds sont intermédiaires, les perturbations de vitesses symétriques et antisymétriques. Cette détermination a permis de cerner le rôle, non négligeable, joué par ces dernières perturbations sur la longueur d'établissement de l'écoulement. Ce moyen, tout en mettant à notre disposition de larges spectres des deux types de modes propres, permet de contourner les difficultés numériques et d'améliorer qualitativement les résultats à travers l'introduction des modes de rangs élevés dans les calculs. Ces solutions analytiques vont permettre d'une part, d'aborder des analyses de stabilité linéaire d'écoulements d'entrée presque parallèles de manière simplifiée en allégeant les calculs numériques et d'autre part, d'envisager l'extension de notre démarche à des canaux dont les parois seraient déformées.

Références

- [1] M. Van Dyke, Entry flow in a channel, *J. Fluid Mech.* 44 (4) (1970) 813–823.
- [2] S. Wilson, Entry flow in a channel. Part 2, *J. Fluid Mech.* 46 (4) (1971) 787–799.
- [3] S.M. Targ, in: N.A. Slezkin (Ed.), *Dynamics of Viscous Incompressible Fluids*, Gostekhizdat, Moscou, 1955.
- [4] S. Wilson, The development of Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* 38 (4) (1969) 793–806.
- [5] J.S. Bramley, S.C.R. Dennis, The calculation of eigenvalues for the stationary perturbation of Poiseuille flow, *J. Comput. Phys.* 47 (1982) 179–198.
- [6] J.R. Stocker, P.W. Duck, Stationary perturbations of Couette–Poiseuille flow: the flow development in long cavities and channels, *J. Fluid Mech.* 292 (1995) 153–182.
- [7] A. Kumar, K.S. Yajnik, Internal separated flows at large Reynolds number, *J. Fluid Mech.* 97 (1) (1980) 27–51.
- [8] A. Achiq, Structures de couches limites au voisinage des bords de fuite et dans les sillages en écoulements confinés, thèse d'état, Université Hassan II Ain Chock, Casablanca, 2000.
- [9] S. Sainlos, J. Mauss, Asymptotic modelling for separating boundary layers in a channel, *Int. J. Engrg. Sci.* 34 (2) (1996) 201–211.
- [10] A. Nikiforov, V. Ouvarov, *Eléments de la théorie des fonctions spéciales*, Mir, Moscou, 1968, p. 31.
- [11] M. Benzidi, M. Mafkhari, J. Khalid Naciri, M. Ouazzani Touhami, in: *Écoulement d'entrée stationnaire dans une conduite rigide uniforme*, 2^e congrès de mécanique de Casablanca, vol. 1, 1995, pp. 8–14.
- [12] A. Benjelloun, J. Khalid Naciri, M. Mafkhari, M. Ouazzani Touhami, Étude analytique de l'écoulement dans une conduite déformée, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIB* 327 (1999) 759–764.
- [13] M. Sijelmassi, J. Khalid Naciri, *C. R. Mecanique* 330 (2002) 153–158.
- [14] M. Abramowitz, I.A. Stegun, in: *Appl. Math.*, vol. 55, National Bureau of Standards, Washington, 1964, p. 687.
- [15] Y.L. Wang, P.A. Longwell, Laminar flow in the inlet section of parallel plates, *AIChE J.* 10 (1964) 323–329.