Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Mecanique 332 (2004) 313–318
COMPTES RENDUS MECANIQUE

Approche globale, minima relatifs et Critère d'Amorçage en Mécanique de la Rupture

Jérôme Laverne [a,b], Jean-Jacques Marigo [a]

[a] *LPMTM (UPR-CNRS 9001), Université Paris-Nord, 93430 Villetaneuse, France*
[b] *Département AMA, EDF R&D, 1, avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart cedex, France*

Reçu le 29 novembre 2003 ; accepté après révision 27 janvier 2004

Présenté par Pierre Suquet

Résumé

On montre que l'on peut rendre compte de l'amorçage d'une fissure en utilisant uniquement la notion de minimum relatif de l'énergie globale, les critères d'amorçage obtenus dépendant du choix de la forme de l'énergie. En particulier dans le cas d'une énergie de volume élastique et d'une énergie de surface dépendant du saut de déplacement, le critère d'amorçage obtenu est un critère en contraintes du type courbe intrinsèque. ***Pour citer cet article : J. Laverne, J.-J. Marigo, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Abstract

Global approach, relative minima and yield criterion in Fracture Mechanics. We show that it is possible to predict the onset of cracking by searching relative minima of the total energy of a body, the yield criterion depending on the choice of the energies. In particular in the case where the bulk energy is elastic and the surface energy depends on the jump of the displacement, we prove that the yield criterion is formulated in terms of the stress tensor and of intrinsic curve type. ***To cite this article: J. Laverne, J.-J. Marigo, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Mots-clés : Rupture ; Élasticité ; Énergie de surface ; Mécanique de la Rupture ; Calcul des variations

Keywords: Rupture; Elasticity; Surface energy; Fracture Mechanics; Calculus of Variations

Abridged English version

We consider a N-dimensional elastic brittle body whose natural uncracked configuration is Ω and which is submitted to an external loading the intensity of which is t, t increasing from 0. We denote by u_t the displacement field of the uncracked body at equilibrium under the loading t. By virtue of the theorem of the potential energy, u_t is the minimizer of the potential energy of the uncracked body among the set of smooth admissible displacement fields, i.e. u_t satifies (4) where W denotes the convex elastic potential, f_t the potential of the external forces and

Adresse e-mail : marigo@lpmtm.univ-paris13.fr (J.-J. Marigo).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2004.01.014

$\varepsilon(v)$ the linearized strain tensor associated to v. If we consider now a discontinuous displacement field v, denoting by $\mathcal{S}_v$ the set of material points where v is discontinuous, the energy of the body in a such configuration is the sum of its potential energy and its surface energy, see (6). The latter is defined by (5) where $\phi(x, \nu, [\![v]\!])$ represents the surface energy density at point x when the displacement suffers a jump discontinuity $[\![v]\!]$ at x across a surface of discontinuity the unit normal vector of which is ν at x. The criterion of the beginning of cracking is defined as an instability criterion of the elastic response u_t. Specifically, by considering all the admissible displacement fields, i.e. all piecewise smooth vector fields which have only to satisfy the non-interpenetrability condition (7), $v \cdot \nu \geqslant 0$ on $\mathcal{S}_v$, and (weakened) boundary conditions and by introducing a norm (which is not precised here), we define the following stability criterion, cf. (8):

Stability Condition. At the loading level t, the body is in an elastic stable equilibrium state if and only if u_t is a relative (or local) minimum of the total energy $\mathcal{E}_t$.

The goal of the Note is to obtain *sufficient instability conditions* for u_t and so a yield criterion for the onset of cracking. These conditions depend essentially on the form of the surface energy ϕ.

Case of Griffith surface energy. We first recall what happens when we consider a surface energy which is independent of the intensity of the jump, see (9). In a two-dimensional setting, by considering small cracks located at an arbitrary point x_0 and with an arbitrary orientation ν, we obtain the famous Griffith criterion (formulated in terms of the energy release rate, say $G_t(x_0, \nu)$) as a necessary condition of stability of u_t, cf. (11). But, since $G_t(x_0, \nu) = 0$ if u_t does not present a strong singularity at x_0, cf. [3], u_t is in general stable for all t and the onset of cracking cannot be obtained from Griffith's assumption of the surface energy.

Case of Barenblatt surface energy. We consider now three-dimensional homogeneous isotropic brittle bodies whose surface energy is an increasing smooth function of the jump discontinuity, see (12). By evaluating the change of the total energy due to a *small* defect located at an arbitrary point x_0, with an arbitrary direction ν and with an arbitrary jump δ, we obtain from classical arguments of Calculus of Variations the following necessary stability condition formulated in terms of the *elastic stress tensor* $\sigma_t(x_0)$ at x_0:

$$\sigma_t(x_0)\nu \cdot \delta \leqslant \Phi\big(\delta \cdot \nu, \|\delta - \delta \cdot \nu\, \nu\|\big), \quad \forall x_0,\ \forall \nu, \forall \delta, \quad \delta \cdot \nu \geqslant 0 \tag{1}$$

where Φ denotes the directional derivative of φ at (0,0). Then, following the properties of the derivative of φ at (0,0) we will find different types of yield criteria.

1. *φ is differentiable at* (0,0). Then Φ is linear, $\Phi(\alpha, \beta) = \sigma_c \alpha + \tau_c \beta$, and the yield criterion (1) becomes a criterion of both *maximal traction* and *maximal shear* which can read in terms of the principal stresses $\{\sigma_i\}_{i=1,3}$ at x_0 as:

$$\max_i \sigma_i \leqslant \sigma_c \quad \text{and} \quad \max_{i,j}(\sigma_i - \sigma_j) \leqslant \tau_c \tag{2}$$

2. *φ is not differentiable at* (0,0). When φ admits only directional derivatives at (0,0), then Φ is no more linear. By using Legendre transform, it appears that the criterion (1) is of intrinsic curve type, the maximal shear stress decreasing monotonically with the normal stress. It depends only on the extreme principal stresses σ_1 and σ_3 and reads as

$$|\sigma_3 - \sigma_1| + 2\Phi_\star\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \leqslant 0 \quad \text{with} \quad \Phi_\star(s) = \sup_{\omega \in [0, \pi/2]} \big\{s \cos\omega - \Phi(\cos\omega, \sin\omega)\big\} \tag{3}$$

It leads to a convex set in the stress space, with smooth boundary as an envelop of Mohr circles and unbounded in the direction of the hydrostatic pressures because of the non-interpenetrability condition (7).

1. Définition du critère d'amorçage

On considère une structure Ω, à N-dimensions, élastique fragile, ne comportant à l'instant initial aucune fissure et soumise à un chargement dépendant d'un paramètre t croissant depuis 0. On note u_t le champ de déplacement à l'équilibre de la structure *non fissurée* sous le chargement t. En se plaçant dans le cadre des petits déplacements et en supposant le potentiel élastique W fonction convexe du tenseur des déformations, en vertu du théorème de l'énergie potentielle, u_t est parmi les champs cinématiquement admissibles "non discontinus" celui qui possède la plus petite énergie potentielle. Autrement dit en notant $\varepsilon(v)$ les déformations linéarisées associées à v, $2\varepsilon(v) = \nabla v + \nabla v^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{E}_e$ la fonctionelle énergie élastique, f_t le potentiel des efforts extérieurs et $\mathcal{C}_t$ l'espace des déplacements admissibles « réguliers » à l'instant t, u_t vérifie

$$u_t \in \mathcal{C}_t, \quad \mathcal{E}_e(u_t) - f_t(u_t) \leqslant \mathcal{E}_e(v) - f_t(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}_t \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_e(v) = \int_{\Omega} W\big(x, \varepsilon(v)(x)\big)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Soit v un champ cinématiquement admissible non nécessairement régulier et $\mathcal{S}_v$ l'ensemble des points de $\overline{\Omega}$ où v est discontinu, on définit l'énergie de surface associée à ce champ v à partir de la donnée d'une fonction densité d'énergie de surface ϕ qui *a priori* dépend du saut de déplacement $[\![v]\!]$, du point matériel x si le milieu est inhomogène et de l'orientation de la surface de discontinuité par son vecteur normal unitaire ν :

$$\mathcal{E}_s(v) = \int_{\mathcal{S}_v} \phi\big(x, \nu(x), [\![v]\!](x)\big)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1}(x) \tag{5}$$

L'énergie totale de la structure dans un tel déplacement v est la somme de son énergie potentielle et de son énergie de surface, l'énergie élastique se calculant à partir de (4) à condition d'intégrer l'énergie de déformation uniquement sur la zone saine $\Omega \setminus \mathcal{S}_v$:

$$\mathcal{E}_t(v) = \mathcal{E}_e(v) + \mathcal{E}_s(v) - f_t(v) \tag{6}$$

L'ensemble des champs cinématiquement admissibles est noté $\mathcal{V}_t$, ce sont les champs qui respectent les conditions aux limites cinématiques (en un sens affaibli – seule la « trace externe » doit les vérifier – car les fissures peuvent apparaître aux encastrements) et dont le saut respecte la condition de non-interpénétrabilité des lèvres des fissures :

$$[\![v]\!] \cdot \nu \geqslant 0 \quad \text{sur } \mathcal{S}_v \tag{7}$$

Pour résoudre la question de l'amorçage d'une fissure dans la structure on utilise le critère énergétique suivant :

Condition de Stabilité. Au niveau de chargement t, la structure est en état d'équilibre élastique stable si u_t est un minimum relatif (au sens d'une norme à choisir) de l'énergie $\mathcal{E}_t$ sur $\mathcal{V}_t$. Formellement,

$$\exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad \mathcal{E}_t(u_t) \leqslant \mathcal{E}_t(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_t \quad \text{tel que} \quad \|v - u_t\| \leqslant r \tag{8}$$

Le choix de la norme et la précision du bon cadre mathématique sont des questions délicates qui dépassent le cadre de cette Note. Nous ne les aborderons pas et nous contenterons de raisonner de façon formelle. Le reste de la Note est consacrée à l'établissement de conditions *nécessaires* que doit remplir u_t (ou une de ses quantités dérivées) pour que la réponse élastique soit un état d'équilibre stable. On procède ainsi : (i) on envisage une suite de champs admissibles v_n présentant une discontinuité et « convergeant » (sous réserve du bon choix de la norme) vers u_t, (ii) on écrit la condition de stabilité, (iii) après passage à la limite on obtient des conditions nécessaires de stabilité (au premier ordre). Etant donné que seuls des déplacements discontinus sont susceptibles de déstabiliser la réponse élastique, ces conditions seront appelées *critère(s) d'amorçage*. Elles dépendent de façon essentielle de la forme de l'énergie de surface et l'on considèrera tour à tour les modèles de Griffith, de Barenblatt et de forces cohésives.

Rappelons que le premier à avoir remarqué, dans un cadre seulement unidimensionnel toutefois, que l'approche énergétique avec minimum relatif et énergie de Barenblatt fournissait un critère d'amorçage en contraintes est Del Piero [2]. Dans ce cadre unidimensionnel l'analyse de stabilité peut être conduite à son terme, contrairement à ici où on se limite à des conditions suffisantes d'amorçage, voir [1] pour les détails. Rappelons aussi que la recherche de minima absolus au lieu de minima relatifs peut conduire à des conditions d'amorçage totalement différentes. En particulier en unidimensionnel, cela conduit à des effets d'échelle non souhaités, aussi bien avec des énergies de type Griffith que de type Barenblatt, cf. [3] et [1].

2. Cas d'une énergie de surface de Griffith (Rappels)

Plaçons-nous en dimension 2 ($N = 2$) pour simplifier la présentation. En adoptant l'hypothèse de Griffith, la densité d'énergie de surface est indépendante du saut de déplacement sur la fissure (mais peut dépendre de l'orientation de celle-ci si le matériau est anisotrope) :

$$\phi(x, \nu, 0) = 0, \quad \phi\big(x, \nu, [\![v]\!]\big) = \phi(x, \nu) > 0 \quad \text{si} \quad [\![v]\!] \neq 0 \tag{9}$$

Considérons un point x_0 de $\overline{\Omega}$ et envisageons une suite de segments $S_n = [x_0, x_0 + \frac{1}{n} e_3 \wedge \nu]$, de normale ν et dont la longueur tend vers 0. Prenons pour champ de déplacement associé v_n celui assurant l'équilibre de la structure fissurée selon le segment S_n au niveau de chargement t. La condition de stabilité donne :

$$G_t(x_0, \nu) := \lim_{n \to \infty} n\big(\mathcal{E}_e(u_t) - f_t(u_t) - \mathcal{E}_e(v_n) + f_t(v_n)\big) \leqslant \phi(x_0, \nu) \tag{10}$$

$G_t(x_0, \nu)$ représentant le taux de restitution d'énergie potentielle de toute la structure dû à une fissure s'amorçant au point x_0 dans la direction ν, on reconnaît là le fameux critère de Griffith. Plus précisément, en envisageant tous les points matériels x_0 et toutes les directions ν d'amorçage, on obtient que la réponse élastique de la structure saine sous le chargement t est une position d'équilibre stable *seulement si* le critère de Griffith (i.e. l'inégalité (10)) est vérifiée *pour tout* x_0 et *pour tout* ν :

$$\boxed{u_t \text{ minimum relatif} \quad \Longrightarrow \quad G_t(x_0, \nu) \leqslant \phi(x_0, \nu), \quad \forall x_0,\ \forall \nu} \tag{11}$$

Notons que le critère est à vérifier en envisageant tous les points et toutes les directions d'amorçage. Il est en cela un critère *local*. Toutefois sa vérification passe par le calcul d'une quantité *globale*, le taux de restitution d'énergie.

Remarque 1. On n'a obtenu ainsi qu'une condition *nécessaire* de non amorçage. Cela tient à deux choses : (i) on n'a envisagé qu'une famille réduite de défauts naissants (des segments) et rien ne dit qu'un défaut d'une autre forme (multisegments, par exemple) ne pourraît conduire à une plus grande restitution d'énergie potentielle ; (ii) on n'a écrit que des conditions d'optimalité au premier ordre et (10) n'assure pas que u_t soit un mininimum relatif.

La contraposée fournit évidemment une condition *suffisante* d'amorçage, i.e. s'il existe x_0 et ν tels que $G_t(x_0, \nu) > \phi(x_0, \nu)$, alors nécessairement une fissure aura amorcée dans la structure à ce niveau de chargement. *Mais* rien ne permet d'affirmer à ce stade du raisonnement qu'elle amorcera au point x_0 et dans la direction ν.

Il reste à évaluer la restitution d'énergie due à un défaut naissant. On peut montrer, cf. [3], que $G_t(x_0, \nu) = 0$ dès lors que u_t ne possède pas de singularité *forte* en x_0, i.e. en r^α avec $\alpha \leqslant 1/2$ (r désignant la distance du point courant x à x_0). La présence de singularités fortes dans une structure saine étant exceptionnelle (on peut en trouver à la jonction d'interface et de conditions aux limites mixtes), on a donc obtenu le résultat négatif que, dans le cadre des hypothèses adoptées, l'amorçage est en général impossible dans une structure saine. Contrairement à une idée parfois répandue, ce résultat négatif n'est pas dû à l'approche énergétique en soi. En fait, comme on va le voir, sa principale cause est l'hypothèse de Griffith concernant l'énergie de surface.

3. Cas d'une énergie de surface de Barenblatt

On se place en dimension 3, $N=3$, et on considère un milieu homogène et isotrope (l'hypothèse d'homogénéité étant faite dans le seul but de simplifier les écritures). En abandonnant l'hypothèse simplificatrice de Griffith, la densité d'énergie de surface est désormais une fonction du saut de déplacement et de l'orientation de la fissure. Compte-tenu de l'hypothèse d'isotropie, elle peut se mettre sous la forme :

$$\phi(\nu,\delta)=\varphi\big(\delta\cdot\nu,\|\delta-\delta\cdot\nu\,\nu\|\big) \tag{12}$$

Il s'avère que l'application du critère de stabilité ne requiert que la connaissance de φ au voisinage de (0,0). Nous supposons que la fonction φ est positive, nulle en (0,0) et qu'elle y admet des dérivées directionnelles. La dérivée directionnelle $\Phi(\alpha,\beta)=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\varphi(h\alpha,h\beta))$ est de façon générale une fonction positivement homogène de degré 1 de (α,β), qui, dans le cas particulier où φ est dérivable en $(0,0)$, devient une fonction linéaire, i.e. $\Phi(\alpha,\beta)=\sigma_c\alpha+\tau_c\beta$.

Soient x_0 un point matériel de Ω, ν un vecteur unitaire, δ un vecteur tel que $\delta\cdot\nu\geqslant 0$ et η une fonction numérique régulière, positive, à support compact, valant 1 en 0. On envisage la suite de champs de déplacements admissibles discontinus suivante :

$$v_n=u_t+\frac{1}{n}w,\quad \text{avec}\quad w(x)=H\big((x-x_0)\cdot\nu\big)\eta\big(\|x-x_0\|\big)\delta \tag{13}$$

H désignant la fonction de Heaviside. En notant $P(x_0,\nu)=\{x\colon\ (x-x_0)\cdot\nu=0\}$, la condition de stabilité (8) donne

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{n\to\infty}n\big\{\mathcal{E}_t(v_n)-\mathcal{E}_t(u_t)\big\}\\&=\int\limits_{\Omega\setminus P(x_0,\nu)}\sigma_t\cdot\varepsilon(w)\,\mathrm{d}x-f_t(w)+\int\limits_{P(x_0,\nu)}\Phi\big([\![w]\!]\cdot\nu,\big\|[\![w]\!]-[\![w]\!]\cdot\nu\,\nu\big\|\big)\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{14}$$

$\sigma_t=W'(\varepsilon(u_t))$ désignant le champ des contraintes dans la structure en équilibre élastique sous le chargement t. En utilisant le fait que σ_t vérifie les équations d'équilibre et que Φ est positivement homogène de degré 1, il vient

$$0\leqslant\int\limits_{P(x_0,\nu)}\big(\Phi\big(\delta\cdot\nu,\|\delta-\delta\cdot\nu\,\nu\|\big)-\sigma_t(x)\nu\cdot\delta\big)\eta\big(\|x-x_0\|\big)\,\mathrm{d}S \tag{15}$$

Comme η est une fonction positive arbitraire, par un raisonnement classique de calcul des variations, on obtient

$$\sigma_t(x_0)\nu\cdot\delta\leqslant\Phi\big(\delta\cdot\nu,\|\delta-\delta\cdot\nu\,\nu\|\big) \tag{16}$$

Comme le point x_0, la direction ν et le vecteur δ ont été choisis arbitrairement, on a obtenu la condition nécessaire de stabilité de u_t suivante :

$$\boxed{u_t\ \text{minimum relatif}\quad\Longrightarrow\quad\sigma_t(x_0)\nu\cdot\delta\leqslant\Phi\big(\delta\cdot\nu,\|\delta-\delta\cdot\nu\,\nu\|\big),\quad\forall x_0,\forall\nu,\forall\delta,\delta\cdot\nu\geqslant 0} \tag{17}$$

En comparant à (11), on voit que l'abandon de l'hypothèse de Griffith au profit de celle de Barenblatt conduit à un critère d'amorçage en contraintes à la place du critère de Griffith. Le critère est devenu doublement local. Comme les contraintes élastiques sont proportionnelles au chargement t, on voit donc que, sauf cas exceptionnels de champs de contraintes purement hydrostatiques, il y aura toujours amorçage de la fissuration. On se retrouve même dans la situation inverse, puisque maintenant la moindre singularité, même faible, dans la réponse élastique conduit à un amorçage dès la mise en charge. Notons que pour que ce résultat soit parfaitement rigoureux d'un point de vue mathématique, il suffit de choisir une norme telle que le champ w soit de norme finie, la suite v_n étant alors assurée de converger vers u_t.

Analysons de façon plus approfondie le critère d'amorçage obtenu. Plaçons-nous en un point x_0 et à un niveau de chargement t. Notons simplement $\sigma=\sigma_t(x_0)$.

Cas d'une énergie dérivable. Considérons d'abord le cas où φ est dérivable en 0 et donc Φ est linéaire. L'inégalité (16) devient $\sigma\nu \cdot \delta \leqslant \sigma_c \delta \cdot \nu + \tau_c \|\delta - \delta \cdot \nu\ \nu\|$ et doit être vérifiée pour toute direction ν et tout saut δ de composante normale positive. On commence par montrer que ceci est équivalent à $\sigma\nu \cdot \nu \leqslant \sigma_c$ et $\sigma\nu \cdot \tau \leqslant \tau_c$ pour tout couple de vecteurs (ν, τ) unitaires et orthogonaux. On reconnaît là les critères de traction maximale et de cisaillement maximal qui en termes des contraintes principales σ_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, s'écrivent

$$\max_i \sigma_i \leqslant \sigma_c \quad \text{et} \quad \max_{i,j}(\sigma_i - \sigma_j) \leqslant 2\tau_c \tag{18}$$

la traction critique σ_c et le cisaillement critique τ_c étant caractéristiques du matériau situé au point x_0 où est évalué le critère.

Cas général. Revenons au cas général où φ admet seulement des dérivées directionnelles en $(0,0)$. En décomposant δ en ses composantes normale et tangentielle et grâce à l'homogénéité de Φ, on tire d'abord de (16) que, pour tout couple de vecteurs unitaires orthogonaux (ν, τ) :

$$|\sigma\nu \cdot \tau| \leqslant \Phi(\lambda, 1) - \lambda\sigma\nu \cdot \nu, \quad \forall\lambda \geqslant 0$$

d'où

$$|\sigma\nu \cdot \tau| \leqslant \inf_{\lambda \geqslant 0}\big\{\Phi(\lambda, 1) - \lambda\sigma\nu \cdot \nu\big\} = -\sup_{\lambda \geqslant 0}\big\{\lambda\sigma\nu \cdot \nu - \Phi(\lambda, 1)\big\} \equiv -\Phi^\star(\sigma\nu \cdot \nu) \tag{19}$$

$\Phi^\star$ étant la transformée de Legendre de la fonction $\lambda \mapsto \hat{\Phi}(\lambda)$ définie par : $\hat{\Phi}(\lambda) = \infty$, si $\lambda < 0$, $\hat{\Phi}(\lambda) = \Phi(\lambda, 1)$, sinon. Le domaine de définition de $\Phi^\star$ est $(-\infty, \sigma_c)$, $\sigma_c = \Phi(1, 0)$ représentant donc la traction maximale que peut supporter le matériau. L'inégalité (19) s'interprète dans le plan de Mohr $(\sigma\nu \cdot \nu, \sigma\nu \cdot \tau)$ comme une *courbe intrinsèque*, le cisaillement maximal dépendant de la contrainte normale exercée. Le cisaillement maximal décroît de $\tau_c = \Phi(0, 1)$ à 0 quand la contrainte normale croît de $-\infty$ à σ_c. A partir de cette courbe, on peut définir l'ensemble des contraintes supportables par le matériau comme l'enveloppe des grands cercles de Mohr tangents à la courbe intrinsèque. En termes des contraintes principales extrêmes, il s'écrit

$$|\sigma_3 - \sigma_1| + 2\Phi_\star\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \leqslant 0 \quad \text{avec} \quad \Phi_\star(s) = \sup_{\omega \in [0, \pi/2]}\big\{s\cos\omega - \Phi(\cos\omega, \sin\omega)\big\} \tag{20}$$

Il est convexe, à frontière régulière (sans point anguleux sauf éventuellement en $\sigma = \sigma_c\mathbf{I}$), non borné dans la direction des compressions hydrostatiques. La dissymétrie traction-compression obtenue est une conséquence de la condition (7) de non interpénétrabilité des lèvres des fissures.

Remarque 2. Cette approche énergétique tend à rejeter tous les modèles de type « forces cohésives » où la dérivée à l'origine de l'énergie de surface est nulle, puisqu'alors le critère d'amorçage interdit toute contrainte principale de traction dans la structure.

Références

[1] M. Charlotte, G. Francfort, J.-J. Marigo, L. Truskinovsky, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem: comparison of Griffith and Barenblatt surface energy models, in: A.B. Cachan (Ed.), Proceedings of the Symposium on "Continuous Damage and Fracture", 2000, in: The Data Science Library, Elsevier, Paris, 2000, pp. 7–12.

[2] G. Del Piero, One dimensional ductile-brittle transition, yielding, and structured deformations, in: P. Argoul, M. Frémond (Eds.), Proceedings of the IUTAM Symposium "Variations de domaines et frontières libres en mécanique", Paris, 1997, Kluwer Academic, 1999, pp. 197–202.

[3] G.A. Francfort, J.-J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, J. Mech. Phys. Solids 46 (8) (1998) 1319–1342.