



Microgravité et Transferts/Solidification, Croissance

Quelques paramètres de contrôle de la convection thermocapillaire en croissance par fusion de zone en microgravité

Rachid Bennacer^{a,*}, Mohammed El Ganaoui^b, Elalami Semma^b

^a LEEVAM 5, mail Gay Lussac, Neuville sur Oise, 95031 Cergy-Pontoise cedex, France

^b SPCTS, UMR CNRS 6638, Université de Limoges, 123, Albert Thomas, 87060 Limoges, France

Disponible sur Internet le 12 avril 2004

Résumé

La transition de phase solide/liquide en croissance cristalline par fusion de zone connue dans la littérature sous la dénomination zone flottante est analysée dans des conditions de microgravité. Le contrôle de cette configuration à travers les conditions de chauffage et de tirage du cristal est étudié. La difficulté liée à la présence de transition de phase est surmontée par une formulation de type enthalpie–porosité. La distribution spatiale du flux imposé à la surface libre affecte d'une manière significative l'hydrodynamique du système ainsi que la position et la forme de l'interface solide/liquide. L'accroissement de la densité de flux réduit le temps de réponse lié à l'apparition de la phase liquide. L'écoulement au voisinage du point singulier dépend davantage de la densité d'énergie que de sa distribution. *Pour citer cet article : R. Bennacer et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Some control parameters for Floating Zone growth under μg conditions. The solid/liquid transition during crystal growth by a floating zone technique is analysed under microgravity conditions. The control of this technique by considering heating conditions and pulling velocity is studied. The difficulty attached to the phase change transition is surmounted by the use of an enthalpy–porosity formulation. The spatial distribution of the applied heating at the free surface strongly affects the dynamics of the system, the shape and position of the interface. The increase in the energy density reduces the response time of the fluid phase appearance in the transient regime. The flow near the singularity line depends more on the total energy than on the flux distribution. *To cite this article: R. Bennacer et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Transferts thermiques ; Convection thermocapillaire ; Zone Flottante ; Microgravité ; Changement de phase

Keywords: Heat transfer; Thermocapillary convection; Floating Zone; Microgravity; Phase change

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : rachid.bennacer@iupgc.u-cergy.fr (R. Bennacer).

Abridged English version

The investigation of solidification and melting processes in low gravity conditions is of great practical importance for crystal growth techniques. The quality of single crystals grown from the melt strongly depends on growth morphology in the solid caused by convective heat and mass transfer effects. Convection can occur because of buoyancy or a surface tension gradient along the free surface. The motion induced by these surface effects is known as Marangoni or thermocapillary convection.

The float zone technique, especially when used under microgravity conditions, offers an interesting experimental means to elaborate a high purity single crystal. In this technique, a fluid zone is held, by surface tension, between two solid regions. It has the advantage of eliminating possible contamination through contact with a container. In zero gravity, the liquid region is the seat of thermocapillary flow. These motions play a primordial role in the processes of crystal growth and can significantly affect the thermal and the internal hydrodynamics of the system. These complex interactions, between convection and solidification, affect the quality of the product obtained [1].

Numerical simulations of the transport phenomena, under a 1 g or μ g environment, for fluid systems in float zone crystal growth process have been performed by several authors [2–5,7–10]. It is shown that the transport phenomena might be significantly different for low and high Prandtl numbers. Previous works [3–7] analysed the effects of thermocapillary convection for the restricted configuration of the fluid phase. It has been observed experimentally and confirmed numerically that above a critical Marangoni number Ma , the thermocapillary convection in a floating zone undergoes a transition from steady to oscillatory convection. The basic mechanisms responsible for the onset of oscillatory Marangoni convection are still unclear, and the detailed flux structures during the transition need to be fully understood.

In the present study, numerical computations were performed to extend the investigation of heating effect conditions on the transient problem [10] of the phase change within two bars in a full floating zone configuration (Fig. 1). The model couples liquid bridge and phase change. Some effects of the latent heat are investigated. Control by the pulling velocity is also considered. The method is based on an enthalpy formulation, successfully used for directional solidification involving an unsteady melt [11,12]. Polynomial and Gaussian distributions are used for heating the free surface (Fig. 1). It is found that the applied flux distribution has an important effect on the hydrodynamic and temperature fields (Fig. 2). The flow near the solidification front depends more on the flux shape in the coupled problem, than in the simplified one (one phase). The phase change interface depends strongly on the applied flux shape. At the start of melting, the system is dominated by a conductive regime and the solidification front is concave. With time evolution the effect of thermocapillary convection becomes more important, and drag a continuous distortion of the interface that evolves into a quasi-convex shape. The pulling velocity, taken into account by using the Peclet number, has a significant effect. Fig. 5 shows the liquid volume reduction for ($Pe = 0, 0.1$ and 0.5), which breaks the flow symmetry and favours the regularity of the temperature field in the vicinity of the monocrystal (Fig. 5(a)).

This study explains the internal behaviour of the melt. Effects of the heating profile and the pulling velocity interacting with the fluid flow regime and the establishment of the interface equilibrium are analysed.

1. Introduction

La technique de la zone flottante (FZ) lorsqu'elle est utilisée dans des conditions de microgravité offre un moyen expérimental très performant pour élaborer des solides monocristallins de très bonne qualité [1]. Ces conditions gravitationnelles permettent également l'étude des phénomènes de base en s'affranchissant des forces de volumes perturbatrices dues à la pesanteur. Dans cette technique, une zone fluide obtenue par fusion est maintenue en place par sa propre tension superficielle entre deux solides ce qui permet d'éviter les impuretés introduites par un conteneur. En absence de gravité, la zone liquide est le siège d'un écoulement d'origine thermocapillaire dû à la variation de la tension superficielle produite par le gradient de température à la surface libre (liquide–gaz). Ces

mouvements jouent un rôle fondamental dans ces procédés de croissance cristalline et affectent considérablement le champ thermique et l'hydrodynamique interne du système et ainsi la qualité du solide obtenu [1].

Les écoulements dans des conditions de microgravité notamment appliquées au processus de croissance cristalline ont été largement étudiés par simulation numérique [2–5,7–10]. Une analyse de l'effet de la thermocapillarité pour différentes configurations simplifiées (monophasiques) figure dans [2,5]. Il a été observé expérimentalement et confirmé numériquement que le régime d'écoulement devient instable et oscillant à partir d'une valeur critique du nombre de Marangoni (Ma). Cette valeur dépend entre-autre de la forme de la surface libre [3–7].

Le présent article présente l'étude numérique de l'effet des conditions de chauffage sur le problème transitoire avec prise en compte du couplage, de l'écoulement et du changement de phase. En effet, le flux thermique imposé aux frontières libres détermine le gradient axial de température qui est la cause de l'écoulement. Par conséquent, le choix du type de la distribution du flux peut contrôler la stabilité ainsi que la cinétique de transition de phase. La cinétique du système et la mise en place du régime permanent (ou pseudo permanent) dépendent fortement du nombre de Stefan. Le régime établi s'installe après une succession de durées caractéristiques relatives à différents phénomènes mis en jeu. Lors du processus, le couplage entre la chaleur latente et le tirage joue un rôle fondamental dans la détermination de la forme du front de solidification.

2. Modèle

On considère le barreau cylindrique, représenté sur la Fig. 1, auquel on applique un flux thermique axial permanent. La zone fondue obtenue est maintenue en place par sa propre tension superficielle. Le flux thermique imposé, représentant un chauffage annulaire par induction, est évalué à l'aide de l'expression $Q(z) = Q_0 q(z)$, où Q_0 est choisi comme étant la valeur maximale pour la distribution polynomiale et servira dans l'adimensionnement du problème. Les différentes distributions $q(z)$ considérées sont polynomiales ou Gaussiennes (Fig. 1(b)). Ces distributions permettent un accroissement de la densité de flux au centre de la surface du bain ($z = 1,5$) tout en maintenant la même puissance totale ($\Phi = 8/15 Q_0$). Les parois horizontales sont supposées isothermes et maintenues à la température froide T_0 ($z = 0$ et $z = 3$). La configuration est placée dans des conditions de microgravité ($g = 0$) et l'interface liquide/gaz est supposée plane et non déformable.

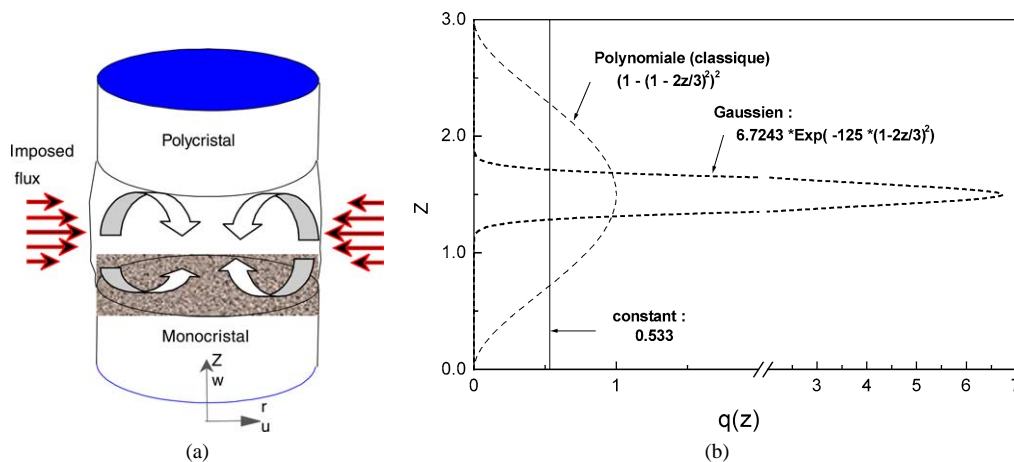


Fig. 1. (a) Configuration géométrique simplifiée de la zone flottante et (b) profils des flux de chauffage à puissance totale identique.

Fig. 1. (a) Simplified floating zone configuration and (b) heating flux profiles having the same total energy.

La méthode enthalpique [11,12] est utilisée ici pour traiter d'une façon homogène la présence des deux phases solide et liquide. La tension superficielle est supposée varier linéairement avec la température :

$$\sigma = \sigma_0(1 - \gamma(T - T_F)) \quad (1)$$

où σ_0 est la tension superficielle à la température de fusion T_F et $\gamma = -(1/\sigma_0)(\partial\sigma/\partial T)_{T=T_F}$ le coefficient thermique de la tension superficielle. Le modèle mathématique conduit à un système d'équations pour la formulation de type enthalpie-porosité [11].

Le système est réduit en utilisant le temps de diffusion thermique $t_{\text{réf}} = R^2/\alpha$, le rayon R de la cavité ainsi que l'écart de température basé sur la puissance de chauffage $\Delta T = Q_0 R/k$ comme échelles caractéristiques. Les nombres adimensionnels résultants sont le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\alpha$ caractéristique du matériau, de Marangoni $Ma = -\gamma \Delta T R/\mu\alpha$ pour quantifier les effets thermocapillaires, de Peclet $Pe = V_t H/\alpha$ pour quantifier le tirage (la vitesse est V_t dirigée selon l'axe du barreau vers le monocristal) et le nombre de Stefan $Ste = C_p \Delta T/L_f$ pour introduire les effets de la chaleur latente (C_p étant la chaleur spécifique et L_f la chaleur latente de changement de phase).

La résolution numérique du système d'équations est effectuée par une méthode de type volumes finis utilisant un schéma d'Euler implicite d'ordre deux pour la discrétisation temporelle. La présence de forts gradients et de zones de singularité (solide–liquide–gaz) dans la solution est surmontée en utilisant un schéma de type ultimate qui associe à un schéma convectif décentré quadratique une stratégie de limitation de flux [13]. La résolution du couplage vitesse–pression est assurée par l'algorithme simplec [14] et les systèmes linéaires résultants sont résolus par l'algorithme de Thomas (tdma pour les matrices tri-diagonales) [10,12].

3. Résultats et discussion

Les simulations présentées correspondent à une configuration axisymétrique de rapport de forme $A = 3$, contenant un matériau caractérisé à l'état liquide par un Prandtl $Pr = 1$. L'effet du nombre de Prandtl sur l'existence et la condition de transition instationnaire est détaillé dans [7]. L'effet du chauffage est étudié pour les profils représentés dans la Fig. 1(b). L'influence de la chaleur latente est analysée pour ($0 \leq Ste^{-1} \leq 1$). La vitesse de tirage est prise dans la gamme ($0 \leq Pe \leq 0,5$). Ces conditions correspondent à des situations réalistes de matériaux utilisés expérimentalement en croissance par FZ (KCl, NaNO₃, Acétone, . . .). Au début des simulations, le matériau est supposé à l'état solide et porté à la température froide adimensionnelle $T_0 = -0,5$.

Le développement de l'écoulement et la transition de phase sont liés aussi à la nature du matériau. On focalisera l'étude sur les principaux paramètres de contrôle externes : le profil de chauffage et la vitesse de tirage.

La Fig. 2 présente les champs dynamique et thermique pour les deux distributions extrême de flux imposées (constant et Gaussien). Pour l'ensemble des profils considérés, les lignes de courant mettent en évidence l'existence de deux cellules contrarotatives. L'écoulement suit la direction opposée au gradient de température à la surface du bain orienté de la zone centrale vers la périphérie. L'augmentation de la densité du flux thermique intensifie l'écoulement et développe un régime fortement convectif, ce qui se manifeste par la migration des deux cellules vers le centre de la zone chaude comme on le constate dans le cas du chauffage Gaussien (Fig. 2(b)). En effet, la valeur maximale de la fonction de courant est six fois plus importante que celle obtenue pour un flux constant.

L'analyse des transferts thermiques montre que pour les distributions polynômiales (faible concentration), le régime conductif est dominant. L'application de flux à forte concentration entraîne une affectation plus prononcée des champs thermiques par l'écoulement thermocapillaire. L'intensité de l'écoulement est illustrée par une forte distorsion des isothermes dans la zone centrale au voisinage de la surface libre. Au voisinage du front de solidification, on note l'apparition d'un gradient de température important dans la direction axiale le long de la surface latérale. Ce gradient diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la surface libre. Lorsque la focalisation du flux augmente, il y a un accroissement du gradient thermique, dans la direction radiale, à proximité du centre de la surface libre augmentant ainsi la température maximale.

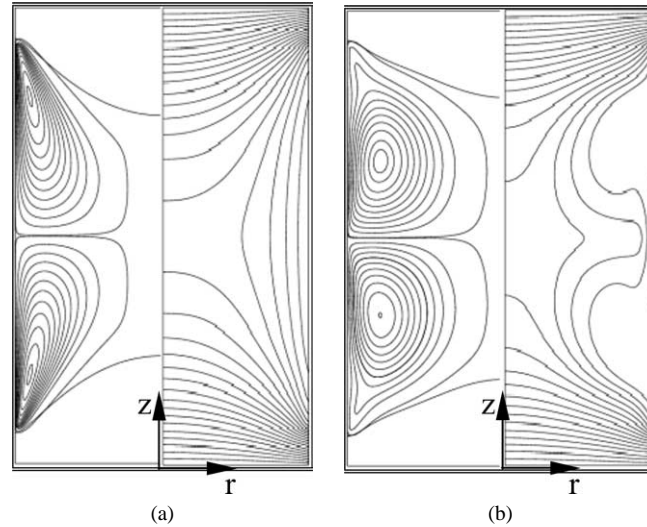


Fig. 2. Lignes de courant et isothermes pour deux distributions de flux (a) constante : $|\psi_{\max}| = 2,18$; $\theta_{\max} = 0,318$; $\theta_{\min} = -0,5$; et (b) gaussienne : $|\psi_{\max}| = 12,52$, $\theta_{\max} = 0,508$; $\theta_{\min} = -0,5$, ($V_t = 0$).

Fig. 2. Streamlines and isotherms for two different flux distributions (a) constant: $|\psi_{\max}| = 2.18$, $\theta_{\max} = 0.318$, $\theta_{\min} = -0.5$ et (b) Gaussian: $|\psi_{\max}| = 12.52$, $\theta_{\max} = 0.508$, $\theta_{\min} = -0.5$, ($V_t = 0$).

L'évolution temporelle de la fraction solide totale au cours du temps pour les différents types de flux considérés est présentée sur la Fig. 3(a). Rappelons qu'à l'état initial, le domaine est totalement solide et porté à la température froide T_0 . En l'absence d'effets de la chaleur latente ($Ste^{-1} \approx 0,0$) on se ramène à un problème de suivi d'isotherme. Cette dernière hypothèse est vraie pour des cas qui présentent soit une évolution de l'interface très lente ou pour des cas à chaleur latente très faible. La concentration d'énergie accélère l'apparition de la phase fluide. En effet, dans le cas du flux constant la fraction liquide augmente à partir de $\tau \approx 1,75$ par contre, dans le cas Gaussien cette augmentation débute à partir de $\tau \approx 0,15$. Ces temps de réponse, plus importants pour les faibles densités d'énergie, sont dus à la part importante des pertes énergétiques au travers des frontières (barreaux maintenues à T_0). Le régime permanent est atteint pour des temps d'autant plus courts que le flux est concentré avec un pont liquide plus étendu. La Fig. 3(b) représente l'évolution de la température maximale et illustre la remarque précédente d'apparition de la phase liquide (sur la Fig. 3(b) on observe l'apparition du bain liquide à partir des températures adimensionnelles positives). Cette rapidité est la conséquence des températures plus élevées apparaissant en régime transitoire pour les fortes focalisations.

L'autre paramètre contrôlant la cinétique de changement de phase est la chaleur latente (représentée par l'inverse du nombre de Stefan). La Fig. 4 représente l'évolution temporelle de la fusion pour différents nombres de Stefan. L'évolution (transition) des différents régimes (dynamique/thermique) est plus rapide pour une fraction solide (resp. liquide) correspondant au cas sans chaleur latente ($Ste^{-1} = 0$) ou globalement plus faible (resp. élevée) que dans les cas avec des chaleurs latentes significatives. L'évolution de la fraction solide est retardée par l'accroissement du Ste^{-1} où davantage d'énergie est nécessaire pour assurer le même taux d'avancement de l'interface (chaleur latente plus importante). L'évolution globale de la fraction solide (Fig. 4) est similaire au cas discuté précédemment, en inversant la dépendance en Ste et en concentration d'énergie (faible Ste /forte concentration), mais l'origine physique est différente, car cette fois ci l'écoulement en est responsable. Dans le cas présent, l'évolution du maximum de température, atteint à la surface libre, est moins affectée par le nombre de Stefan et la fusion est retardée davantage par la consommation énergétique que par le changement de la dynamique de l'écoulement. L'analyse de ce système illustre l'existence de régimes caractérisant l'évolution transitoire du système de croissance qui peut être classifiée en trois phases principales. La première phase commune pour l'ensemble des valeurs de la

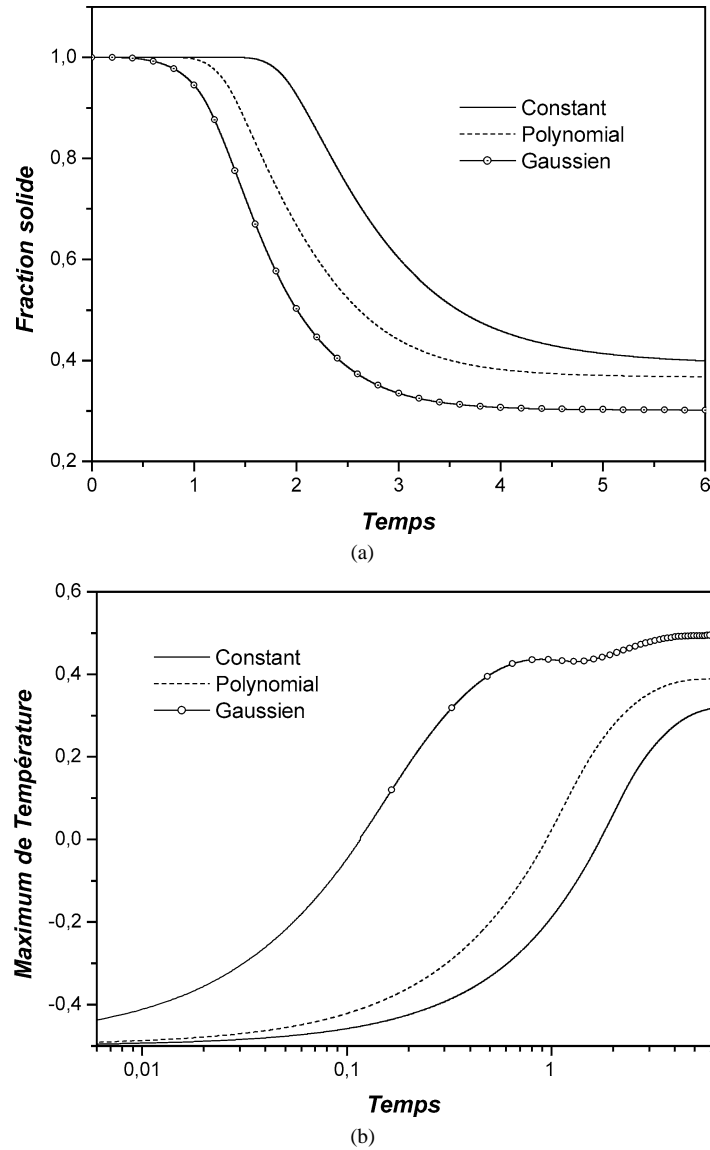


Fig. 3. Influence de la distribution du flux sur l'évolution temporelle de (a) la fraction solide et (b) de la température maximale sur la surface libre ($V_l = 0$).

Fig. 3. Influence of different flux distributions on the temporal evolution of the (a) solid fraction and (b) the temperature maximum on the free surface ($V_l = 0$).

chaleur latente est dominée par la conduction thermique avec une température maximale atteinte au milieu de la surface libre augmentant progressivement dans le temps. Une fois la température de fusion dépassée, un domaine liquide se met en place. Pendant ces premiers instants, l'intensité de l'écoulement dépend de la taille de la zone fondue dont l'évolution dépend de chaleur latente (conduction avec presque absence d'écoulement). Lorsque la taille du domaine liquide est suffisante, la tension superficielle donne lieu à deux zones de re-circulation de part et d'autre du plan médian de la surface libre acheminant ainsi le fluide chaud vers l'interface solide/liquide; la température maximale au centre de la surface libre ainsi que le transfert thermique (principalement radial)

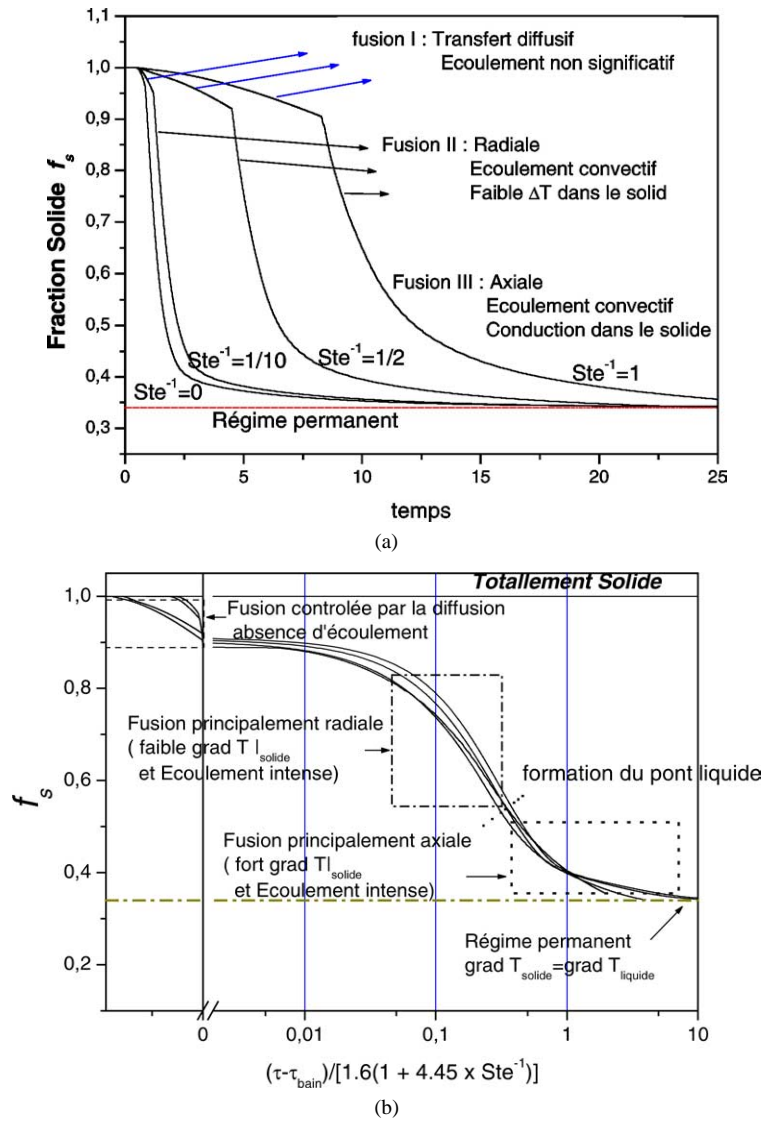
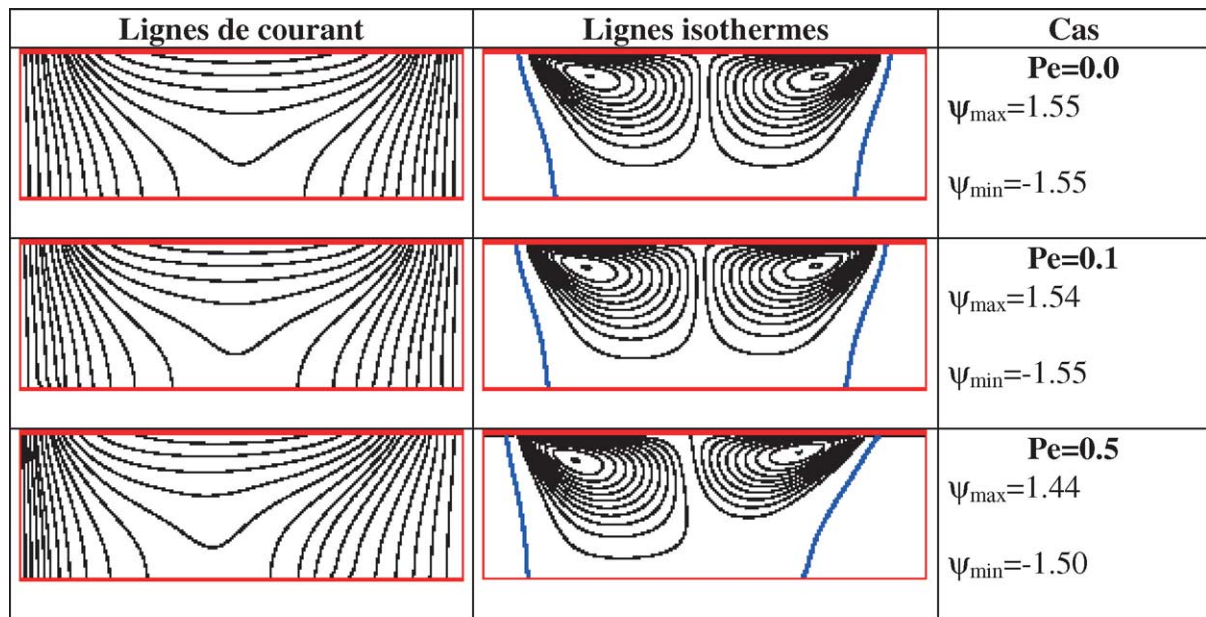


Fig. 4. Influence de la chaleur latente (nombre de Stefan) sur l'évolution temporelle de la fraction solide, (a) en fonction du temps, (b) et en fonction du groupement caractéristique ($V_t = 0$).

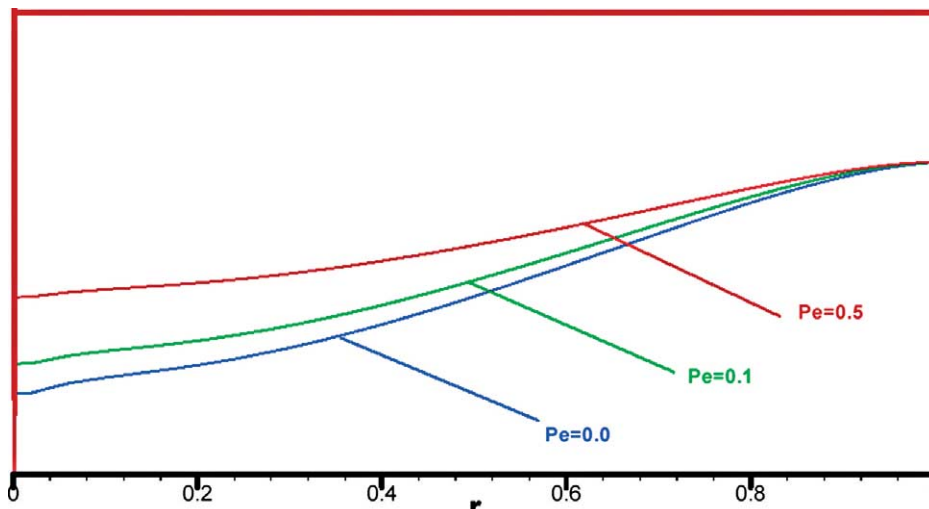
Fig. 4. Influence of the latent heat (Stefan number) on the evolution of the solid fraction, (a) versus time, (b) and versus characteristic group ($V_t = 0$).

ne sont plus contrôlés uniquement par la conduction thermique mais aussi par les mouvements de convection thermocapillaire qui accélèrent la formation du pont liquide (Fig. 4). Ceci se manifeste par une progression assez rapide de la partie externe du front de fusion durant cette phase. Quand le bain fondu atteint l'axe de symétrie (séparation en deux barreaux), la convection thermocapillaire est toujours importante mais une proportion d'énergie apportée par les mouvements convectifs et par la diffusion thermique est extraite du barreau par conduction. L'interface pendant cette dernière phase prend une forme presque finale qui progresse parallèlement à elle-même pour atteindre enfin le régime stationnaire où le transfert thermocapillaire du côté liquide équilibre le transfert conductif du côté solide.



← sens du tirage

(a)



(b)

Fig. 5. Effets du tirage du barreau (nombre de Peclet) (a) lignes de courant et isothermes, (b) forme de l'interface monocristallin, distribution polynomiale.

Fig. 5. Pulling velocity effects (Peclet number) on (a) streamlines and isotherms and (b) interface shape of the monocrystal, for polynomial flux.

Les résultats obtenus montrent clairement la présence de trois de 3 régimes successifs :

- (i) Fusion en l'absence d'écoulement (régime principalement diffusif) ;
- (ii) Accélération de la fusion une fois la taille du bain est suffisante pour qu'un écoulement thermocapillaire se développe. Dans ce dernier régime la fusion est davantage radiale ;
- (iii) Une fois le pont liquide totalement formé, on observe une atténuation de la vitesse de fusion. Il s'agit d'une fusion principalement axiale.

Ces trois régimes sont résumés sur la Fig. 4 en termes de régimes dynamique et thermique avec des paramètres de contrôle résumant les phénomènes physiques mis en jeu (Fig. 4(b)).

La question qui se pose à ce stade concerne un autre paramètre placé sous le contrôle de l'expérimentateur qui est la vitesse de tirage. Des simulations sont effectuées pour le problème complet en présence des deux phases et avec échange de chaleur latente ($Ste^{-1} = 1,5$). Les investigations précédentes permettent d'obtenir des configurations symétriques à deux cellules convectives de part et d'autre de la médiatrice de la surface libre. Les effets notés en absence de tirage portent sur la morphologie des cellules et l'établissement du front, aucune dissymétrie n'est observée.

En présence de tirage, une dissymétrie monocristallin/polycristallin se développe et s'accroît avec le nombre de Peclet (Fig. 5(a)). En effet, lorsque le système est translaté dans la direction du monocristal, l'interface correspondante libère une quantité d'énergie équivalente à la chaleur latente pour passer à l'état solide. Sous l'effet de l'écart des gradients thermiques locaux se développant dans les deux phases (condition de Stefan), le front de solidification subit une déformation vers la phase solide plus près de l'axe que de l'interface gaz/liquide et se rapproche d'une forme plane. Du côté polycristallin, le front de fusion s'incurve et se déplace dans le sens du tirage. Ces déformations et déplacements des deux interfaces induisent une dissymétrie des champs thermique et dynamique (Fig. 5(a)). Pour $Pe = 0,5$, le front de solidification s'approche de plus en plus de la forme plane tandis que celle de fusion s'incurve davantage (Fig. 5(b)). Ainsi le tirage en fusion de zone peut être perçu comme un paramètre de contrôle agissant directement sur la forme du front de solidification du côté du monocristallin.

4. Conclusion

L'étude numérique de l'effet des conditions de chauffage sur les phénomènes de changement de phase et la convection thermocapillaire est effectuée dans une configuration de zone flottante placée dans des conditions de microgravité. Elle montre que la distribution de flux sur la surface libre a des effets significatifs sur l'hydrodynamique et la distribution du champ de température d'une part et sur la cinétique d'établissement du régime permanent ou pseudo-permanent d'autre part.

Des temps caractéristiques, valables pour la gamme des nombres de Stefan analysée, sont introduits et semblent résumer d'une manière synthétique les couplages et les phénomènes complexes mis en jeux dans la période transitoire pour atteindre le régime permanent en pont liquide entretenu.

L'étude a été étendue au contrôle par tirage et les effets engendrés par ce dernier sur la forme et les positions des interfaces (solide–liquide et liquide–solide).

Cette analyse globale du bain fondu montre clairement que la réponse apportée par le calcul numérique à la superposition du chauffage et du tirage peut être exploitée pour une meilleure optimisation du processus de croissance par zone flottante.

Références

- [1] D. Schwabe, Marangoni effects in crystal growth melts, *Phys. Chem. Hydrodynamics* 2 (1981) 263–280.
- [2] C.W. Lan, S. Kou, Thermocapillary flow and melt/solid interfaces in floating zone crystal growth under microgravity, *J. Crystal Growth* 102 (1990) 1403–1414.

- [3] J.C. Chen, H.K. Wu, Numerical computation of heat flow, fluid flow and interface shapes in the float zone of lithium niobate during a melting process, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 3707–3716.
- [4] G. Labonia, F. Stella, E. Leonardi, G. Guj, A numerical study of the effect of free surface deformation on buoyancy and thermocapillary convection, *J. Comput. Phys.* 132 (1997) 34–50.
- [5] R. Savino, R. Monti, Oscillatory Marangoni convection in cylindrical liquid bridges, *Phys. Fluids* 8 (11) (1996) 2906–2922.
- [6] F. Preisser, D. Schwabe, A. Scharmann, Steady and oscillatory thermocapillary convection in liquid columns with free cylindrical surface, *J. Fluid Mech.* 126 (1983) 545–567.
- [7] G. Kasperski, G. Labrosse, On the numerical treatment of viscous singularities in wall-confined thermo-capillary convection, *Phys. Fluids* 12 (2000) 2695–2697.
- [8] D. Schwabe, A. Zebib, B.-C. Sim, Oscillatory thermocapillary convection in open cylindrical annuli. Part 1. Experiments under microgravity, *J. Fluid Mech.* 491 (2003) 239–258.
- [9] J.P. Fontaine, R.L. Sani, Flow and transport in a multilayered fluid system I. Influence of 1- or μ -g environment, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (13) (1996) 2751–2770.
- [10] R. Bennacer, A.A. Mohamad, E. Leonardi, the effect of heat flux distribution on thermo-capillary convection in a side-heated liquid bridge, *Numer. Heat Transfer Part A* 41 (2002) 657–671.
- [11] M. El Ganaoui, A. Lamazouade, P. Bontoux, D. Morvan, Computational solution for fluid under solid/liquid phase change conditions, *Int. J. Computers and Fluid* 31 (4) (2002) 539–556.
- [12] E. Semma, M. El Ganaoui, A. Cheddadi, P. Bontoux, Etude numérique des instabilités de la phase fluide et de l'interface de solidification en croissance dirigée horizontale, *C. R. Acad. Sci. Paris* 331 (2003) 631–639.
- [13] B.P. Leonard, The ultimate conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 88 (1991) 17–74.
- [14] J.P. Van Doormal, G.D. Raithby, Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows, *Numer. Heat Transfer* 7 (1984) 147–163.