



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mécanique 332 (2004) 665–672



# Stabilité de la forme de la goutte d'eau formée entre deux grains solides : méthode de résolution

Pierre Bérest, Erick N'dri, Laurent Malinsky

Laboratoire de mécanique des solides (LMS) et groupement d'intérêt public G3S, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 28 octobre 2003 ; accepté après révision le 27 janvier 2004

Disponible sur Internet le 1<sup>er</sup> juin 2004

Présenté par Jean Salençon

---

## Résumé

On discute le signe de la seconde variation d'une Action lagrangienne en présence d'une contrainte intégrale, lorsque les conditions d'extrémité ne sont pas fixées, dans le cas où le lagrangien ne dépend pas explicitement de la variable d'intégration. Les résultats sont illustrés par le problème d'une goutte de liquide s'appuyant sur deux grains symétriques. *Pour citer cet article : P. Bérest et al., C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Stability of the shape of a liquid drop placed between two solid grains: method of resolution.** We discuss the positiveness of the second variation of a Lagrangian Action subjected to an integral constraint when the end-points of the range of integration of the integrals can be displaced along prescribed curves. The Lagrangian does not depend explicitly on the variable of integration. The results are illustrated by the problem of a liquid drop placed between two solid grains. *To cite this article: P. Bérest et al., C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Instabilité ; Milieux granulaires

*Keywords:* Instability; Granular media

---

## Abridged English version

We consider the stability of the equilibrium shape of a liquid drop placed between two solid grains. This equilibrium problem was discussed for instance in [1,2]. Gravity forces are neglected; the free energy (1) of the system includes the air/liquid, air/solid, and solid/solid superficial energies;  $A$  is the surface tension and  $\theta$  is the (given) angle of contact. The volume  $V$  of the liquid drop is given, (2), and the end-points of the drop belong to the solid grains surface whose equation is  $r_i = r_i(z)$ , (3). This problem can be stated in a slightly more general form as follows: find the (weak) minimum value of the functional  $S$  defined by (4), subjected to the

---

Adresses e-mail : [berest@lms.polytechnique.fr](mailto:berest@lms.polytechnique.fr) (P. Bérest), [malinsky@g3s.polytechnique.fr](mailto:malinsky@g3s.polytechnique.fr) (L. Malinsky).

1631-0721/\$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/j.crme.2004.01.015

integral condition (5), when the end points  $A(a, \alpha)$  and  $B(b, \beta)$  of the range of integration of the integrals can be displaced along prescribed curves defined by (6). Such a problem was discussed by Bliss [3,4]. In this Note we take advantage of a property of the considered Lagrangian,  $L^*$ , to compute a solution which makes further numerical computations straightforward. The extremum conditions are provided by (7), where  $\lambda$ ,  $-v_a$ ,  $v_b$  are Lagrange multipliers associated with (5) and (6) respectively; we set  $E = L_{,y} - d/dx(L_{,y'})$ ,  $e = l_{,y'} - d/dx(l_{,y'})$ ,  $\bar{L} = L + \lambda l$ ,  $\bar{E} = E + \lambda e$ ,  $\bar{P} = \bar{L}_{,y'}$ ,  $\bar{H} = y' \bar{P} - \bar{L}$ ,  $\bar{v} = v + \lambda w$ ;  $(\delta y, \delta x)$  is a general variation and  $\bar{\delta} y = \delta y - y'(x) \delta x$ .

The five linear forms defined by (7), or  $\delta \bar{S}^* = 0$ , must vanish identically to zero, providing five conditions which, together with the relations (5) and (6), allow us to calculate a solution (10), called an 'extremal', of the system (4)–(6). Note that, taking into account  $\bar{L}_{,x} = 0$ , the first integral (9) can be used, instead of  $\bar{E} = 0$  resulting from (7). In the case of the liquid drop problem, the first integral is (11).

In order for the extremal to realize a (weak) minimum of the Action  $S$  under the specified constraints, the second variation (12) must be positive for any set of variations  $\{\bar{\delta} y = \bar{\delta} y(x), \delta a, \delta \alpha, \delta b, \delta \beta\}$  such that (13) and (8) be satisfied; we have set  $p^* = l_{,y'}$  and  $h^* = y^* p^* - l^*$ . A necessary condition is that the Legendre condition be satisfied; or  $\bar{L}_{,y'y'} \geq 0$ .

We deal first with the case  $\delta a = \delta \alpha = \delta b = \delta \beta = 0$  (the end-points are fixed). A condition for  $\bar{S}(y^*)$  to be a minimum is that for any  $c \in ]a, b]$  there exists no solution  $\bar{\delta} y = \bar{\delta} y(x)$  of (15), (16) (except of course  $\bar{\delta} y(x) = 0$ ) such that  $\bar{\delta} y(a) = \bar{\delta} y(c) = 0$ . In (15),  $\delta \lambda$  is a fourth Lagrange multiplier, associated to the integral constraint (13); the second-order differential operator  $\bar{J}^* = \bar{J}^*(\bar{\delta} y)$  is defined by (14). Two independent solutions of the differential equation  $\bar{J}^*(\bar{\delta} y) = 0$  are, on one hand,  $y^{*'} = y^{*'}(x)$ , and, on the other hand, the solution  $y^a = y^a(x)$  of the differential equation (17) that vanishes to zero when  $x = a$ ,  $y^a(a) = 0$ . Defining  $I = I(x)$  and  $M = M(x)$  by (18) allows us to express (19) the solution  $\bar{\delta} y = -y^c(x) \delta \lambda$  of (15), (16) such that  $\bar{\delta} y(a) = 0$ . When there exists no  $c \in ]a, b]$  such that  $y^c(c) = 0$ , the extremal realizes a weak minimum of the functional  $S$  when the end-points are fixed.

In the case of the liquid drop problem, Fig. 1 displays two examples of drop shape and the function  $r^b = r^b(z)$  which allows us to discuss drop stability when the two grains are spherical.

We consider now the more general case, when the end-points are no longer fixed. The relation (10) is used to express the Action as a function of the coordinates of the end-points,  $\bar{S}^* = \bar{S}^*(a, \alpha, b, \beta)$ . To any set of variations of the end-points  $\{\delta a, \delta \alpha, \delta b, \delta \beta\}$  is associated the variation  $\bar{\delta} y^* = \bar{\delta} y^*(x)$  that satisfies the differential equation (15) together with the integral constraint (13) and the conditions (20) ( $\delta \mu$  is the Lagrange multiplier associated to (13)). The solution of this problem can be written (21); the value of the multiplier  $\delta \mu$  is specified by (22). Now the second variation of the Action, considered as a function of the coordinates of the end-points, can be written (23), where  $\delta y \delta \bar{P}^* - \delta x \delta \bar{H}^*$  can be expressed according to (24). The relation (23), together with (22), (8) and (24), allows us to express the second variation as a function of the two independent variations  $\delta a$  and  $\delta b$ .

## 1. Introduction

Dans un milieu granulaire humide, la goutte d'eau qui se forme entre deux grains solides proches exerce entre ces grains une force d'attraction (parfois de répulsion) qui assure la cohésion du milieu. La forme d'équilibre de la goutte, et l'intensité de la force d'attraction, ont été discutées et mesurées expérimentalement (par exemple [1,2]). Ces analyses doivent être complétées par l'examen de la stabilité des formes d'équilibre obtenues, afin d'écarter les formes instables, ou de résoudre des problèmes d'évolution tels que l'effet d'un écartement progressif des deux grains, ou encore l'effet d'une variation du volume de la goutte d'eau. On ne peut présenter dans le cadre de cette Note la solution complète de ces problèmes, qui fera l'objet d'une publication ultérieure; on expose la méthode qui permet de les résoudre en l'illustrant par des exemples. Cette méthode consiste dans le calcul de la seconde variation de l'Action lagrangienne qui exprime l'énergie libre du système. Ce calcul contient deux difficultés techniques: la présence d'une contrainte intégrale, qui exprime la conservation du volume de la goutte; et la possibilité de déplacements, sur des courbes données, des extrémités de l'intervalle d'intégration de l'Action lagrangienne, qui tient à ce que la surface mouillée n'est pas connue a priori. Cette deuxième difficulté a fait l'objet

d'un traitement général par Bliss [3,4]; mais on utilise ici une particularité du problème posé, l'existence d'une intégrale première de l'équation d'Euler–Lagrange, pour donner à la solution une forme explicite qui se prête bien aux calculs numériques ultérieurs.

### 2. Position du problème

On considère le problème de la forme d'une goutte d'eau incompressible, de volume donné  $V_0$ , placée entre deux grains solides indéformables. On néglige les forces de pesanteur. L'énergie libre contient donc trois termes d'énergie superficielle, relatifs respectivement à l'interface eau/air, d'aire  $\Sigma$ , de constante de tension superficielle  $A$ ; à l'interface eau/grain, d'aire  $\Sigma_0$ , de constante  $B$ ; à l'interface air/grain, d'aire  $\Sigma_1$ , de constante  $D$ . Dans une position d'équilibre stable, l'énergie libre  $A\Sigma + B\Sigma_0 + D\Sigma_1$  est minimale à volume donné  $V - V_0$ . En fait  $\Sigma_0 + \Sigma_1$  est constant; on pose  $D - B = A \cos \theta$ . Pour obtenir une formulation explicite, on suppose que les grains (et la goutte) présentent une symétrie de révolution autour de l'axe  $Oz$ ;  $r_i = r_i(z)$ ,  $r_i = r_a$  ou  $r_b$ , est l'équation de la surface des grains,  $r_i = r_i(z)$  est nul entre les deux grains,  $r = r(z)$  est l'équation de la surface de la goutte,  $a \leq z \leq b$ , les valeurs de  $a$  et de  $b$  ne sont pas connues a priori :

$$\text{Min} \int_a^b 2\pi Ar \sqrt{1 + r'^2} dz - \sum_{i=a}^b \int_a^b 2\pi Ar_i \cos \theta \sqrt{1 + r_i'^2} dz \tag{1}$$

$$V - V_0 = \int_a^b \pi r^2 dz - \sum_{i=a}^b \int_a^b \pi r_i^2 dz - V_0 = 0 \tag{2}$$

$$r(a) = r_a(a), \quad r(b) = r_b(b) \tag{3}$$

Il est intéressant de poser ce problème de manière un peu plus générale sous la forme suivante :

On cherche le minimum (faible) de (4) soumis à la contrainte intégrale (5); les extrémités  $A(a, \alpha)$  et  $B(b, \beta)$  de la courbe cherchée sont assujetties à appartenir à des courbes données (6) :

$$\min S[y(x); a, \alpha, b, \beta] = v(b) - v(a) + \int_a^b L[y(x), y'(x)] dx \tag{4}$$

$$w(b) - w(a) + \int_a^b l[y(x), y'(x)] dx - w_0 = 0 \tag{5}$$

$$y(a) = \alpha = \varphi_a(a), \quad y(b) = \beta = \varphi_b(b) \tag{6}$$

où les inconnues sont la fonction  $y = y(x)$  et les positions  $\{a, \alpha, b, \beta\}$  des extrémités  $A$  et  $B$ ; les fonctions  $L = L(y, y')$  et  $l = l(y, y')$  sont de classe  $C^3$ , et les fonctions  $y = y(x)$ ,  $v = v(x)$ ,  $w = w(x)$ ,  $\varphi_i = \varphi_i(x)$  sont de classe  $C^2$ .

On suppose dans toute la suite que la constante  $w_0$  est fixée. Comme il est usuel dans le calcul des variations, on ne mentionne pas toujours les variables dont dépend une fonction, par exemple  $L = L(y, y', x)$  n'est pas explicitement distinguée de  $L(x) = L[y(x), y'(x), x]$ ;  $w_0$  est à la fois une constante et la fonctionnelle  $w_0 = w_0[y(x); a, \alpha, b, \beta]$ , etc.

### 3. Conditions d'équilibre

Les conditions d'équilibre (ou conditions d'extremum du système (4)–(6)) sont classiques, on les rappelle pour définir des notations utiles pour la suite.

On introduit des multiplicateurs de Lagrange notés  $\lambda, -v_a, v_b$ , respectivement associés à la contrainte intégrale (5) et aux contraintes (6) portant sur les extrémités A et B. On note :  $H = y' L_{,y'} - L$ ,  $P = L_{,y'}$ ,  $h = y' l_{,y'} - l$ ,  $p = l_{,y'}$ , les hamiltoniens et les impulsions associés aux lagrangiens  $L = L(y, y')$  et  $l = l(y, y')$ ;  $\bar{S} = S + \lambda w_0$ ,  $\bar{L} = L + \lambda l$ ,  $\bar{H} = H + \lambda l$ ,  $\bar{P} = P + \lambda p$ , sont respectivement l'Action, le lagrangien, le hamiltonien, l'impulsion associés à l'Action complétée (Action initiale  $S$  à laquelle on a ajouté la contrainte intégrale  $w_0$  avec son multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ ) et on note de même  $\bar{v} = v + \lambda w$ . Enfin on note  $E = L_{,y} - d/dx(L_{,y'})$ ,  $e = l_{,y} - d/dx(l_{,y'})$  les opérateurs différentiels d'Euler-Lagrange et  $\bar{E} = E + \lambda e$ . Les symboles  $\delta x$ ,  $\delta y$  désignent les composantes d'une variation générale et on note  $\bar{\delta} y = \delta y - y'(x)\delta x$ ,  $\bar{\delta} H = \delta H - H'(x)\delta x$  etc.

Les conditions d'équilibre (ou conditions d'extremum), qui complètent les Éqs. (5) et (6), s'écrivent :

$$\bar{\delta} S(\bar{\delta} y(x), \delta a, \delta \alpha, \delta b, \delta \beta) = \int_a^b \bar{E} \bar{\delta} y \, dx + [\bar{P}(x)\delta y - \bar{H}(x)\delta x + \bar{v}'(x)\delta x + v_i(\delta y - \varphi'_i(x)\delta x)]_a^b = 0 \quad (7)$$

$$\delta y(a) = \delta \alpha = \varphi'_a(a)\delta a, \quad \delta y(b) = \delta \beta = \varphi'_b(b)\delta b \quad (8)$$

où  $i$  vaut  $a$  ou  $b$  suivant la borne considérée.

En utilisant la condition de nullité des cinq formes linéaires en  $\bar{\delta} y(x)$ ,  $\delta a$ ,  $\delta \alpha$ ,  $\delta b$ ,  $\delta \beta$  apparaissant dans (7), et la contrainte intégrale (5), on peut exprimer au moyen d'une quadrature la solution de (4)–(6).

Toutefois, compte tenu de la propriété  $\bar{L}_{,x} = 0$ , il est commode de remplacer la condition de nullité de la première forme, soit  $\bar{E} = 0$ , par l'intégrale première :

$$\bar{H}(x) = C \quad (9)$$

De sorte que la solution s'écrit  $y^* = y^*(x - x_0, C)$ , où les constantes  $x_0$  et  $C$  peuvent être calculées en fonction des coordonnées des extrémités A et B. Une telle solution est dite « extrémale », et on la marque dans la suite par un astérisque :

$$y^* = y^*(x; a, \alpha, b, \beta) \quad (10)$$

Pour le problème de la goutte d'eau (1)–(3), on retrouve la forme générale du problème initial en posant  $L(r, r') = 2\pi A r \sqrt{1 + r'^2}$ ,  $v'(z) = -2\pi A \cos \theta r_i(z) \sqrt{1 + r_i(z)'^2}$ ,  $l(r, r') = \pi r^2$ ,  $w'(z) = -\pi r_i^2(z)$ . On note  $\lambda = -\bar{p}$  le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte intégrale,  $\bar{p}$  peut être interprété comme la pression de l'eau dans la goutte. L'intégrale première (9) du problème général s'écrit :

$$2\pi A \frac{r}{\sqrt{1 + r'^2}} - \bar{p}\pi r = -F \quad (11)$$

où la constante  $F$  est la force exercée par la partie  $z > z_0$  sur la partie  $z < z_0$ . Les autres conditions d'équilibre (conditions de transversalité) contenues dans (7) expriment qu'aux points de contact goutte/grain l'angle de la goutte avec la tangente aux grains est  $\theta$ .

#### 4. Conditions de stabilité de l'équilibre

Pour examiner si l'extrémale  $y^* = y^*(x)$  réalise un minimum (faible), on étudie la seconde variation (12) de l'Action, sous la contrainte (13) obtenue en variant la contrainte intégrale (5), et avec les conditions (8) résultant de la variation des conditions d'extrémité :

$$\delta^2 \bar{S}^*(\bar{\delta} y(x), \delta a, \delta \alpha, \delta b, \delta \beta) = \int_a^b \bar{J}^*(\bar{\delta} y) \bar{\delta} y \, dx + [\delta \bar{P}^*(x)\delta y - \delta \bar{H}^*(x)\delta x + (\bar{v}''(x) - v_i \varphi''_i(x))\delta x \delta x]_a^b \quad (12)$$

$$\delta w_0(b) = \int_a^b e^* \bar{\delta}y \, dx + [p^*(x)\delta y - h^*(x)\delta x + w'(x)\delta x]_a^b = 0 \tag{13}$$

où la définition de l'opérateur de Jacobi  $\bar{J}^* = \bar{J}^*(\bar{\delta}y)$  sera rappelée plus loin. On a marqué la dépendance de  $\delta w_0$  par rapport à la borne supérieure d'intégration  $b$ , soit  $\delta w_0 = \delta w_0(b)$ , pour des raisons qui apparaîtront à la Section 4.1. Il faut alors vérifier la condition de Legendre  $\bar{L}_{y'y'}^*(x) \geq 0$ ; puis on examine la positivité de la seconde variation lorsque les extrémités sont fixées (condition de Jacobi); enfin, considérant les extrémités comme variables, on élimine dans (12) et (13) la variable  $y^* = y^*(x; a, \alpha, b, \beta)$  et on calcule la seconde variation de l'Action fonction des coordonnées, qui doit être une forme quadratique définie positive des variables  $\delta a$  et  $\delta b$ . Cette procédure est classique, voir par exemple [5], mais on montrera dans cette note que l'existence de l'intégrale première (9) permet d'exprimer explicitement les solutions de l'équation de Jacobi.

#### 4.1. Équation de Jacobi

Dans ce paragraphe et le paragraphe suivant les extrémités  $A$  et  $B$  sont fixes,  $\delta a = \delta b = \delta \alpha = \delta \beta = 0$ . On a introduit l'opérateur différentiel de Jacobi :

$$\bar{J}^*(\bar{\delta}y) = \bar{L}_{,yy}^* \bar{\delta}y + \bar{L}_{,yy'}^* \bar{\delta}y' - \frac{d}{dx} (\bar{L}_{,y'y}^* \bar{\delta}y + \bar{L}_{,y'y'}^* \bar{\delta}y') \tag{14}$$

qui permet de définir l'équation différentielle de Jacobi (15), obtenue en écrivant l'équation d'Euler-Lagrange de l'Action  $\delta^2 \bar{S}^* = \delta^2 \bar{S}^*(\bar{\delta}y)$ , fonctionnelle définie par (12) de la fonction  $\bar{\delta}y$ , sous la contrainte (13) à laquelle on associe un nouveau multiplicateur  $\delta \lambda$ ; la contrainte (13) est réécrite sous la forme (16) avec une borne supérieure d'intégration  $c \in ]a, b]$  :

$$\bar{J}^*(\bar{\delta}y) = \bar{J}^*(\bar{\delta}y) + \delta \lambda e^* = 0 \tag{15}$$

$$\delta w_0(c) = \int_a^c e^* \bar{\delta}y \, dx = 0 \tag{16}$$

Le développement des calculs conduit à s'intéresser aux solutions de l'équation différentielle (15) sans second membre ( $\bar{J}^*(\bar{\delta}y) = 0$ ). Du fait que le lagrangien  $\bar{L} = \bar{L}(y, y')$  ne dépend pas explicitement de  $x$  ( $\bar{L}_{,x} = 0$ ), une solution particulière est la dérivée  $y^{*'} = y^{*'}(x)$ .

On peut alors si  $y^{*'}(a) \neq 0$  prendre pour deuxième solution indépendante de (15) sans second membre la solution  $y^a = y^a(x)$  nulle en  $x = a$  de l'équation différentielle :

$$\bar{L}_{,y'y'}^*(x) [y^{*'}(x)y^{a'}(x) - y^{*''}(x)y^a(x)] = 1, \quad y^a(a) = 0 \tag{17}$$

Les deux solutions trouvées, qui constituent une base de l'espace des solutions de l'Éq. (15) sans second membre, ne sont autres que les dérivées de la solution générale de l'intégrale première (9) par rapport aux constantes  $x_0$  et  $C$  respectivement. On note alors :

$$I(x) = \int_a^x y^a(\xi) e^*(\xi) \, d\xi, \quad M(x) = \int_a^x I(\xi) y^{*'}(\xi) e^*(\xi) \, d\xi \tag{18}$$

#### 4.2. Stabilité de la forme d'équilibre lorsque les extrémités sont fixées

Pour examiner la stabilité lorsque les extrémités sont fixées, on cherche d'abord la solution de l'équation différentielle (15) qui soit nulle en  $x = a$  et qui vérifie la contrainte (16). Cette solution, proportionnelle à  $\delta\lambda$ , s'écrit :

$$\bar{\delta}y(x) = \delta\lambda y^c(x) = -\delta\lambda \left[ y^{*'}(x)I(x) + y^a(x) \left\{ h^*(x) - h^*(c) - 2\frac{M(c)}{I(c)} \right\} \right] \quad (19)$$

S'il n'existe pas dans l'intervalle  $]a, b]$  de point conjugué de  $a$ , c'est-à-dire de point  $c$  tel que  $y^c(c) = 0$ , l'extrémale  $y^* = y^*(x)$  réalise un équilibre stable de la forme de la goutte, à extrémités fixées. Dans la pratique on fait croître  $c$  de la valeur  $a$  à la valeur  $b$  en vérifiant pour chaque valeur de  $c$  que  $y^c(c) \neq 0$  et notamment que  $y^b(b) \neq 0$ . Dans le problème de la goutte d'eau on calcule numériquement la forme d'équilibre  $r^* = r^*(z)$  grâce à (11) et  $r^a = r^a(z)$  grâce à (17); on a  $e^* = 2\pi r^*$  et  $h^* = l^*$ , puis on calcule  $r^c = r^c(z)$  grâce à (18) et (19). A titre d'exemple on a donné sur la Fig. 1, pour deux couples distincts de taille des grains, l'allure de la fonction  $r^b = r^b(z)$  – soit  $y^b = y^b(x)$  dans la théorie générale – avec un cas stable (a) sans point conjugué et un cas instable (b) avec point conjugué.

#### 4.3. Stabilité vis-à-vis de la position des extrémités A et B

Dans cette partie les extrémités A et B sont variables. On reporte dans l'expression de l'Action, soit  $\bar{S} = \bar{S}(y(x); a, \alpha, b, \beta)$ , l'expression (10) de l'extrémale  $y^* = y^*(x; a, \alpha, b, \beta)$ . On suppose que cette extrémale réalise un équilibre stable vis-à-vis de la forme de la goutte; notamment  $y^b(b) \neq 0$ . L'Action devient une fonction des seules coordonnées,  $\bar{S}^* = \bar{S}^*(a, \alpha, b, \beta)$ . A une variation générale  $(\delta a, \delta\alpha, \delta b, \delta\beta)$  est associée une variation de

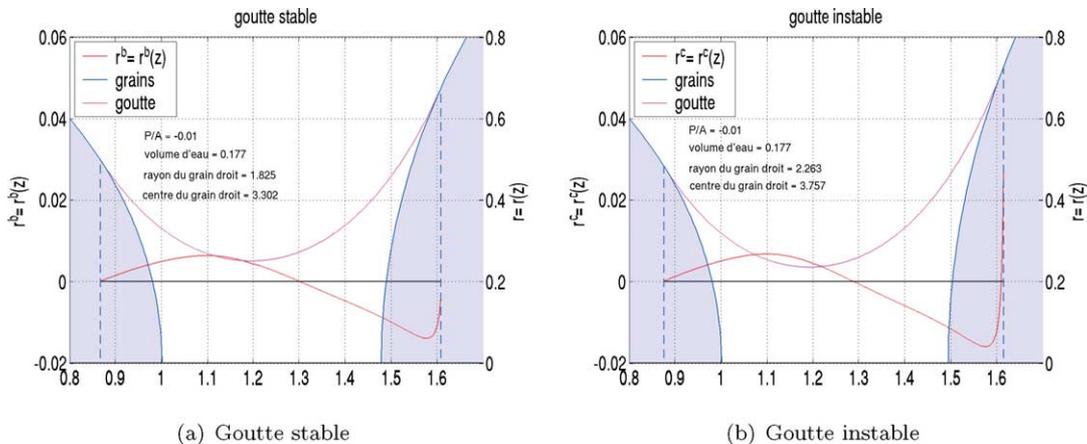


Fig. 1. On a tracé la forme de gouttes de liquide placées entre deux grains sphériques (inégaux). L'angle de mouillage est nul. Le rayon du grain de gauche est égal à l'unité. Les abscisses sont comptées depuis le centre du grain de gauche. La forme  $r = r(z)$  de la méridienne de la goutte est repérée par l'échelle des ordonnées de droite. On a tracé sur la même figure (échelle des ordonnées de gauche) la fonction  $r^b = r^b(z)$ , nulle en l'abscisse du point de contact goutte/grain de gauche, qui permet d'examiner la stabilité de la forme de la goutte. La forme sur le dessin de la figure (a) est stable; sur le dessin de la figure (b), on peut manifestement trouver un point  $c$  de l'intervalle  $[a, b]$  pour lequel la fonction  $r^c = r^c(z)$  s'annulerait, de sorte que la forme est instable.

Fig. 1. The figure shows the shape of liquid drops placed between two spherical solid grains. The angle of contact is zero. The radius of the left-hand side grain is 1. The origin of the abscissas is at the centre of this grain. The radius  $r = r(z)$  of the drop is provided by the right-hand side ordinates. On the same figure (left-hand side ordinates) is drawn the function  $r^b = r^b(z)$ , which vanishes at the left-hand side interface between grain/drop interface. This function allows to discuss the stability of the drop shape. On the picture of the figure(a), the shape is stable; on the picture of the figure (b), a point  $c$  belonging to  $[a, b]$  such that  $r^c = r^c(z)$  vanishes to zero can be found: the drop shape is unstable.

l'extrémale notée  $\bar{\delta}y^* = \bar{\delta}y^*(x)$  qui vérifie l'équation différentielle (15) et la contrainte intégrale (13) pour laquelle on note  $\delta\mu$  le multiplicateur de Lagrange, afin de le distinguer du multiplicateur  $\delta\lambda$  associé au problème de la Section 4.2 ; enfin cette variation doit vérifier les conditions d'extrémité :

$$\bar{\delta}y^*(a) = \bar{\delta}\alpha = \delta\alpha - y^{*'}(a)\delta a, \quad \bar{\delta}y^*(b) = \bar{\delta}\beta = \delta\beta - y^{*'}(b)\delta b \tag{20}$$

La solution de ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}y^*(x) = & \bar{\delta}\alpha \frac{y^{*'}(x)}{y^{*'}(a)} + \frac{y^a(x)}{y^a(b)} \left( \bar{\delta}\beta - \bar{\delta}\alpha \frac{y^{*'}(b)}{y^{*'}(a)} + \delta\mu y^{*'}(b)I(b) \right) \\ & - \delta\mu [y^{*'}(x)I(x) + y^a(x)(h^*(x) - h^*(b))] \end{aligned} \tag{21}$$

où la valeur de  $\delta\mu$  est précisée par la relation (22) obtenue en écrivant que la solution (21) vérifie la contrainte intégrale (13) :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\bar{\delta}\alpha}{y^{*'}(a)} [h^*(a) - h^*(b)] + \frac{I(b)}{y^a(b)} \left[ \bar{\delta}\beta - \bar{\delta}\alpha \frac{y^{*'}(b)}{y^{*'}(a)} - \delta\mu y^b(b) \right] \\ & + [p^*(x)\delta y - h^*(x)\delta x + w'(x)\delta x]_a^b \end{aligned} \tag{22}$$

De sorte que la condition de positivité de la deuxième variation fonction des coordonnées s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta^2\bar{S}^* + \delta\mu \delta w_0 = & [\delta y \delta \bar{P}^*(x) - \delta x \delta \bar{H}^*(x) + (\bar{v}''(x) - v_i \varphi_i''(x))\delta x \delta x]_a^b \\ & + \delta\mu [p^*(x)\delta y - h^*(x)\delta x + w'(x)\delta x]_a^b > 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Le lagrangien  $\bar{L} = \bar{L}(y, y')$  ne dépendant pas explicitement de  $x$ , on peut écrire les premiers termes du membre de droite de l'égalité (23) au moyen d'une relation analogue à celle proposée dans [6] :

$$\delta y \delta \bar{P}^*(x) - \delta x \delta \bar{H}^*(x) = \frac{\bar{\delta}y(x)}{y^{*'}(x)y^a(b)} \left( \bar{\delta}\beta - \bar{\delta}\alpha \frac{y^{*'}(b)}{y^{*'}(a)} + \delta\mu y^{*'}(b)I(b) \right) + \frac{\bar{L}_{,y}^*(x)\delta y(x)\delta y(x)}{y^{*'}(x)} \tag{24}$$

La relation (23), compte tenu de la valeur de  $\delta\mu$  donnée par (22) et des relations (8) et (24), permet d'exprimer la variation seconde de l'Action comme une forme quadratique des seules variables  $\delta a$  et  $\delta b$  et de discuter sa positivité. Dans le problème de la goutte les formules précédentes se simplifient notablement du fait que  $p^*(x) = 0$  et que  $h(x) = w'(x)$  pour  $x = a$  ou  $b$ .

### 5. Conclusion

L'existence d'une intégrale première associée à la forme particulière du lagrangien considéré, qui ne dépend pas explicitement de la variable d'intégration, permet de donner une solution explicite au problème du signe de la seconde variation de l'Action quand les extrémités du domaine d'intégration sont assujetties à appartenir à des courbes données. Cette propriété permet, en comparaison de la méthode classique de Bliss [3,4], d'utiliser des solutions de l'équation différentielle de Jacobi pour lesquelles les conditions initiales sont du type de Cauchy, ce qui facilite considérablement les applications numériques. On dispose ainsi d'une technique qui permet de traiter le problème de la stabilité de la goutte d'eau placée entre deux grains, problème important pour la mécanique des milieux poreux ; un premier exemple d'illustration a été donné.

### Références

[1] T. Gillespie, W.J. Settineri, The effect of capillary liquid on the force of adhesion between spherical particles, *J. Colloid Interface Sci.* 24 (1967) 199.

- [2] O. Pitois, Assemblées de grains lubrifiés : élaboration d'un système modèle expérimental et étude de la loi de contact, Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1999, 221 p.
- [3] H. Sagan, Introduction to the Calculus of Variations, in: Internat. Ser. Pure Appl. Math., Mc Graw-Hill, 1969.
- [4] C. Fox, An Introduction to the Calculus of Variations, Dover, New York, 1987.
- [5] P. Bérest, Calcul des Variations, Ellipses, Paris, 1997.
- [6] P. Bérest, E. Bourgeois, L.P. Pelé, Dérivée seconde de l'Action fonction des coordonnées, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II 314 (1992) 547–552.