Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Mecanique 332 (2004) 519–524
COMPTES RENDUS MECANIQUE

Réponse dynamique asymptotique de plaques minces linéairement piézoélectriques dans l'approximation quasi-électrostatique

Thibaut Weller, Christian Licht

Laboratoire de mécanique et génie civil, UMR 5508 CNRS-UM II, université Montpellier II, c.c. 48, place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 05, France

Reçu le 27 janvier 2004 ; accepté après révision le 10 février 2004

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

On détermine quatre types de comportements limites dynamiques d'une plaque piézoélectrique selon les ordres de grandeur de son épaisseur et de sa densité. ***Pour citer cet article : T. Weller, C. Licht, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Abstract

Asymptotic dynamic response of thin linearly piezoelectric plates in the quasi-electrostatic approximation. We exhibit four types of asymptotic dynamic behaviors of a piezoelectric plate according to the magnitudes of its thickness and density. ***To cite this article: T. Weller, C. Licht, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Mots-clés : Solides et structures ; Plaque piézoélectrique ; Analyse asymptotique

Keywords: Solids and structures; Piezoelectric plate; Asymptotic analysis

Abridged English version

We extend to the dynamic case the mathematical derivation [3] of the static behavior of a piezoelectric plate as the limit behavior of a three-dimensional solid whose thickness tends to zero.

The reference configuration of the linearly piezoelectric thin plate is the closure in $\mathbb{R}^3$ of the set $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, where ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^2$ with a Lipschitz boundary and ε a small positive number. In the framework of the quasi-electrostatic approximation appears a couple of real parameters $\eta = (\varepsilon, \rho)$, ρ being linked to the density. Let $(\Gamma^\varepsilon_{mD}, \Gamma^\varepsilon_{mN})$, $(\Gamma^\varepsilon_{eD}, \Gamma^\varepsilon_{eN})$ two suitable partitions of the boundary of Ω^ε; the plate is, on one hand, clamped along Γ^ε_{mD} and at an electric potential φ^η_0 on Γ^ε_{eD} and, on the other hand, subjected to body forces f^η and electric loading F^η in Ω^ε and to surface forces g^η on Γ^ε_{mN} and electric loading d^η on Γ^ε_{eN}. Thus the electromechanical state $s^\eta = (u^\eta, \varphi^\eta)$ satisfies Eqs. (1), (2), with u^η and φ^η the displacement and the electric potential fields.

Adresse e-mail : weller@lmgc.univ-montp2.fr (T. Weller).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2004.02.023

We transform the problem into an equivalent one, $\mathcal{P}(\eta,\Omega)_p$, now posed over the fixed set $\Omega=\omega\times\,]-1,1[$ with the scaled fields $y(\eta)=(s(\eta),\dot u(\eta))$ as unknown. This scaling accounts for the classical asumptions on the mechanical loading and the ones of [3] on the electrical loading. To prove the existence and the uniqueness of $y(\eta)$ we split the fields into two parts: one solves a quasi-static problem (5), the other one solves an evolution equation (6) with a skew-adjoint operator. To pass to the limit as $\eta\to(0,\bar\rho)$, $\bar\rho\in[0,+\infty[$, the use of Trotter's theory [2] of approximation of semi-groups acting on *variable* spaces allows us to *only consider static problems already studied in* [3]. According to the relative magnitudes of ρ and ε, four types of limit responses may appear, which can be purely quasi-static or quasi-static and dynamic, with a decoupling between flexural and membrane motions. Finally, our proposal to model the dynamic behavior of the physical plate is given by the transportation on Ω^ε of (19).

1. Position du problème

Une configuration de référence d'une « plaque piézoélectrique » est la fermeture dans $\mathbb{R}^3$ de l'ouvert $\Omega^\varepsilon:=\omega\times\,]-\varepsilon,\varepsilon[$, où ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$ de frontière lipschitzienne et ε un petit paramètre positif. Si la densité de la plaque en $x=(\hat x,x_3)$ s'écrit $\rho\delta(\hat x,x_3/\varepsilon)$ avec δ et $1/\delta$ positifs dans $L^\infty(\omega\times\,]-1,1[)$, il apparaît, dans l'approximation quasi-électrostatique, un *couple* de paramètres positifs $\eta:=(\varepsilon,\rho)$. La plaque est soumise d'une part à des forces de densités volumique f^η et surfacique g^η sur Γ^ε_{mN} et d'autre part à des charges électriques de densités volumique F^η et surfacique d^η sur Γ^ε_{eN}. La plaque est encastrée sur Γ^ε_{mD} et un potentiel électrique φ_0^η est imposé sur Γ^ε_{eD}. Les couples $(\Gamma^\varepsilon_{mD},\Gamma^\varepsilon_{mN})$ et $(\Gamma^\varepsilon_{eD},\Gamma^\varepsilon_{eN})$ réalisent une partition de $\partial\Omega^\varepsilon$ dont la normale unitaire extérieure est notée n^ε. On suppose que chacune des surfaces précédentes est de mesure positive et que $\Gamma^\varepsilon_{mD}=\gamma_0\times\,]-\varepsilon,\varepsilon[$, avec $\gamma_0\subset\partial\omega$. L'état électromécanique de la plaque est donné par un triplet $y^\eta(t):=(u^\eta,\varphi^\eta,v^\eta)(t)$ de champs de déplacement $u^\eta(t)$, de potentiel électrique $\varphi^\eta(t)$ et de vitesse $v^\eta=\dot u^\eta(t)$, où le symbole $\dot{}$ désigne la dérivation temporelle. Les équations gouvernant l'évolution du système sont alors :

$$\mathcal{P}_\eta(\Omega^\varepsilon)\quad\begin{cases}\operatorname{div}\sigma^\eta+f^\eta=\rho\delta\ddot u^\eta\quad\text{dans }\Omega^\varepsilon,\quad \sigma^\eta n^\varepsilon=g^\eta\quad\text{sur }\Gamma^\varepsilon_{mN},\quad u^\eta=0\quad\text{sur }\Gamma^\varepsilon_{mD}\\ \operatorname{div}D^\eta+F^\eta=0\quad\text{dans }\Omega^\varepsilon,\quad D^\eta\cdot n^\varepsilon=d^\eta\quad\text{sur }\Gamma^\varepsilon_{eN},\quad \varphi^\eta=\varphi^\eta_0\quad\text{sur }\Gamma^\varepsilon_{eD}\\ (\sigma^\eta,D^\eta)=M^\varepsilon(x)(e(u^\eta),\nabla\varphi^\eta)\quad\text{dans }\Omega^\varepsilon\\ (u^\eta,v^\eta)(0)=(u^{\eta0},v^{\eta0})\quad\text{donné}\end{cases}\tag{1}$$

où σ^η, $e(u^\eta)$ et D^η désignent respectivement le tenseur des contraintes, le tenseur linéarisé des déformations et le déplacement électrique. L'opérateur M^ε est tel que :

$$\sigma^\eta=a^\varepsilon e\big(u^\eta\big)-b^\varepsilon\nabla\varphi^\eta,\qquad D^\eta=b^{\varepsilon\mathrm{T}}e\big(u^\eta\big)+c^\varepsilon\nabla\varphi^\eta\tag{2}$$

où $b^{\varepsilon\mathrm{T}}$ est la transposée de b^ε et où a^ε et c^ε sont symétriques et positifs.

On se propose de montrer que $\mathcal{P}_\eta(\Omega^\varepsilon)$ admet une unique solution et d'en étudier le comportement lorsque η tend vers $\bar\eta=(0,\bar\rho)$, où $\bar\rho\in\mathbb{R}^+$. Un cas électrodynamique a été traité dans [1] ; il nous a paru intéressant d'utiliser une méthode alternative : celle d'approximation des semi-groupes d'opérateurs linéaires agissant sur des espaces de Hilbert variables [2].

2. Reformulation du problème $\mathcal{P}_\eta(\Omega^\varepsilon)$

Au problème $\mathcal{P}_\eta(\Omega^\varepsilon)$ on peut associer un problème $\mathcal{P}(\eta,\Omega)_p$, mathématiquement équivalent mais posé sur l'ouvert fixe $\Omega:=\omega\times\,]-1,1[$. Pour cela, on utilise la bijection $\pi^\varepsilon: x=(x_1,x_2,x_3)\in\overline{\Omega}\mapsto x^\varepsilon=\pi^\varepsilon x=(x_1,x_2,\varepsilon x_3)\in\overline{\Omega}^\varepsilon$ et un certain nombre d'hypothèses de « mise à l'échelle » (cf. [3] dont on adopte désormais les notations et hypothèses, en particulier les images par $(\pi^\varepsilon)^{-1}$ des données géometriques précédentes perdent l'indice ε et $\Gamma_{\pm} = \gamma \times \{\pm 1\}$). Nous rappelons que deux types de comportements statiques limites, indexés par $p \in \{1, 2\}$, apparaîssent selon la nature du chargement électrique et conduisent à poser

$$\begin{cases} m_p(\varepsilon)((v,\varphi),(w,\psi)) = \int_\Omega M(x) k_p(\varepsilon,(v,\varphi)) \cdot k_p(\varepsilon,(w,\psi))\,\mathrm{d}x \\ k_p(\varepsilon,(v,\psi)) = (e(\varepsilon,v),(\nabla_{(p)}(\varepsilon,\psi))) \\ e(\varepsilon,v)_{\alpha\beta} = e(v)_{\alpha\beta}, \quad e(\varepsilon,v)_{\alpha 3} = \varepsilon^{-1} e(v)_{\alpha 3} \quad \text{et } e(\varepsilon,v)_{33} = \varepsilon^{-2} e(v)_{33}, \quad 2e(v)_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i \\ \nabla_{(p)}(\varepsilon,\psi)_\alpha = \varepsilon^{p-1}\partial_\alpha \psi, \quad \nabla_{(p)}(\varepsilon,\psi)_3 = \varepsilon^{p-2}\partial_3\psi \end{cases} \tag{3}$$

ici et dans la suite les indices α, β varient de 1 à 2 et les indices i, j de 1 à 3.

On désigne par $y(\eta) := (u(\eta), \varphi(\eta), v(\eta) = \dot{u}(\eta))$ l'état électromécanique mis à l'échelle. La singularité de ce problème d'évolution, due à l'approximation quasi-électrostatique, conduit à extraire les couples $s(\eta) := (u(\eta), \varphi(\eta))$ et $\mathsf{U}(\eta) := (u(\eta), v(\eta))$. On fait l'hypothèse de régularité sur le chargement électromécanique mis à l'échelle :

$$(\mathrm{H}_1) \quad \begin{cases} f_\eta \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)^3) \\ (g_\eta, F_\eta, d_\eta, \varphi_{0_\eta}) \in C^2([0,T]; L^2(\Gamma_{mN})^3 \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_{eN}) \times H^1(\Omega)) \end{cases}$$

et on pose $\langle v, w\rangle_\eta := \rho \int_\Omega (v_\alpha w_\alpha + \varepsilon^{-2} v_3 w_3)\delta(x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout ouvert G de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, on note $H^1_\Gamma(G)$ l'ensemble des éléments de $H^1(G)$ dont la trace sur $\Gamma \subset \partial G$ est nulle. Avec la forme linéaire

$$L_\eta(r;t) = \int_{\Gamma_{mN}} g_\eta(t) \cdot w\,\mathrm{d}s + \int_\Omega F_\eta(t)\psi\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{eN}} d_\eta(t)\psi\,\mathrm{d}s - m_p(\varepsilon)\big(\big(0, \varphi_{0_\eta}(t)\big), r\big) \tag{4}$$

continue sur $\mathbf{S}_\eta := \{r = (w,\psi) \in H^1_{\Gamma_{mD}}(\Omega)^3 \times H^1_{\Gamma_{eD}}(\Omega)\}$, le problème $\mathcal{P}(\eta,\Omega)_p$ s'écrit :

$$\mathcal{P}(\eta,\Omega)_p \quad \begin{cases} \text{Trouver } y(\eta) \in \mathbf{Y}_\eta := H^1_{\Gamma_{mD}}(\Omega)^3 \times H^1_{\Gamma_{eD}}(\Omega) \times L^2(\Omega)^3 \text{ tel que :} \\ \langle \dot{v}(\eta), w\rangle_\eta + m_p(\varepsilon)(s(\eta), r) = \int_\Omega f_\eta \cdot w\,\mathrm{d}x + L_\eta(r;t), \quad \forall (r,t) \in \mathbf{S}_\eta \times]0,T[\\ \mathsf{U}(\eta)(0) = \mathsf{U}^0(\eta) := (u^0(\eta), v^0(\eta)) \text{ donné} \end{cases}$$

Pour montrer que $\mathcal{P}(\eta,\Omega)_p$ admet une unique solution, on va chercher $y(\eta)$ sous la forme $y(\eta) = y^e(\eta) + y^r(\eta)$ où $s^e(\eta)$ est la solution du problème de type quasi-statique :

$$s^e(\eta) \in \mathbf{S}_\eta\,; \quad m_p(\varepsilon)\big(s^e(\eta), r\big) = L_\eta(r;t), \quad \forall (r,t) \in \mathbf{S}_\eta \times [0,T] \tag{5}$$

On considère alors l'équation d'évolution dans $\mathbf{U}_\eta := H^1_{\Gamma_{mD}}(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$:

$$\dot{\mathsf{U}}^r(\eta) + \mathsf{A}_\eta \mathsf{U}^r(\eta) = \mathsf{F}(\eta), \qquad \mathsf{U}^r(\eta)(0) = \mathsf{U}^0(\eta) - \mathsf{U}^e(\eta)(0) \tag{6}$$

avec :

$$\begin{cases} D(\mathsf{A}_\eta) = \{\mathsf{U} = (u,v) \in \mathbf{U}_\eta\,;\ v \in H^1_{\Gamma_{mD}}(\Omega)^3,\ \exists! z \in L^2(\Omega)^3 \text{ tel que} \\ \langle z, w\rangle_\eta + m_p(\varepsilon)((u, \mathcal{S}_\eta u),(w,0)) = 0, \forall w \in H^1_{\Gamma_{mD}}(\Omega)^3\} \\ \mathcal{S}_\eta : u \in H^1_{\Gamma_{mD}}(\Omega)^3 \mapsto \mathcal{S}_\eta u \in H^1_{\Gamma_{eD}}(\Omega) \text{ tel que } m_p(\varepsilon)((u,\mathcal{S}_\eta u),(0,\psi)) = 0, \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_{eD}}(\Omega) \\ \mathsf{A}_\eta \mathsf{U} = (v, z), \quad \mathsf{F}(\eta) = (0, \frac{1}{\rho\delta}(f_{\eta_\alpha}, \varepsilon^2 f_{\eta_3}) - \ddot{u}^e(\eta)) \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\langle\langle \mathsf{U}, \mathsf{U}'\rangle\rangle_\eta := m_p(\varepsilon)((u, \mathcal{S}_\eta u),(u',0)) + \langle v, v'\rangle_\eta$ munit $\mathbf{U}_\eta$ d'une structure hilbertienne pour laquelle A_η est antiadjoint. On note $\|\cdot\|_\eta$ la norme associée à ce produit scalaire. Avec l'hypothèse de compatibilité entre chargement et état électromécanique initiaux :

$$(\mathrm{H}_2)\!: \ \mathsf{U}^r(\eta)(0) \in D(\mathsf{A}_\eta)$$

on déduit le

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2)*, le problème* $\mathcal{P}(\eta,\Omega)_p$ *admet une unique solution de classe* $C^1([0,T];\mathbf{Y}_\eta)$.

Un résultat analogue est montré dans [4].

3. Les différents modèles limites

On considère quatre cas, indexés par q, de comportement relatif des paramètres ε et ρ :

$$q=1:\rho\to\bar{\rho}\in\,]0,+\infty[,\quad q=2:\rho\to 0 \text{ et } \rho/\varepsilon^2\to\infty,\ q=3:\rho/\varepsilon^2\to\bar{\bar{\rho}}\in\,]0,+\infty[,\ q=4:\rho=\mathrm{o}\big(\varepsilon^2\big)$$

On désigne par $⨍$ l'opération moyenne selon l'épaisseur de la plaque mise à l'échelle et on définit pour tout $t\in[0,T]$ les réponses quasi-statiques $\tilde{s}_q(\eta)$ et $s^f(\eta)$:

$$\begin{cases}\tilde{s}_q(\eta)(t)\in\mathbf{S}_\eta\,;\quad m_p(\varepsilon)(\tilde{s}_q(\eta)(t),r)=l_q^\eta(w),\quad \forall r=(w,\psi)\in\mathbf{S}_\eta,\ \text{si } q=1 \text{ ou } 3\\ l_1^\eta(w)=\int_\Omega(f_\eta\cdot w-(⨍ f_{\eta\alpha})w_\alpha)\,\mathrm{d}x,\quad l_3^\eta(w)=\int_\Omega(f_\eta\cdot w-(⨍ f_{\eta3})w_3+(⨍ x_3f_{\eta\alpha})\partial_\alpha w_3)\,\mathrm{d}x\\ s^f(\eta)(t)\in\mathbf{S}_\eta\,;\quad m_p(\varepsilon)(s^f(\eta)(t),r)=\int_\Omega f_\eta\cdot w\,\mathrm{d}x,\quad\forall r=(w,\psi)\in\mathbf{S}_\eta\end{cases}\tag{7}$$

On fait alors l'hypothèse de convergence sur le chargement électromécanique :

$$(\mathrm{H}_3)\quad\begin{cases}\cdot(f_\eta,g_\eta,F_\eta,d_\eta,\varphi_{0_\eta}) \text{ converge vers } (f,g,F,d,\varphi_0)\\ \quad\text{dans } W^{2,1}(0,T;L^2(\Omega)^3\times L^2(\Gamma_{mN})^3\times L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_{eN})\times H^1(\Omega))\\ \cdot(g,F,d,\varphi_0)\in C^2([0,T];L^2(\Gamma_{mN})^3\times L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_{eN})\times H^1(\Omega)) \text{ si } q=1,3\\ \cdot\frac{\sqrt{\rho}}{\varepsilon}(u^e(\eta)+\tilde{u}_1(\eta))_3 \text{ converge vers 0 dans } W^{2,1}(0,T;L^2(\Omega))\\ \cdot\frac{\sqrt{\rho}}{\varepsilon}(u^e(\eta)+u^f(\eta))_3 \text{ converge vers 0 dans } W^{2,1}(0,T;L^2(\Omega)) \text{ si } q=2\\ \cdot⨍ x_3f_{\eta\alpha} \text{ converge dans } W^{2,1}(0,T;H^1_{\partial\omega\setminus\gamma_0}(\omega)) \text{ si } q=3\end{cases}$$

Il a été établi dans [3] que le comportement électromécanique statique limite est gouverné par une forme bilinéaire donnée par

$$\widetilde{m}_p(s,r)=\int_\Omega\widetilde{M}_pk_p(s)\cdot k_p(r)\,\mathrm{d}x\tag{8}$$

avec $k_1(w,\psi)=(e_{\alpha\beta}(w),\partial_\alpha\psi)$, $k_2(w,\psi)=(e_{\alpha\beta}(w),\partial_3\psi)$ et $\widetilde{M}_p$ la condensation de M relativement aux composantes de $(e(w),\nabla\psi)$ maintenues dans k_p. Cette forme n'est pas nécessairement symétrique mais coercive sur l'espace des états limites $\mathbf{V}\times\Phi_p$, avec $\Phi_1:=\{\psi\in H^1_{\Gamma_{eD}}(\Omega);\ \partial_3\psi=0\}$, $\Phi_2:=\{\psi\in L^2(\Omega);\ \partial_3\psi\in L^2(\Omega),\ \psi=0 \text{ sur } \Gamma_{eD}\cap\Gamma_\pm\}$ et $\mathbf{V}:=V_{\mathrm{KL}}(\Omega)\cap H^1_{\Gamma_{mD}}(\Omega)^3$, où $V_{\mathrm{KL}}(\Omega)$ désigne l'ensemble des déplacements de Kirchhoff–Love sur Ω. On rappelle que pour tout élément v de $V_{\mathrm{KL}}(\Omega)$ il existe $\zeta_\alpha(v)\in H^1(\omega)$ et $\zeta_3(v)\in H^2(\omega)$ uniques tels que $v_\alpha=\zeta_\alpha(v)-x_3\partial_\alpha\zeta_3(v)$ et $v_3=\zeta_3(v)$. On définit alors $\widehat{\mathbf{V}}:=\{v\in\mathbf{V};\ \zeta_3(v)=0\}$ et $\check{\mathbf{V}}:=\{v\in\mathbf{V};\ \zeta_\alpha(v)=0\}$. La limite ponctuelle de l'énergie cinétique mise à l'échelle $\langle\cdot,\cdot\rangle_\eta$ suggère que les comportements limites en membrane et en flexion seront de natures différentes (bloqué, quasi-statique ou dynamique). Cela conduit à introduire des sous-espaces de déplacements limites en posant $\mathbf{V}_q:=\widehat{\mathbf{V}}$ si $q=1,2$ et $\mathbf{V}_q:=\mathbf{V}$ si $q=3,4$, puis $\mathbf{V}_1^{\mathrm{dyn}}:=\widehat{\mathbf{V}}=:\mathbf{V}_3^{\mathrm{stat}}$, $\mathbf{V}_3^{\mathrm{dyn}}:=\check{\mathbf{V}}$ et $\mathbf{V}_1^{\mathrm{stat}}:=0$. On fait dans la suite « l'hypothèse de découplage » :

$$(\mathrm{H}_4):⨍ x_3\widetilde{M}_1=0 \text{ p.p. dans } \omega,\quad \widetilde{M}_2 \text{ est indépendante de } x_3$$

Les parties symétriques de $m_p(\varepsilon)$ et de $\widetilde{m}_p$ définissent des produits scalaires sur $\mathbf{S}_\eta$ et $\mathbf{S}_{p,q}:=\mathbf{V}_q\times\Phi_p$ dont les normes sont notées $|||\cdot|||_\eta$ et $|||\cdot|||_{p,q}$. Afin de comparer les éléments de $\mathbf{S}_\eta$ à ceux de $\mathbf{S}_{p,q}$, on introduit l'opérateur P_η :

$$\mathsf{P}_\eta:s\in\mathbf{S}_{p,q}\mapsto\mathsf{P}_\eta s\in\mathbf{S}_\eta \text{ tel que } m_p(\varepsilon)(\mathsf{P}_\eta s,r)=\widetilde{m}_p(s,r),\quad\forall r\in\mathbf{S}_\eta\tag{9}$$

Les arguments de [3] permettent d'établir :

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \quad |||\mathsf{P}_\eta s|||_\eta \leqslant c|||s|||_{p,q}, \quad \lim_{\eta \to \bar{\eta}} |||\mathsf{P}_\eta s|||_\eta = |||s|||_{p,q}, \quad \forall s \in \mathbf{S}_{p,q} \tag{10}$$

Il est à noter que $\lim_{\eta\to\bar{\eta}} |||\mathsf{P}_\eta s - s(\eta)|||_\eta = 0$ équivaut à la convergence forte de $s(\eta)$ vers s dans $H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega)$ ainsi qu'à celle des « énergies » $|||s(\eta)|||_\eta^2$ vers $|||s|||_{p,q}^2$. On définit sur $\mathbf{S}_{p,q}$ la forme linéaire limite :

$$L(r;t) = \int_{\Gamma_{mN}} g(t)\cdot w\,\mathrm{d}s + \int_\Omega F(t)\psi\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_{eN}} d(t)\psi\,\mathrm{d}s - \tilde{m}_p\big(\big(0,\varphi_0(t)\big), r\big)$$

On associe aux comportements limites de l'énergie cinétique les espaces $\mathbf{K}_1 := \{v \in L^2(\Omega)^3;\, v = (v_1, v_2, 0),\, v_\alpha \in L^2(\omega)\}$ et $\mathbf{K}_3 := \{v \in H^{-1}(\Omega)^3;\ \exists \zeta \in L^2(\omega),\, v_\alpha = -x_3\partial_\alpha\zeta,\ v_3 = \zeta\}$ munis des produits scalaires :

$$K_1(v,w) := \bar{\rho}\int_\Omega v_\alpha w_\alpha \delta(x)\,\mathrm{d}x, \qquad K_3(v,w) := \bar{\bar{\rho}}\int_\Omega v_3 w_3 \delta(x)\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

Pour $q = 1$ ou 3, on définit enfin $\mathbf{U}_{p,q} := \mathbf{V}_q^{\mathrm{dyn}} \times \mathbf{K}_q$. Si $\mathcal{S}$ est l'opérateur :

$$\mathcal{S} : u \in \mathbf{V} \mapsto \mathcal{S}u \in \Phi_p \text{ tel que } \tilde{m}_p\big((u, \mathcal{S}u), (0,\psi)\big) = 0, \quad \forall \psi \in \Phi_p \tag{12}$$

alors, tout comme $\mathbf{U}_\eta$, on munit $\mathbf{U}_{p,q}$ d'une structure hilbertienne avec $\langle\langle \mathsf{U}, \mathsf{U}'\rangle\rangle_{p,q} := \widetilde{m}_p((u,\mathcal{S}u),(u',0)) + K_q(v,v')$; on note $\|\cdot\|_{p,q}$ la norme associée. Afin de comparer les éléments de $\mathbf{U}_\eta$ à ceux de $\mathbf{U}_{p,q}$, on considère l'opérateur Q_η :

$$\begin{cases} \mathsf{Q}_\eta : \mathsf{U} \in \mathbf{U}_{p,q} = (u,v) \mapsto \mathsf{Q}_\eta \mathsf{U} := (u_\eta, v_\eta) \in \mathbf{U}_\eta \text{ tel que :} \\ \cdot m_p(\varepsilon)((u_\eta, \mathcal{S}_\eta u_\eta),(w,0)) = \widetilde{m}_p((u,\mathcal{S}u),(w,0)), \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_{mD}}(\Omega)^3 \\ \cdot v_\eta = v \text{ si } q = 1 \text{ et } v_\eta = (0, v_3) \text{ si } q = 3 \end{cases} \tag{13}$$

A nouveau, les arguments de [3] impliquent :

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \quad \|\mathsf{Q}_\eta \mathsf{U}\|_\eta \leqslant c\|\mathsf{U}\|_{p,q}, \quad \lim_{\eta\to\bar{\eta}} \|\mathsf{Q}_\eta \mathsf{U}\|_\eta = \|\mathsf{U}\|_{p,q}, \quad \forall \mathsf{U} \in \mathbf{U}_{p,q} \tag{14}$$

Dans les cas $q = 1$ et 3, le problème limite va mettre en jeu une équation d'évolution analogue à (6) mais gouvernée par l'opérateur antiadjoint A :

$$\begin{cases} D(\mathsf{A}) = \{\mathsf{U} = (u,v) \in \mathbf{U}_{p,q}\ ;\ v \in \mathbf{V}_q^{\mathrm{dyn}},\ \exists! z \in \mathbf{K}_q \text{ tel que} \\ \quad K_q(z,w) + \widetilde{m}_p((u,\mathcal{S}u),(w,0)) = 0,\ \forall w \in \mathbf{V}_q^{\mathrm{dyn}}\} \\ \mathsf{A}\mathsf{U} = (v,z) \end{cases} \tag{15}$$

Enfin, en définissant les réponses quasi-statiques limites s^e, s^f et $\tilde{s}_q$ (pour $q = 1, 3$) par :

$$\begin{cases} s^e(t) \in \mathbf{S}_{p,q}\ ; \quad \widetilde{m}_p(s^e(t), r) = L(r;t), \quad \forall (r,t) \in \mathbf{S}_{p,q} \times [0,T] \\ s^f(t) \in \mathbf{S}_{p,q}\ ; \quad \widetilde{m}(s^f(t), r) = \int_\Omega f\cdot w\,\mathrm{d}x, \quad \forall (r,t) \in \mathbf{S}_{p,q} \times [0,T] \\ \tilde{s}_q(t) \in \mathbf{V}_q^{\mathrm{stat}} \times \Phi_p\ ; \quad \widetilde{m}_p(\tilde{s}_q(t), r) = \int_\Omega f\cdot w\,\mathrm{d}x, \quad \forall (r,t) \in \mathbf{V}_q^{\mathrm{stat}} \times \Phi_p \times [0,T] \end{cases} \tag{16}$$

et en posant $\mathsf{U}^e = (u^e, \dot{u}^e)$, $\mathsf{U}^f = (u^f, \dot{u}^f)$ et $\widetilde{\mathsf{U}}_q = (\tilde{u}_q, \dot{\tilde{u}}_q)$, on peut alors formuler l'hypothèse supplémentaire sur les données à l'instant initial :

$$(\mathrm{H}_5) \quad \begin{cases} \cdot\text{si } q = 1,3 :\ \exists \mathsf{U}^0 \in -(\mathsf{U}^e(0) + \widetilde{\mathsf{U}}_q(0)) + D(\mathsf{A}) \text{ tel que } \lim_{\eta\to\bar{\eta}} ||\mathsf{Q}_\eta \mathsf{U}^0 - \mathsf{U}^0_\eta||_\eta = 0 \\ \cdot\text{si } q = 2,4 :\ \lim_{\eta\to\bar{\eta}} ||\mathsf{U}^0_\eta - (\mathsf{U}^e_\eta(0) + \mathsf{U}^f_\eta(0))||_\eta = 0 \end{cases}$$

qui conduit au

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses* (H_1)–(H_5)*, il existe un élément unique* $s=(u,\varphi)$ *de* $C^1([0,T];\mathbf{S}_{p,q})$ *tel que* $\lim_{\eta\to\bar\eta} |||\mathsf{P}_\eta s(t)-s(\eta)(t)|||_\eta=0$ *uniformément sur* $[0,T]$ *et vérifiant,* $\forall t\in[0,T]$:

$$\begin{cases} \textit{si } q=2 \textit{ ou } 4: \ \widetilde{m}_p(s,r)=\int_\Omega f\cdot w\,\mathrm{d}x+L(r), \quad \forall r=(w,\psi)\in\mathbf{S}_{p,q} \\ \textit{si } q=1 \textit{ ou } 3: \ K_q(\ddot u,w)+\widetilde{m}_p(s,r)=\int_\Omega f\cdot w\,\mathrm{d}x+L(r), \quad \forall r=(w,\psi)\in\mathbf{S}_{p,q} \end{cases} \tag{17}$$

u_α (*si* $q=1$) *ou* u_3 (*si* $q=3$) *étant en outre de classe* $C^2([0,T];L^2(\omega))$.

Schéma de démonstration. Dans les cas $q=1$ et 3, on observe que $\overline{\mathsf{U}}(\eta):=\mathsf{U}^r(\eta)-\widetilde{\mathsf{U}}_q(\eta)$ vérifie une équation d'évolution similaire à (6). Une décomposition analogue conduit naturellement à une équation d'évolution dans $\mathbf{U}_{p,q}$ du type $\mathsf{A}\dot{\overline{\mathsf{U}}}+\dot{\overline{\mathsf{U}}}=\overline{\mathsf{F}}$. Pour établir la convergence uniforme sur $[0,T]$ de $||\mathsf{Q}_\eta\overline{\mathsf{U}}-\overline{\mathsf{U}}(\eta)||_\eta$ vers 0, il suffit alors, dans le cadre de la théorie de Trotter [2] d'approximation des semi-groupes d'opérateurs agissant sur des espaces *variables*, d'établir que $\forall(\lambda,V)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbf{U}_{p,q}$:

$$\lim_{\eta\to\bar\eta}\left\|(I-\lambda\mathsf{A}_\eta)^{-1}\mathsf{Q}_\eta V-\mathsf{Q}_\eta(I-\lambda\mathsf{A})^{-1}V\right\|_\eta=0 \tag{18}$$

Cela et la convergence uniforme sur $[0,T]$ de $|||\mathsf{P}_\eta(\tilde s+s^e)-(\tilde s(\eta)+s^e(\eta))|||_\eta$ vers 0 découlent simplement des résultats de [3] où sont étudiés les problèmes statiques. Si $q=2,4$, en exprimant $\overline{\overline{\mathsf{U}}}_\eta(t):=(\mathsf{U}(\eta)-\mathsf{U}^e(\eta)-\mathsf{U}^f(\eta))(t)$ en fonction du groupe unitaire engendré par A_η, de la donnée initiale et du chargement, on déduit que $\lim_{\eta\to\bar\eta}||\overline{\overline{\mathsf{U}}}_\eta(t)||_\eta=0$ uniformément sur $[0,T]$. $\square$

Remarque 1. Dans les cas $q=2$ et 4, la réponse limite de la plaque au chargement électromécanique est purement quasi-statique, alors que dans les cas $q=1$ et 3 l'accélération du déplacement intervient. Il apparaît en outre un découplage entre les déplacements membranaires et de flexion essentiellement dû à (H_4). Plus précisément, cette dernière hypothèse entraîne que $\mathbf{S}_{p,q}$ est la somme directe de deux sous-espaces $\widetilde{m}_p$-polaires $\widehat{\mathbf{S}}_{p,q}$ et $\check{\mathbf{S}}_{p,q}$ (*i.e.* $\widetilde{m}_p(\hat s,\check r)=\widetilde{m}_p(\check r,\hat s)=0$, $\forall(\hat s,\check r)\in\widehat{\mathbf{S}}_{p,q}\times\check{\mathbf{S}}_{p,q}$). Ces deux sous-espaces sont $\widehat{\mathbf{S}}_{p,q}=\widehat{\mathbf{V}}\times\widehat{\Phi}_p$ et $\check{\mathbf{S}}_{p,q}=\check{\mathbf{V}}\times\check{\Phi}_p$, avec $\widehat{\Phi}_1=\Phi_1$, $\check{\Phi}_1=\{0\}$, $\widehat{\Phi}_2=\{\varphi\in\Phi_2\,;\,\varphi$ impaire en $x_3\}$ et $\check{\Phi}_2=\{\varphi\in\Phi_2\,;\,\varphi$ paire en $x_3\}$. Ainsi, si $q=1,2$ il n'y a pas de flexion et la réponse membranaire est dynamique si $q=1$, quasi-statique si $q=2$. Si $q=3,4$ la réponse membranaire est quasi-statique tandis que celle en flexion est dynamique si $q=3$ et quasi-statique si $q=4$. Dans ces deux derniers cas, l'équation fournissant la flexion ne met pas en jeu le potentiel électrique limite si $p=1$.

Remarque 2. Le transport sur Ω^ε, par π^ε et « une mise à l'échelle inverse » des états, du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } s=(u,\varphi)\in\mathbf{V}\times\Phi_p \text{ tel que} \\ \langle\ddot u,w\rangle_\eta+\widetilde{m}_p(s,r)=\int_\Omega f_\eta\cdot w\,\mathrm{d}x+L_\eta(r), \quad \forall r=(w,\psi)\in\mathbf{V}\times\Phi_p \end{cases} \tag{19}$$

fournit une modélisation du comportement dynamique d'une plaque piézoélectrique mince d'épaisseur 2ε et de densité $\rho\delta(\hat x,x_3/\varepsilon)$.

Références

[1] A. Sene, Thèse, Université Joseph Fourier-Grenoble I, 1999.

[2] H.F. Trotter, Approximation of semi-groups of operators, Pacific J. Math. 28 (1958) 887–919.

[3] T. Weller, C. Licht, Analyse asymptotique de plaques minces linéairement piézoélectriques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 309–314.

[4] B. Miara, Contrôlabilité d'un corps piézoélectrique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2001) 267–270.