



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mécanique 332 (2004) 293–298



# Étude numérique de la topologie du champ résiduel de déplacements d'un milieu ductile fissuré : influence sur la formation des caustiques

Octavian Pop, Valéry Valle, Mario Cottron

Université de Poitiers, laboratoire de mécanique des solides, UMR 6610, SP 2 MI, bd. M. et P. Curie, téléport 2,  
BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France

Reçu le 20 novembre 2003 ; accepté après révision le 18 février 2004

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

---

## Résumé

L'objet de nos travaux est de montrer que, par une analyse optique simple (phénomène de caustiques), il est possible de localiser les frontières d'une enclave plastique située en pointe de fissure d'un solide fissuré. Nous montrons par des simulations numériques que, dans le cas d'une éprouvette ductile de type SEN (Single Edge Notch) sollicitée en mode I et suivant un historique de chargement, l'apparition puis la progression de la zone plastique entraîne, en pointe de fissure, des changements topologiques irréversibles qui se traduisent par des variations de la forme des caustiques. *Pour citer cet article : O. Pop et al., C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Numerical study of the topology of displacements residual field for a cracked ductile medium: Influence on the shape of the caustic curve.** The purpose of our work is to illustrate that, by using a simple optical method (phenomenon of caustics) it is possible to locate, near the crack tip, the boundaries of the plastic zone for a cracked body. In this Note, we show that, through numerical simulations, in the case of a ductile SEN specimen, loaded in mode I and following a loading history, the appearance and development of the plastic zone involves irreversible topological changes in the vicinity of the crack tip, made obvious by caustics shape variations. *To cite this article: O. Pop et al., C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Rupture ; Caustiques ; Déplacements résiduels ; Plasticité ; Singularité

*Keywords:* Rupture; Caustics; Residual displacements; Plasticity; Singularity

---

---

Adresse e-mail : [Octavian.Pop@lms.univ-poitiers.fr](mailto:Octavian.Pop@lms.univ-poitiers.fr) (O. Pop).

1631-0721/\$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.  
doi:10.1016/j.crme.2004.02.013

### Abridged English version

Experience shows that for an initially stationary problem (stationary crack), the crack begins to extend as soon as the plastic zone reaches a critical size [1,2]. As far as the structure is concerned, for an unloaded state of the medium, the phenomenon of plasticity is materialised in the irreversible residual displacements.

Assuming that a dependence relation stands between the plastic zone and the residual displacements field, we intend to demonstrate that for a ductile cracked medium in an unloaded state, lit by a parallel beam, the appearance of residual caustics is due to irreversible topological changes in the proximity of the crack tip [3,4].

In geometrical optics, as shown in Fig. 1, the caustic ( $C$ ) represents the envelope of a system of rays ( $R_d$ ) resulting from the deflection of an incidental beam ( $R_I$ ), which impinges on the exterior boundary of the medium ( $A$ ) under an angle ( $\varphi$ ) [5], where ( $\varphi$ ) stands for the angle of incidence between the direction of the incidental beam ( $R_I$ ) and the normal  $Oz$  axis to the ( $A$ ) boundary.

In this Note, we have made the assumption that the ( $A$ ) boundary is reflective, and in this context the only parameters influencing the appearance of caustics are the morphology of the residual displacements field and the position of the image screen ( $\Phi$ ), parallel to the ( $A$ ) boundary of the medium.

In this case, a configuration space (i.e., residual displacements field) of no depth, characteristic for an elastic behaviour of the medium, will not lead to the appearance of residual caustics in the image screen (Fig. 4(a)).

In order to proceed to the numerical simulation, we have used finite elements modelling of a SEN ductile specimen ( $100 \times 100 \times 6 \text{ mm}^3$ ) loaded in mode I, beyond the initial limit of elasticity, taking into account the loading history presented in Fig. 2. The crack has a length 10 mm. The behaviour model that we have associated to the discretized specimen is the von Mises model of linear kinematic hardening, the mechanical characteristics of the material being experimentally determined for a polycarbonate known under the name of Makrolon® [10]. Moreover, the kinematic boundary conditions imposed on the geometrical shape of the specimen require a plane stress state ( $\sigma_{zz} = 0$ ).

In Fig. 2 we have shown the distribution of the von Mises stresses for each loading step, in a  $5 \times 7 \text{ mm}^2$  area located in the vicinity of the crack tip. It should be noted that in order to simplify the representation, we have shown only three zones, those of 40, 48 and 56 MPa, that allow us to estimate the geometry of the plastic zone limits. Analysing Fig. 2 (a), (b) and (c), we can notice a progression and morphological changes in the plastic zone depending on the load value.

After unloading, due to the plasticity phenomenon that is manifest during the loading phase, the nodes for which the limit state has been reached (Eq. (1)) do not go back to their initial position. The analysis of the residual displacements fields, shown in Fig. 3, revealed that for some nodes the limit state has not been reached; nevertheless, they do not go back to their initial positions. These nodes, located in the neighbourhood of the plastic area, represent, in fact, a transition zone between the plastic zone and the elastic zone.

Due to the topological changes entailed by the plasticity phenomenon, the parallel rays of an incidental beam perpendicular on the ( $A$ ) surface of the specimen, are diverted from their trajectory. Under these circumstances, if we project the deviated rays on a ( $\Phi$ ) plane parallel to the ( $A$ ) model surface, we can notice the presence of residual caustics as in Fig. 4 (b), (c) and (d). We have to specify that the caustics shown in Fig. 4 are virtual caustics obtained through reflection, for an image screen situated at 1 mm in relation to the final position of the crack tip. This distance is measured in the positive sense of the  $Oz$  axis (see Fig. 1).

Thus we can notice that the visualisation of the residual caustics, for an unloaded state of the specimen, reveals the presence of residual displacements surrounding the crack tip, as a result of plastic effects involved during the loading phase.

We can also observe that the caustics' shape depends mainly on the topology of the configurations space, the former being directly related to the morphology of the plastic zone.

## 1. Introduction

Pour des structures réelles fissurées, en raison de fortes concentrations de contraintes, nous pouvons identifier autour des pointes de fissures des enclaves caractérisées par des effets de plasticité [1]. Du point de vue structural, pour un état déchargé du milieu, le phénomène de plasticité est matérialisé par des déplacements résiduels irréversibles. Il est à noter que ces déplacements résultent des déformations résiduelles correspondantes à une configuration déchargée du milieu.

L'expérience montre que pour un problème au départ stationnaire (fissure stationnaire) la fissure commence à se propager une fois que de la zone plastique atteint une taille critique. Il faut ajouter que par la suite, durant la propagation, les dimensions de la zone plastique ne cessent pas d'évoluer [1,2].

En supposant qu'entre la forme de la zone plastique et le champ résiduel des déplacements existe une relation de dépendance, nous nous proposons de montrer que dans le cas d'un milieu ductile fissuré dans un état déchargé, éclairé sous un faisceau parallèle, la formation des caustiques résiduelles est due aux changements topologiques irréversibles en pointe de fissure [3,4].

## 2. L'aspect optique et géométrique du phénomène des caustiques

Pour mettre en évidence la présence des déplacements résiduels nous nous sommes orientés vers le phénomène optique des caustiques [5–7].

Associé à des singularités mathématiques, la caustique représente l'image d'un ensemble des points critiques, d'une application différentiable, pour lesquels le rang de la matrice jacobienne est non maximal [8,9]. Dans l'optique géométrique, comme il est montré à la Fig. 1, la caustique ( $C$ ) représente l'enveloppe d'un système de rayons ( $R_d$ ) dû à la déflexion d'un faisceau incident ( $R_I$ ), qui éclaire sous un angle ( $\varphi$ ) la frontière extérieure ( $\Lambda$ ) du milieu [5]. L'angle ( $\varphi$ ) est l'angle d'incidence mesuré entre la direction du faisceau incident ( $R_I$ ) et l'axe  $Oz$  normal à la frontière ( $\Lambda$ ). Pour un milieu transparent fissuré, le gradient de contraintes crée une déformation en bout de fissure (par effet Poisson) et modifie l'indice de réfraction du matériau.

Nous avons considéré, dans notre étude, que la frontière ( $\Lambda$ ) est réfléchissante et que dans ce cas les seuls paramètres qui vont influencer la formation des caustiques sont la morphologie du champ résiduel des déplacements et la position du plan image ( $\Phi$ ), qui est parallèle à la frontière initiale ( $\Lambda$ ) du milieu. Dans ce cas, un espace des

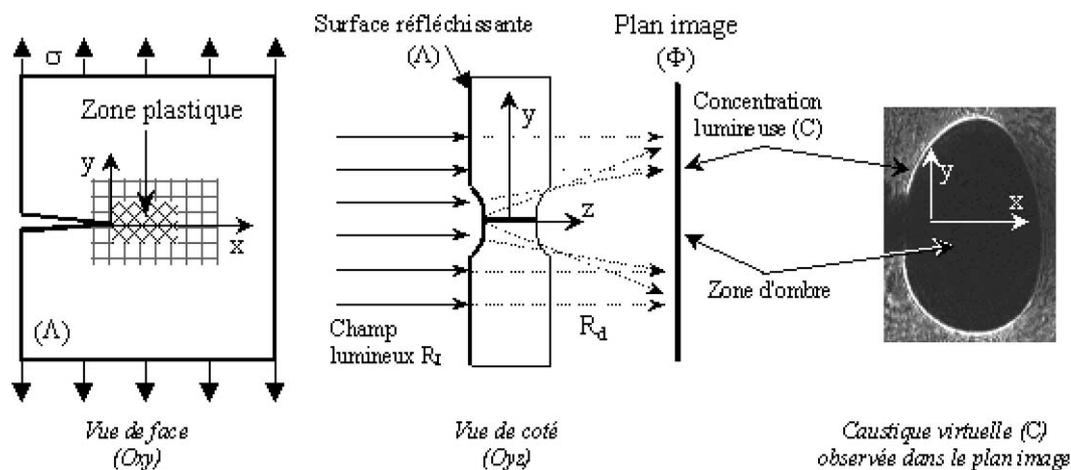


Fig. 1. Principes optiques et géométriques du phénomène des caustiques. Éprouvette SEN sollicitée en mode I.

Fig. 1. Optical and geometrical principles of the caustics phenomenon. SEN specimen loaded in mode I.

configurations (i.e. champ résiduel des déplacements) sans profondeur caractéristique d'un comportement élastique du milieu, ne conduira pas à la formation de caustiques dans le plan image (Fig. 4 (a)).

### 3. Modélisation par éléments finis d'un champ résiduel des déplacements

Pour la simulation numérique, nous avons modélisé par éléments finis une éprouvette ductile de type SEN ( $100 \times 100 \times 6 \text{ mm}^3$ ) sollicitée en mode I au-delà de la limite initiale d'élasticité, prenant en compte l'historique du chargement représenté à la Fig. 2. La longueur de la fissure est dans notre cas de 10 mm. Le modèle de comportement, que nous avons associé au milieu discrétisé en surface avec des éléments quadrillés, est celui de von Mises à écrouissage cinématique linéaire, avec les caractéristiques du matériau déterminés expérimentalement sur un polycarbonate commercialisé sous le nom de Makrolon® [10]. De plus, les conditions aux limites cinématiques imposées sur la géométrie de l'éprouvette supposent l'existence d'un état de contraintes planes ( $\sigma_{zz} = 0$ ). Dans ce cas les nœuds du ligament de la fissure sont bloqués en déplacement suivant la direction  $Oy$  alors que, les nœuds situés dans le plan  $Oxy$  sont bloqués en déplacement suivant la direction  $Oz$  (voir Fig. 1). Il faut préciser qu'en raison de la symétrie de l'éprouvette et du chargement nous n'avons modélisé que la moitié de l'éprouvette.

Dans cette étude, nous considérons que l'enclave plastique représente le lieu géométrique des nœuds pour lesquelles pendant la phase de chargement, l'état de contraintes satisfait le critère de plasticité de von Mises (1), [11,12].

Dans la relation (1), nous avons noté par  $\sigma_{ij}$  le champ des contraintes,  $\delta_{ij}$  représente le symbole de Kronecker,  $\text{tr}(\sigma_{ij})$  la somme des contraintes hydrostatiques et  $\sigma_{el}$  le seuil d'élasticité :

$$\frac{1}{2} \cdot \left[ \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \cdot \text{tr}(\sigma_{ij}) \cdot \delta_{ij} \right]^2 - \frac{\sigma_{el}^2}{3} \geq 0 \quad (1)$$

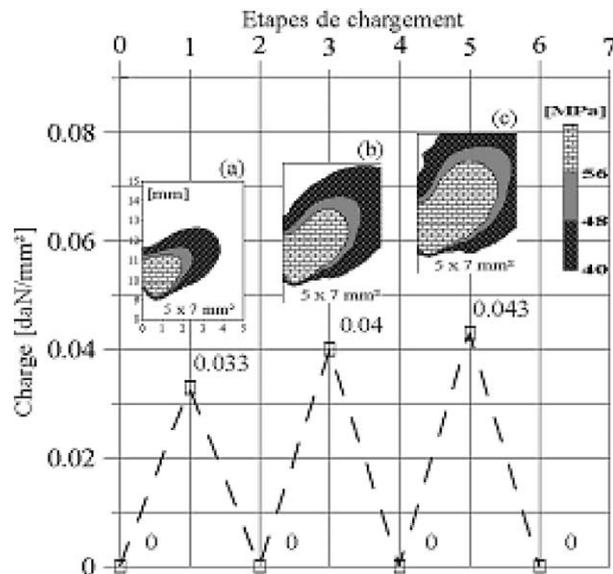


Fig. 2. Historique de chargement. (a)–(c) Distribution des contraintes von Mises observée dans une enclave de  $5 \times 7 \text{ mm}^2$ , localisée autour de la pointe de fissure, pour trois charges différentes (0,033, 0,040 et 0,043  $\text{daN}/\text{mm}^2$ ).

Fig. 2. Loading history. (a)–(c) von Mises stress distribution observed in a  $5 \times 7 \text{ mm}^2$  zone located in the neighborhood of a crack tip for three different loads (0.033, 0.040 and 0.043  $\text{daN}/\text{mm}^2$ ).

#### 4. Résultats et discussions

À la Fig. 2, nous avons représenté, pour chacune étape de chargement, la distribution des contraintes von Mises dans une enclave de  $5 \times 7 \text{ mm}^2$ , localisée au voisinage de la pointe de fissure. Il faut préciser que pour simplifier la représentation nous avons montré seulement trois enclaves, celles de 40, 48 et 56 MPa, qui nous permettent d'apprécier la géométrie de la frontière de l'enclave plastique. Il faut ajouter qu'à l'intérieur de l'enclave de 56 MPa, il apparaît des régions dans lesquelles la valeur de la contrainte von Mises est supérieure à 56 MPa. En analysant la Fig. 2 (a), (b) et (c), nous pouvons remarquer une progression et des changements morphologiques de la zone plastique en fonction de la valeur de la charge.

Ces changements morphologiques vont se traduire par des variations topologiques de l'espace des configurations (voir, Fig. 3 (a)–(c)).

Après le déchargement, suite au phénomène de plasticité manifesté pendant la phase de chargement, les nœuds dans lesquels l'état limite a été atteint (relation (1)) ne reviennent plus à leur position initiale. En analysant les champs résiduels des déplacements, montrés à la Fig. 3, nous pouvons observer, qu'il y a aussi des nœuds pour lesquels l'état limite n'a pas été atteint, mais qui ne reprennent pas leur position initiale. Ces nœuds, localisés autour de l'enclave plastique, constituent en effet une zone de transition entre l'enclave plastique et la zone de comportement élastique. Il faut préciser que les relevés ont été effectués pour 19 directions de mesure ( $19 \times 75$  nœuds, soit 1425 nœuds) définies autour de la pointe de fissure toutes les  $10^\circ$  [12].

En raison des changements topologiques irréversibles provoqués par le phénomène de plasticité, les rayons parallèles provenant d'un faisceau incident perpendiculaire à la surface ( $\Lambda$ ) de l'éprouvette, seront déviés de leur trajectoire initiale (en respectant le principe de Fermat et la loi de Snell–Descartes [9]). Dans ces circonstances, si nous projetons les rayons déviés sur un plan ( $\Phi$ ) parallèle à la surface ( $\Lambda$ ), nous allons observer comme il est montré à la Fig. 4 (b), (c) et (d), des caustiques résiduelles. Nous précisons que les caustiques résiduelles montrées à la Fig. 4, sont des caustiques virtuelles parce qu'elles sont visualisées en réflexion, pour un plan image situé à 1 mm par rapport à la position finale de la pointe de fissure. Il est à noter que cette distance est mesurée dans le sens positif de l'axe  $Oz$  (voir, Fig. 1).

Pour visualiser les caustiques montrées à la Fig. 4 (b), (c) et (d), nous avons pris en considération seulement les nœuds pour lesquels le critère de plasticité (1) est satisfait.

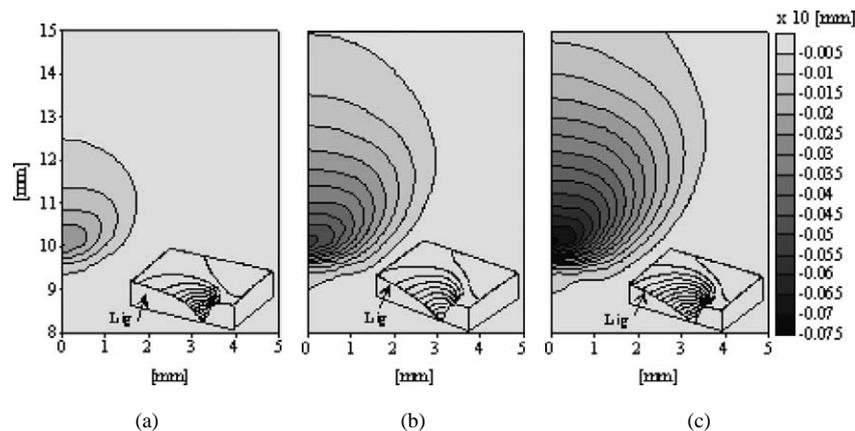


Fig. 3. Espaces des configurations. (a)–(c) Espaces des configurations correspondant aux pas de temps 2, 4 et 6 (Fig. 2).

Fig. 3. Residual spaces of configurations. (a)–(c) Residual spaces of configurations corresponding to the steps of time 2, 4 and 6 (see Fig. 2).

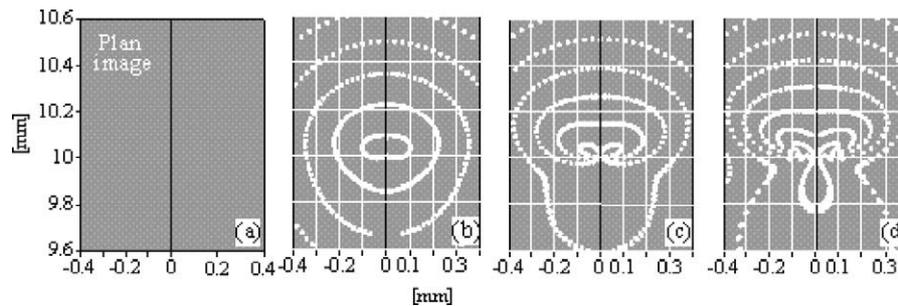


Fig. 4. Caustiques résiduelles visualisées dans un plan image, localisé à 1 mm par rapport à la position finale de la pointe de fissure. (a) Absence des caustiques dans le plan image pour un comportement élastique du milieu. (b)–(d) Caustiques associées aux champs résiduels montrés à la Fig. 3.

Fig. 4. Residual caustics obtained for an image-plan situated at 1 mm from the final position of the crack tip. (a) Absence of residual caustics on the screen for an elastic behaviour. (b)–(d) Residual caustics associated to the residual fields of displacements (see Fig. 3).

## 5. Conclusions

Comme nous pouvons l'observer, la visualisation des caustiques résiduelles, pour un état déchargé de l'éprouvette, permet de mettre en évidence la présence autour de la pointe de fissure, de déplacements résiduels consécutifs aux effets de plasticité présents pendant la phase de chargement. De plus, nous pouvons remarquer que la forme de la caustique dépend principalement de la topologie de l'espace des configurations, topologie qui est directement liée à la morphologie de la zone plastique.

En analysant la Fig. 4, nous pouvons remarquer aussi que les caustiques résiduelles associées à l'espace des configurations (Fig. 3), sont de formes simples [13] et présentent des singularités standards (i.e. plis et fronces [8]).

A partir d'un ensemble de caustiques enregistrées dans différents plans images, nous pouvons envisager de reconstituer le champ résiduel des déplacements afin de délimiter la zone de plasticité. Cette démarche numérique doit être étendue expérimentalement sur matériaux réels.

## Références

- [1] J. Lie, N. Recho, Rupture par fissuration des structures, Hermès, Paris, 1995.
- [2] T.L. Anderson, Fracture Mechanics, CRC Press, 1995.
- [3] R.A. Tomlinson, E.A. Patterson, The effects of surface topography on the method of caustics, *Experiment. Mech.* 39 (4) (1999) 335–342.
- [4] R.A. Tomlinson, E.A. Patterson, A study of residual caustics generated from fatigue cracks, *Fatigue Fract. Eng. Materials Struct.* 20 (1997) 1467–1479.
- [5] J.F. Kalthoff, Static and dynamic photoelasticity and caustic, in: A. Lagarde (Ed.), *CISM Courses and Lectures*, vol. 290, Springer, New York, 1987.
- [6] C. Criado, N. Alamo, Optical properties of conics: a method for obtaining reflecting and focusing profiles, *Opt. Commun.* 167 (1999) 83–88.
- [7] N. Brière, P. Poulin, Adaptive representation of specular light, *Computer Graphics Forum* 20 (2) (2001) 149–159.
- [8] V. Arnold, A. Varchenko, S. Goussein-Zadé, Singularités des applications différentiables 1ère partie, Mir, Moscou, 1986.
- [9] M. Born, E. Wolf, Principles of Optics. Electromagnetic Theory of Propagation. Interference and Diffraction of Light, Pergamon Press, 1980.
- [10] R. Tié Bie, J.C. Dupré, Optical techniques for the thermomechanic study of polymers, in: *International Workshop on Video – Controlled Materials Testing*, 2000, pp. 181–184.
- [11] B. Haphen, J. Solençon, *Elasto-plasticité*, Presses de l'école nationale de ponts et chaussées, Paris, 1987.
- [12] O. Pop, V. Valle, M. Cottron, Analyse 2D et 3D par éléments finis des allures de l'enclave plastique et détermination des caustiques associées, pour une éprouvette fissurée de type SEN sollicitée en mode I, in: *COMEFIM-6*, 2002, pp. 221–229.
- [13] M.V. Berry, C. Upstill, Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns, in: *Progr. Opt.*, vol. XVIII, 1987, pp. 257–346.