



Eléments finis stochastiques en élasticité linéaire

Bruno Sudret^a, Marc Berveiller^{a,b}, Maurice Lemaire^b

^a EDF R&D, département matériaux et mécanique des composants, site des Renardières, 77818 Moret-sur-Loing cedex, France

^b IFMA-LaRAMA, campus de Clermont-Ferrand, Les Cézeaux, BP 265, 63175 Aubière cedex, France

Reçu le 13 février 2004 ; accepté le 18 février 2004

Disponible sur Internet le 5 mai 2004

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

Résumé

La méthode des éléments finis stochastiques présentée dans cette Note consiste à représenter sous forme probabiliste la réponse d'un système dont les propriétés des matériaux constitutifs et les chargements sont des variables aléatoires. Pour ce faire, chaque variable aléatoire est développée en série de polynômes d'Hermite d'une variable gaussienne centrée réduite. La réponse (e.g. le vecteur des déplacements nodaux) est développée sur le chaos polynomial. Les coefficients de ce développement sont obtenus par une méthode de type Galerkin dans l'espace de probabilité. *Pour citer cet article : B. Sudret et al., C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A stochastic finite element method in linear mechanics. The stochastic finite element method presented in this Note consists in representing in a probabilistic form the response of a linear mechanical system whose material properties and loading are random. Each input random variable is expanded into a Hermite polynomial series in standard normal random variables. The response (e.g., the nodal displacement vector) is expanded onto the so-called polynomial chaos. The coefficients of the expansion are obtained by a Galerkin-type method in the space of probability. *To cite this article: B. Sudret et al., C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; Eléments finis stochastiques ; Chaos polynomial ; Analyse de sensibilité ; Fiabilité des structures

Keywords: Computational solid mechanics; Stochastic finite elements; Polynomial chaos; Sensitivity analysis; Structural reliability

Abridged English version

The Stochastic Finite Element Method presented in this Note aims at representing the response of a linear mechanical model, whose material properties and/or loading are random, in terms of a series expansion in the probabilistic space. Two main steps are identified:

Adresses e-mail : bruno.sudret@edf.fr (B. Sudret), marc.berveiller@edf.fr (M. Berveiller), maurice.lemaire@ifma.fr (M. Lemaire).

- expansion of the input random variables in terms of Hermite polynomials in standard normal variables. Two methods are proposed, namely the *projection* and the *collocation* methods. Both approaches provide similar results in terms of accuracy;
- expansion of the response (e.g., the random vector of nodal displacements) onto the *polynomial chaos* [1], i.e., the set of multi-dimensional Hermite polynomials in standard normal variables. The coefficients of the expansion are computed by a Galerkin approach.

The post-processing of the resulting expansion in order to perform sensitivity analysis (i.e., computing the mean and standard deviation of the response) and reliability analysis (i.e., computing the probability of failure associated to a failure criterion) is finally presented.

1. Introduction

La méthode des éléments finis stochastiques spectraux proposée par Ghanem et Spanos [1] permet de caractériser la réponse aléatoire d'un système mécanique dont une propriété matériau (par exemple le module d'Young) est représentée par un champ aléatoire gaussien. Elle fournit une représentation intrinsèque du vecteur aléatoire des déplacements nodaux sous forme d'un développement polynomial en variables aléatoires gaussiennes centrées réduites (v.a.g.c.r.). S'appuyant sur le même type de représentation, cette communication propose une méthode générale pour résoudre des problèmes de mécanique linéaire dans lesquels les paramètres (propriétés des matériaux et chargements) sont des variables aléatoires en nombre et de loi quelconques.

2. Développement de variables aléatoires sur le chaos polynomial

Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie. On peut développer X sur la base des polynômes d'Hermite de gaussiennes [2] :

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H_i(\xi) \quad (1)$$

où ξ est une v.a.g.c.r. de densité de probabilité $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $\{a_i, i = 0, \dots, \infty\}$ sont les coefficients à calculer et $\{H_i(x), i = 0, \dots, \infty\}$ sont les polynômes d'Hermite définis par :

$$H_i(x) = (-1)^i e^{x^2/2} \frac{d}{dx} (e^{-x^2/2})$$

Pour évaluer ces coefficients, deux méthodes sont proposées. La *méthode de projection* [3] utilise l'orthogonalité des polynômes d'Hermite par rapport à la mesure gaussienne. De l'Éq. (1), on tire :

$$E[X H_i(\xi)] = a_i E[H_i^2(\xi)] = a_i \cdot i! \quad (2)$$

où $E[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique. Soit $F_X(x)$ la fonction de répartition de X . En utilisant la transformation isoprobabiliste $X \rightarrow \xi : F_X(X) = \Phi(\xi)$ [4], l'Éq. (2) se réécrit :

$$a_i = \frac{1}{i!} E[X H_i(\xi)] = \frac{1}{i!} \int_{\mathbb{R}} F_X^{-1}(\Phi(t)) H_i(t) \varphi(t) dt \quad (3)$$

Cette intégrale peut être évaluée analytiquement si X suit une loi gaussienne ou lognormale, numériquement sinon [5]. La méthode de projection calcule donc une approximation numérique de l'intégrale (3) représentant l'expression *exacte* de chaque coefficient.

La *méthode de collocation* [6] s’appuie sur une minimisation au sens des moindres carrés de l’écart entre la variable X et l’approximation tronquée $\tilde{X} = \sum_{i=0}^p a_i H_i(\xi)$, l’ordre p étant choisi a priori. Considérons n réalisations $\{\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}\}$. La transformation isoprobabiliste fournit n réalisations $\{X^{(i)} = F_X^{-1} \circ \Phi(\xi^{(i)}), i = 1, \dots, n\}$. La minimisation par rapport aux coefficients a_i de l’écart : $\Delta X = \sum_{i=1}^n (X^{(i)} - \tilde{X}^{(i)})^2 = \sum_{i=1}^n (X^{(i)} - \sum_{j=0}^p a_j H_j(\xi^{(i)}))^2$ conduit au système linéaire suivant, dont la résolution fournit les coefficients $\{a_i, i = 0, \dots, p\}$.

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n H_0(\xi^{(i)})H_0(\xi^{(i)}) & \dots & \sum_{i=1}^n H_0(\xi^{(i)})H_p(\xi^{(i)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n H_p(\xi^{(i)})H_0(\xi^{(i)}) & \dots & \sum_{i=1}^n H_p(\xi^{(i)})H_p(\xi^{(i)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X^{(i)} H_0(\xi^{(i)}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n X^{(i)} H_p(\xi^{(i)}) \end{pmatrix}$$

La méthode de collocation calcule donc le meilleur jeu de coefficients pour une troncature a priori à l’ordre p . L’approximation numérique résulte de la résolution du système linéaire. Des résultats similaires sont obtenus en terme de précision [5,7] et l’une ou l’autre des méthodes peut être utilisée dans la suite.

3. Éléments finis stochastiques en élasticité linéaire

La procédure d’éléments finis stochastiques (EFS) proposée dans cette communication s’appuie sur la méthode classique des éléments finis, dont on utilisera les notations habituelles [8]. La discrétisation des équations de l’élasticité linéaire conduit à la résolution d’un système linéaire de taille N_{ddl} (nombre de degrés de liberté) :

$$\mathbf{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}$$

Dans cette équation, \mathbf{K} est la matrice de rigidité, \underline{U} le vecteur des déplacements nodaux et \underline{F} le vecteur des forces nodales. Du fait de l’introduction des paramètres aléatoires, la réponse du système dans la procédure EFS est le vecteur *aléatoire* des déplacements nodaux $\underline{U}(\theta)$ (le symbole θ rappelle le caractère aléatoire). Ce vecteur est développé sur la base du chaos polynomial [1] :

$$\underline{U}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{U}_j \Psi_j(\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M) \tag{4}$$

Dans cette expression, $\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M$ désignent les v.a.g.c.r. qui apparaissent dans la discrétisation probabiliste des M variables d’entrée, $\{\Psi_j(\{\xi_k\}_{k=1}^M)\}$ sont les polynômes d’Hermite multidimensionnels et les vecteurs $\{\underline{U}_j\}_{j=0}^{\infty}$ sont les inconnues du problème. Notons que les développements des variables d’entrée (Éq. (1)) peuvent être injectés dans la base du chaos polynomial par une simple procédure d’affectation :

$$X^i = \sum_{j=0}^{\infty} x_j^i H_j(\xi_i) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{x}_j^i \Psi_j(\{\xi_k\}_{k=1}^M) \tag{5}$$

3.1. Introduction des propriétés matériaux et du chargement aléatoires

Dans le cas déterministe, la matrice de rigidité \mathbf{K} obtenue par assemblage des matrices élémentaires k_e s’écrit [8] :

$$\mathbf{K} = \bigoplus_e k_e = \bigoplus_e \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{B} \, d\Omega_e \tag{6}$$

où \mathbf{B} est la matrice (déterministe) donnant les composantes de déformation en fonction des déplacements nodaux et \mathbf{D}_e est la matrice d'élasticité, qui peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{D}_e = E[\tilde{\lambda}(\nu)\mathbf{D}_1 + 2\tilde{\mu}(\nu)\mathbf{D}_2], \quad \tilde{\lambda}(\nu) = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \tilde{\mu}(\nu) = \frac{1}{2(1+\nu)}$$

Dans cette expression, \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 sont des matrices déterministes dont l'expression est liée au problème traité (2D ou 3D, déformations ou contraintes planes). En développant séparément la variable aléatoire E et les fonctions $\tilde{\lambda}(\nu)$ et $\tilde{\mu}(\nu)$ pour chaque élément selon (5), on obtient :

$$\mathbf{D}_e = \left(\sum_{i=0}^{\infty} e_i \Psi_i(\xi_E) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} [\tilde{\lambda}_j \Psi_j(\xi_\nu) \mathbf{D}_1 + \tilde{\mu}_j \Psi_j(\xi_\nu) \mathbf{D}_2] \right) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j \mathbf{D}_1 + \beta_j \mathbf{D}_2) \Psi_j(\{\xi_k\}_{k=1}^M) \quad (7)$$

Pour obtenir cette dernière expression, on projette les produits polynomiaux $\Psi_i(\xi_E)\Psi_j(\xi_\nu)$ sur le chaos polynomial $\Psi_j(\{\xi_k\}_{k=1}^M)$ [7]. Finalement, en reportant (7) dans (6), on obtient la matrice de rigidité stochastique :

$$\mathbf{K}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{K}_j \Psi_j(\theta) \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_j = \bigoplus_e \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \cdot (\alpha_j \mathbf{D}_1 + \beta_j \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{B} \, d\Omega_e \quad (8)$$

Par ailleurs, le vecteur des efforts nodaux s'écrit :

$$\underline{\mathbf{F}}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_q} q^i(\theta) \underline{\mathbf{F}}_i \quad (9)$$

où N_q est le nombre de chargements, $\{q^i(\theta)\}_{i=1}^{N_q}$ sont les paramètres aléatoires de chargement et $\underline{\mathbf{F}}_i$ les modes de chargement (ou encore les vecteurs des efforts nodaux unitaires associés à chaque mode de chargement). Les coefficients $\{q^i\}_{i=1}^{N_q}$ sont développés sur le chaos polynomial (5) et injectés dans (9), ce qui donne le vecteur aléatoire des efforts nodaux :

$$\underline{\mathbf{F}}(\theta) = \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{j=0}^{\infty} q_j^i \Psi_j(\theta) \underline{\mathbf{F}}_i \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \underline{\mathbf{F}}_j \Psi_j(\theta) \quad (10)$$

3.2. Écriture et résolution du système

En utilisant les Éqs. (4), (8) et (10), l'équation d'équilibre stochastique s'écrit :

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}_i \Psi_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \underline{\mathbf{U}}_j \Psi_j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \underline{\mathbf{F}}_j \Psi_j \quad (11)$$

Une troncature à l'ordre P des séries apparaissant dans l'Éq. (11) donne le résidu :

$$\varepsilon_P = \left(\sum_{i=0}^{P-1} \mathbf{K}_i \Psi_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{P-1} \underline{\mathbf{U}}_j \Psi_j \right) - \sum_{j=0}^{P-1} \underline{\mathbf{F}}_j \Psi_j$$

Les coefficients $\{\underline{\mathbf{U}}_0, \dots, \underline{\mathbf{U}}_{P-1}\}$ sont calculés en minimisant ce résidu par une méthode de Galerkin. Cette minimisation est équivalente à imposer que le résidu soit orthogonal au sous-espace engendré par les vecteurs $\{\Psi_j\}_{j=0}^{P-1}$ [1], soit $E[\varepsilon_P \Psi_k] = 0$, $k = \{0, \dots, P-1\}$. Cela conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{0,0} & \cdots & \mathbf{K}_{0,P-1} \\ \mathbf{K}_{1,0} & \cdots & \mathbf{K}_{1,P-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{P-1,0} & \cdots & \mathbf{K}_{P-1,P-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}_0 \\ \underline{\mathbf{U}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{U}}_{P-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{F}}_0 \\ \underline{\mathbf{F}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{F}}_{P-1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

où $\mathbf{K}_{j,k} = \sum_{i=0}^{P-1} d_{ijk} \mathbf{K}_i$ et $d_{ijk} = E[\Psi_i \Psi_j \Psi_k]$. La résolution du système fournit les coefficients $\{\underline{U}_j\}_{j=0}^{P-1}$, ce qui caractérise complètement à l'ordre P la réponse aléatoire du système (Éq. (4)).

3.3. Post-traitements

A partir du vecteur aléatoire des déplacements nodaux, on peut calculer les déformations et contraintes (aléatoires) dans chaque élément, qui s'expriment également sur la base du chaos polynomial [7]. Notons symboliquement $\underline{s} = \sum_{j=0}^{P-1} \underline{s}_j \Psi_j(\{\xi_k\}_{k=1}^M)$ le vecteur regroupant toutes ces quantités. La moyenne m_s et la variance $\text{Var}[s]$ d'une composante s de \underline{s} s'obtiennent comme suit : $m_s = s_0$, $\text{Var}[s] = \sum_{i=1}^{P-1} s_i E[\Psi_i^2]$. Il est également possible d'effectuer des *analyses de fiabilité* à partir d'un calcul EFS [5,7,9]. La fiabilité des structures [4] cherche à calculer la probabilité de défaillance d'une structure associée à un critère de défaillance. Notons \underline{X} le vecteur aléatoire regroupant les variables aléatoires d'entrée, $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ sa densité conjointe de probabilité et $S(\underline{X})$ la réponse mécanique du système. Pour chaque mode de défaillance de la structure, une fonction d'état limite $g(S(\underline{X}))$ est définie dans l'espace des paramètres. Par convention, le domaine de sûreté est défini par $D_s = \{\underline{X} | g(S(\underline{X})) > 0\}$, et le domaine de défaillance par $D_f = \{\underline{X} | g(S(\underline{X})) \leq 0\}$. La frontière $\{\underline{X} | g(S(\underline{X})) = 0\}$ est la *surface d'état limite*. La probabilité de défaillance P_f de la structure est donnée par : $P_f = \text{Prob}[g(S(\underline{X})) \leq 0] = \int_{g(S(\underline{X})) \leq 0} f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x}$. Lorsque l'on a effectué au préalable une analyse du problème par la procédure EFS, on dispose d'une représentation de la réponse sur le chaos polynomial. Toute fonction d'état limite s'exprime donc de façon approchée sous la forme : $g(\underline{s}(\underline{X})) \approx g(\sum_{j=0}^{P-1} \underline{s}_j \Psi_j)$. Par exemple, si l'on considère un état limite de service lié au dépassement d'un seuil u_s par une composante de déplacement u^{i_0} , on peut mettre la fonction d'état limite sous la forme :

$$g(\underline{s}(\underline{X})) = u_s - u^{i_0} \equiv u_s - \sum_{j=0}^{P-1} u_j^{i_0} \Psi_j(\{\xi_k\}_{k=1}^M) \quad (13)$$

Dans ce cas, la fonction d'état limite peut être considérée comme une *surface de réponse polynomiale* résultant de l'analyse EFS. On peut alors appliquer aisément la méthode FORM (*First Order Reliability Method*, [4]) pour trouver l'indice de fiabilité β et une approximation de la probabilité de défaillance $P_f \approx P_{f,\text{FORM}} = \Phi(-\beta)$. La simulation de Monte Carlo est également applicable à un coût de calcul raisonnable puisque la fonction g est définie analytiquement par (13).

4. Exemple d'application : tassement d'une fondation

On considère un massif de sol linéairement élastique formé de deux couches d'épaisseur totale $t = 30$ m reposant sur un substratum rigide. Deux charges sont réparties sur un segment de longueur $2B$ de sa surface libre. Le schéma de la fondation ainsi que les données relatives aux différentes variables aléatoires sont rassemblées sur la Fig. 1. Les variables aléatoires sont indépendantes (Tableau 1). Par symétrie, seule la moitié de la fondation a été modélisée. Le maillage est constitué de 99 noeuds et 80 éléments (quadrangles QUAD4 linéaires). Le problème est traité en déformations planes. Les déplacements horizontaux des bords droit et gauche (symétrie) sont imposés nuls.

4.1. Analyse statistique

Dans ce paragraphe, on compare les quatre premiers moments statistiques de U^A (déplacement vertical du noeud supérieur gauche du maillage situé sur l'axe de symétrie) donnés par MEFS avec les valeurs données par une simulation de Monte Carlo (10000 tirages) réalisée à l'aide du couplage entre le code aux éléments finis Code_Aster® et le code probabiliste PROBAN. Le tassement calculé aux valeurs moyennes est $u_{\text{max}} = -0,0913$ m. Les résultats sont donnés dans le Tableau 2. Pour obtenir de bons résultats pour les quatre premiers moments, il faut utiliser l'ordre 3 pour le chaos polynomial, l'ordre 2 ne permettant d'obtenir de bons résultats que pour les 2 premiers moments.

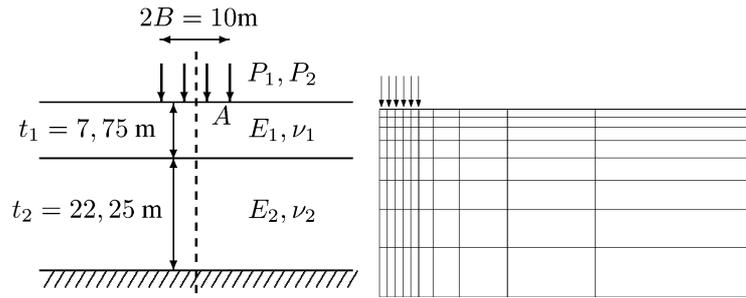


Fig. 1. Schéma de la fondation – maillage associé.

Fig. 1. Sketch of the foundation – the associated mesh.

Tableau 1
Paramètres des variables aléatoiresTable 1
Parameters of the random variables

Notation	Loi	Moyenne	CV*
E_1	Lognormale	50 MPa	0,2
E_2	Lognormale	50 MPa	0,2
P_1	Lognormale	0,2 MPa	0,3
P_2	Weibull	0,2 MPa	0,2
Notation	Loi	Borne inf.	Borne sup.
ν_1	Uniforme	0,28	0,32
ν_2	Uniforme	0,28	0,32

* CV : coefficient de variation.

Tableau 2
Comparaison des quatre premiers moments statistiques du déplacement maximalTable 2
Comparison of the first 4 statistical moments of maximum displacement

Moment	Simulation	MEFS	
		$p = 2$	$p = 3$
U^A / u_{\max}	1,04	1,04	1,04
Coeff Var (en %)	23	22	23
Asymétrie	-0,45	-0,42	-0,45
Aplatissement	3,39	3,28	3,39

4.2. Analyse fiabiliste

On s'intéresse à la fiabilité de la fondation en service vis-à-vis d'un critère de tassement admissible. La fonction d'état limite (Éq. (13)) se réduit à $g(\mathbf{U}) = u_S - U^A$. Le Tableau 3 rassemble les valeurs de l'indice de fiabilité pour différents seuils u_S . Les valeurs de référence sont obtenues à l'aide d'un couplage mécano-fiabiliste entre le Code_Aster® et PROBAN. La méthode FORM a été utilisée pour calculer les indices de fiabilité. Tout comme pour les moments, les meilleurs résultats sont obtenus avec l'ordre 3 du chaos polynomial. Les indices de fiabilité sont bien approximés sur une grande plage de valeur, ce qui prouve que la méthode permet d'avoir une réponse précise même dans les queues de distribution (i.e. fort indice de fiabilité ou encore très faible probabilité de défaillance).

Tableau 3
Indice de fiabilité β pour différents seuils
Table 3
Reliability index β for different thresholds

Seuil (m)	β_{ref} FORM	β_{MEFS}	
		$p = 2$	$p = 3$
-0,10	0,3353	0,3195	0,3286
-0,12	1,1683	1,1553	1,1662
-0,15	2,2470	2,2634	2,2496
-0,20	3,7038	3,8483	3,7334
-0,25	4,8632	5,2171	4,9510
-0,30	5,8171	6,4388	5,9911

5. Conclusion

Cette Note présente une méthode aux éléments finis stochastiques développée dans le cadre de la mécanique linéaire. La méthode s'appuie sur une double discrétisation du problème aux limites, dans l'espace physique (comme pour les éléments finis classiques) et dans l'espace de probabilité. On obtient une représentation intrinsèque de la réponse (ici, le vecteur des déplacements nodaux) comme développement sur une base de polynômes de gaussiennes. Les résultats peuvent être exploités pour des analyse de sensibilité et de fiabilité à un coût de calcul marginal négligeable. Les exemples d'application présentés ici et dans d'autres publications [5, 7,9] montrent que la méthode est précise à condition d'utiliser des développement polynomiaux à l'ordre 3 des variables d'entrée et de la réponse.

Les travaux en cours cherchent à proposer des méthodes de calcul alternatives des coefficients de la réponse, qui ne nécessiteraient pas l'assemblage et la résolution du système (12), mais plutôt un certain nombre de calculs déterministes judicieusement choisis. Cette approche ouvrira la voie pour aborder des problèmes de mécanique probabiliste non linéaires.

Références

- [1] R.-G. Ghanem, P.-D. Spanos, Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach, Springer-Verlag, 1991.
- [2] P. Malliavin, Stochastic Analysis, Springer, 1997.
- [3] B. Puig, F. Poirion, C. Soize, Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion: convergences, Prob. Engrg. Mech. 17 (2002) 253–264.
- [4] O. Ditlevsen, H. Madsen, Structural Reliability Methods, Wiley, Chichester, 1996.
- [5] B. Sudret, M. Berveiller, M. Lemaire, Eléments finis stochastiques spectraux, nouvelles perspectives, in : Proc. 16eme Congrès Français de Mécanique, Nice, 2003.
- [6] S.S. Isukapalli, Uncertainty analysis of transport-transformation models, Thèse de doctorat, The State University of New Jersey, 1999.
- [7] M. Berveiller, B. Sudret, Thèse sur les éléments finis stochastiques, Rapport d'avancement n°1, Rapport interne HT-26/03/039/A, EDF R&D, 2003.
- [8] O.-C. Zienkiewicz, R.-L. Taylor, The Finite Element Method, fifth ed., Butterworth Heinemann, 2000.
- [9] B. Sudret, M. Berveiller, M. Lemaire, Application of a stochastic finite element procedure to reliability analysis, in: Proc. 11th IFIP WG7.5 Conference, Banff, Canada, 2003.