



# Méthode particulière anisotrope pour des écoulements de fluide visqueux

Anthony Beaudoin, Serge Huberson, Elie Rivoalen\*

Laboratoire de mécanique, physique et géosciences, université du Havre, 25, rue Philippe Lebon, BP 540, 76058 Le Havre cedex, France

Reçu et accepté le 9 mars 2004

Disponible sur Internet le 5 mai 2004

Présenté par Roland Glowinski

---

## Résumé

L'extension de la méthode particulière anisotrope au cas des fluides visqueux est proposée. L'équation de transport des moments est modifiée pour prendre en compte les effets de la viscosité du fluide. Le terme de diffusion est calculé avec la méthode PSE et la définition des moments. Cette modification de l'équation de transport des moments introduit des moments géométriques et leur équation de transport. La méthode particulière anisotrope a été comparée à la méthode particulière classique en étudiant la dynamique de deux tourbillons co-rotatifs. *Pour citer cet article* : A. Beaudoin et al., *C. R. Mecanique 332 (2004)*. © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Anisotropic particle method for viscous flows.** The anisotropic particle method has been extended to the case of viscous flows. The moment transport equation is modified to account for viscous effects. The diffusion term has been evaluated by using the PSE method and the particle moments. The modified transport equation includes geometrical moments for which a specific transport equation has been introduced. The study of the evolution of two corotating vortices allowed the comparison of the anisotropic particle method with the usual particle method. *To cite this article*: A. Beaudoin et al., *C. R. Mecanique 332 (2004)*. © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés* : Mécanique des fluides numérique ; Méthode particulière ; Ecoulement visqueux

*Keywords*: Computational fluid mechanics; Particle method; Viscous flow

---

## Abridged English version

The two-dimensional flow of an incompressible viscous fluid is governed by the Navier–Stokes equations, the vorticity-velocity formulation of which is given by Eqs. (1) and (2). In the anisotropic particle method introduced in [1], a particle  $\mathcal{P}_i$  is defined by its location  $\mathbf{r}_i$  and the moments of the part of the vorticity represented by this

---

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [anthony.beaudoin@univ-lehavre.fr](mailto:anthony.beaudoin@univ-lehavre.fr) (A. Beaudoin), [serge.huberson@univ-lehavre.fr](mailto:serge.huberson@univ-lehavre.fr) (S. Huberson), [elie.rivoalen@univ-lehavre.fr](mailto:elie.rivoalen@univ-lehavre.fr) (E. Rivoalen).

particle. These moments  $M_{nm}^i$  are defined by Eq. (3). The expression of the moment transport equation is given by Eq. (4).

For a viscous fluid, the integral of the vorticity transport equation which appears in the right-hand side of the previous equation is not zero. The first step of the evaluation of this integral consists in replacing the diffusion operator by an integral operator as in the particle strength exchange method [2,3]. The diffusion operator is then defined by Eq. (6). The second step consists in discretising this integral operator by means of particles  $\mathcal{P}_i$ . The geometrical moments denoted  $G_{nm}^i$  and defined by Eq. (9), appear in this discretisation. They account for the particle shape distortion due to the flow. A specific transport equation was derived for these geometrical moments (Eq. (11)). The building of a smooth approximation of the vorticity field from the particles has to be modified in order to take advantage of the knowledge of the moments  $M_{nm}^i$ . By using a Taylor expansion for the smoothing function  $\xi_\varepsilon$  (Eq. (13)), the definition of the moments and the definition of the particles, this modified approximation of the vorticity can be formulated by Eq. (14).

As in [1], the present method has been applied to the study of the evolution of two co-rotating vortices. The particles moment were accounted for up to second order. The viscosity of the fluid  $\nu$  has been fixed to 0.01. The initial computational domain is a  $10 \times 10$  square. The initial vorticity field is defined by Eq. (15). It has been discretised by means of a square grid with uniform path  $h$  ranging from 0.06 to 0.20. Each  $h \times h$  cell constitutes one particle. The resulting number of particles varies from 2652 to 28 056. For the anisotropic particle method, the evolution of the particle  $\mathcal{P}_i$  is governed by Eqs. (16) to (24). A fourth-order Runge–Kutta scheme was used for the time integration of the convective part of the vorticity transport equation and an Euler explicit scheme for the diffusive part. The two components of the velocity have been computed with Eqs. (25) and (26).

To compare the accuracy of the anisotropic particle method and that of the usual particle method, the  $L^2$  error  $Er$  defined by Eq. (27) has been computed on a grid. For the evaluation of the vorticity field, the smoothing function  $\xi_\varepsilon$  was defined by Eq. (28). A reference solution was computed using the usual particle method and a grid path  $h = 0.06$ . In Fig. 1, the vorticity isovalues have been plotted for the reference solution. In Fig. 2, the error  $Er$  with respect to time  $t$  has been reported for two initial discretisations:  $h = 0.10$  and  $h = 0.20$  for the two methods. It was observed that the accuracy of the results obtained with the present method was improved: a smaller number of particles was used although these results were obtained at the expense of an increased complexity.

## 1. Introduction

Dans une première Note [1], une méthode particulière basée sur la notion de moments a été présentée pour simuler l'écoulement d'un fluide parfait incompressible. Dans cette méthode, les particules sont non seulement définies par leur position et leur circulation mais aussi par les moments de répartition de la vorticité interne à la particule. Une équation de transport est associée à ces moments. L'extension de cette méthode à des écoulements de fluide visqueux incompressible est proposée dans cette note. La prise en compte de la viscosité du fluide introduit un nouveau terme dans l'équation de transport des moments. Ce terme est égal à l'intégrale de l'opérateur de diffusion appliqué au tourbillon sur la particule. L'évaluation de ce terme est réalisée en deux étapes : la première consiste à calculer l'opérateur de diffusion avec la méthode PSE [2,3] et la seconde à discrétiser cette intégrale en introduisant les moments associés aux particules.

## 2. Méthode des moments

L'écoulement bidimensionnel d'un fluide réel incompressible est régi par les équations de Navier–Stokes, qui s'expriment en formulation vitesse tourbillon  $(\mathbf{u}, \omega)$  :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Dans la méthode des moments [1], les particules  $\mathcal{P}_i$  sont définies par une position moyenne  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$  et des moments  $M_{nm}^i$  caractérisant la répartition de tourbillon  $\omega$  dans la particule  $\mathcal{P}_i$ . Ces moments sont définis par :

$$M_{nm}^i = \int_{\sigma_i} \omega(\mathbf{r}') (x' - x_i)^n (y' - y_i)^m dx' dy' \quad (3)$$

A ces moments, on associe une équation de transport dont l'expression est :

$$\begin{aligned} \frac{dM_{nm}^i}{dt} = & \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^n (y' - y_i)^m \left( \frac{\partial \omega(\mathbf{r}')}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}') \omega(\mathbf{r}')) \right) dx' dy' \\ & + n \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{nm}^i + n \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{n-1m+1}^i + m \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{nm}^i + m \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{n+1m-1}^i \end{aligned} \quad (4)$$

Dans le cas d'un fluide visqueux, l'intégrale qui apparait dans cette équation est notée  $H_{mn}^i$ , elle est ici non nulle et l'intégrand s'exprime en fonction de l'Éq. (1) :

$$H_{mn}^i = \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^n (y' - y_i)^m v \Delta \omega(\mathbf{r}') dx' dy' \quad (5)$$

Pour calculer cette intégrale, on va d'abord approcher l'opérateur de diffusion par un opérateur intégral comme dans la méthode PSE. Nous utilisons le noyau de l'équation de la chaleur  $\mathcal{H}$  comme dans [2]. Cela donne pour l'opérateur de diffusion :

$$v \Delta \omega(\mathbf{r}') = \frac{1}{\delta t} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\omega(\mathbf{r}) - \omega(\mathbf{r}')) dx dy \quad (6)$$

avec

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi v \delta t} \exp\left(-\frac{r^2}{4v\delta t}\right) \quad (7)$$

En injectant cette expression dans l'Éq. (5), on obtient :

$$H_{mn}^i = \frac{1}{\delta t} \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^n (y' - y_i)^m \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{H}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\omega(\mathbf{r}) - \omega(\mathbf{r}')) dx dy dx' dy' \quad (8)$$

L'intégrale sur le domaine  $\mathbb{R}^2$  est discrétisée en particules tourbillonnaires. Dans cette discrétisation, il apparait les moments  $M_{nm}^i$  mais aussi des moments géométriques notés  $G_{nm}^i$  :

$$G_{nm}^i = \int_{\sigma_i} (x' - x_i)^n (y' - y_i)^m dx' dy' \quad (9)$$

Ces moments géométriques représentent la distorsion de la forme des particules résultant des déformations qu'elles subissent au cours de leur histoire. La forme discrète de  $H_{mn}^i$  s'écrit alors :

$$H_{mn}^i = \frac{1}{\delta t} \sum_j \mathcal{H}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) (G_{nm}^i M_{00}^j - M_{nm}^i G_{00}^j) \quad (10)$$

Une équation de transport doit être aussi formulée pour le moment  $G_{nm}^i$ . Elle est construite de façon similaire à celle du moment  $M_{nm}^i$  [1] :

$$\frac{dG_{nm}^i}{dt} = n \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial x} G_{nm}^i + n \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial y} G_{n-1m+1}^i + m \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial y} G_{nm}^i + m \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial x} G_{n+1m-1}^i \quad (11)$$

La méthode des moments est complétée par l'introduction des moments dans l'évaluation du champ tourbillonnaire  $\omega$ . Classiquement le champ tourbillonnaire, est donné par :

$$\omega(\mathbf{r}) = \sum_i \omega_i \quad \text{avec} \quad \omega_i = \int_{\sigma_i} \omega(\mathbf{r}') \xi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dx' dy' \quad (12)$$

avec  $\xi_\varepsilon$  une fonction régulière qui dépend du paramètre  $\varepsilon$  et dont la limite, quand  $\varepsilon$  tend vers 0 est la mesure de Dirac. Elle est développée par rapport à la position moyenne  $\mathbf{r}_i$  de la particule  $\mathcal{P}_i$  à l'ordre 3 :

$$\xi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2} \frac{(-1)^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_\varepsilon}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) (x' - x_i)^{\alpha_1} (y' - y_i)^{\alpha_2} + \mathcal{O}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3) \quad (13)$$

Dans l'expression du champ tourbillonnaire  $\omega$ , la fonction  $\xi_\varepsilon$  et ses dérivées peuvent être extraites de l'intégrale. En se rappelant la définition des moments et celle de la position moyenne de la particule  $\mathcal{P}_i$ , on trouve l'approximation suivante, du champ tourbillonnaire  $\omega$  :

$$\omega(\mathbf{r}) = \sum_i M_{00}^i \xi_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + M_{11}^i \frac{\partial^2 \xi_\varepsilon}{\partial x \partial y}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \left( M_{20}^i \frac{\partial^2 \xi_\varepsilon}{\partial x^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + M_{02}^i \frac{\partial^2 \xi_\varepsilon}{\partial y^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right) \quad (14)$$

### 3. Application numérique

Le modèle est appliqué à l'étude de deux tourbillons co-rotatifs avec une viscosité  $\nu$  de 0,01. A l'instant initial le champ tourbillonnaire est donné par :

$$\omega(\mathbf{r}) = \exp(-2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) + \exp(-2|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1|) \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}_1 = (2, 5, 0) \quad (15)$$

Le domaine tourbillonnaire est un carré de coté  $L = 10$  discrétisé en particules  $\mathcal{P}_i$ . Le support associé à chaque particule est un carré de coté  $h$  qui varie de 0,06 à 0,2 faisant évoluer le nombre de particules de 2652 à 28056. Dans cette validation, les moments ont été pris en compte jusqu'à l'ordre ( $n + m \leq 2$ ). L'évolution d'une particule  $\mathcal{P}_i$  est donnée par le système d'équations suivant :

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_i) \quad (16)$$

$$\frac{dM_{00}^i}{dt} = \frac{1}{\delta t} \sum_j \mathcal{H}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) (G_{00}^i M_{00}^j - M_{00}^i G_{00}^j) \quad (17)$$

$$\frac{dM_{11}^i}{dt} = \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{02}^i + \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{20}^i + (M_{20}^i - M_{02}^i) \frac{\omega_i}{4} + \frac{1}{\delta t} \sum_j \mathcal{H}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) (G_{11}^i M_{00}^j - M_{11}^i G_{00}^j) \quad (18)$$

$$\frac{dM_{20}^i}{dt} = 2 \left( \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{20}^i + \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{11}^i \right) - M_{11}^i \frac{\omega_i}{2} + \frac{1}{\delta t} \sum_j \mathcal{H}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) (G_{20}^i M_{00}^j - M_{20}^i G_{00}^j) \quad (19)$$

$$\frac{dM_{02}^i}{dt} = 2 \left( \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial y} M_{02}^i + \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial x} M_{11}^i \right) + M_{11}^i \frac{\omega_i}{2} + \frac{1}{\delta t} \sum_j \mathcal{H}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) (G_{02}^i M_{00}^j - M_{02}^i G_{00}^j) \quad (20)$$

$$\frac{dG_{00}^i}{dt} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{dG_{11}^i}{dt} = \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial y} G_{02}^i + \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial x} G_{20}^i + (G_{20}^i - G_{02}^i) \frac{\omega_i}{4} \quad (22)$$

$$\frac{dG_{20}^i}{dt} = 2 \left( \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial x} G_{20}^i + \frac{\partial u(\mathbf{r}_i)}{\partial y} G_{11}^i \right) - G_{11}^i \frac{\omega_i}{2} \tag{23}$$

$$\frac{dG_{02}^i}{dt} = 2 \left( \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial y} G_{02}^i + \frac{\partial v(\mathbf{r}_i)}{\partial x} G_{11}^i \right) + G_{11}^i \frac{\omega_i}{2} \tag{24}$$

Pour la discrétisation en temps de ces équations, on utilise un schéma de Runge–Kutta d’ordre 4 pour la partie convective et un schéma d’Euler explicite d’ordre 1 pour la partie diffusive. Les valeurs initiales des moments sont :  $M_{00}^i = \omega(\mathbf{r}_i)h^2$ ,  $M_{20}^i = \omega(\mathbf{r}_i)h^4/12$ ,  $M_{02}^i = \omega(\mathbf{r}_i)h^4/12$ ,  $M_{11}^i = 0$ ,  $G_{00}^i = h^2$ ,  $G_{20}^i = h^4/12$ ,  $G_{02}^i = h^4/12$ ,  $G_{11}^i = 0$ . On rappelle [1] que les composantes du champ de vitesse à la position  $\mathbf{r} = (x, y)$  sont approchées par :

$$u(\mathbf{r}) = \sum_i -\frac{y - y_i}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \left( M_{00}^i + \frac{M_{20}^i - M_{02}^i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^4} (3(x - x_i)^2 - (y - y_i)^2) \right) + \frac{x - x_i}{\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^6} ((x - x_i)^2 - 3(y - y_i)^2) M_{11}^i \tag{25}$$

$$v(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{x - x_i}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \left( M_{00}^i - \frac{M_{20}^i - M_{02}^i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^4} (3(y - y_i)^2 - (x - x_i)^2) \right) - \frac{y - y_i}{\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^6} ((y - y_i)^2 - 3(x - x_i)^2) M_{11}^i \tag{26}$$

Pour comparer la méthode des moments avec la méthode particulaire classique qui ne prend en compte que les moments d’ordre 0, nous avons calculé l’erreur  $Er$  de norme  $L^2$  :

$$Er = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (\omega_{\text{ref}}(\mathbf{x}_{i,j}) - \omega_{\text{num}}(\mathbf{x}_{i,j}))^2}{\sum_{i,j} \omega_{\text{ref}}^2(\mathbf{x}_{i,j})}} \tag{27}$$

où  $\omega_{\text{ref}}(\mathbf{x}_{i,j})$  est la valeur de tourbillon de référence, sur les noeuds d’une grille notés  $\mathbf{x}_{i,j}$  et  $\omega_{\text{num}}(\mathbf{x}_{i,j})$  est la valeur de tourbillon calculée avec la méthode des moments (Éq. (14)) ou la méthode particulaire (Éq. (12)) sur les mêmes noeuds de la grille. Dans le calcul du champ tourbillonnaire, la fonction  $\xi_\varepsilon$  est définie par :

$$\xi_\varepsilon = \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right) \tag{28}$$

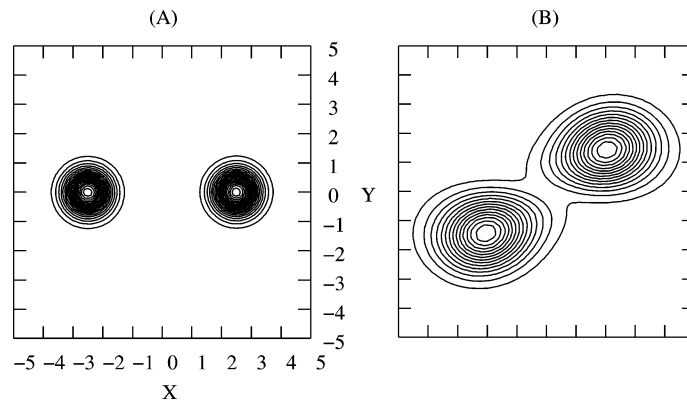


Fig. 1. Isovalues de la vorticité obtenues avec la solution de référence à deux instants : (A)  $t = 0$  ; et (B)  $t = 30$ .

Fig. 1. Vorticity isovalues for the reference solution at 2 times: (A)  $t = 0$  ; and (B)  $t = 30$ .

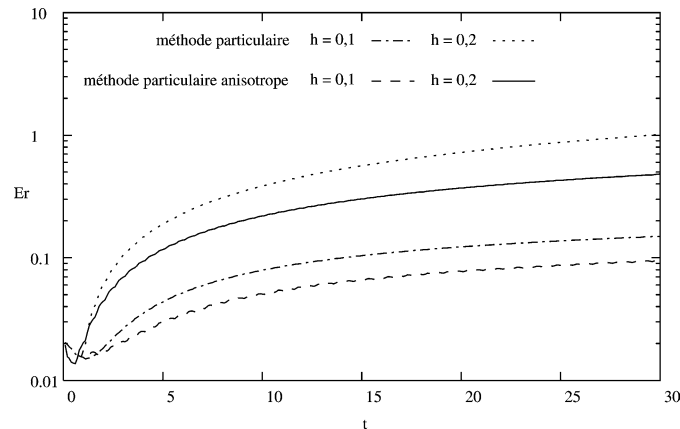


Fig. 2. Erreur  $Er$  de norme  $L^2$  obtenue avec la méthode particulaire et la méthode particulaire anisotrope.

Fig. 2. Error of norm  $L^2$  for the 2 methods.

La simulation a été réalisée sur 300 pas de temps  $\delta t = 0,1$ . Pour une valeur de maille  $h = 0,06$ , les deux méthodes redonnent les mêmes résultats. Cette simulation constitue la solution de référence. On a représenté sur la Fig. 1 les isovalues de la vorticité de la solution de référence à deux instants et sur la Fig. 2 l'évolution de l'erreur  $Er$  par rapport au temps  $t$  pour les deux méthodes et pour deux valeurs de mailles  $h = 0,1$  et  $0,2$ . Pour ces deux valeurs, on constate que le modèle donne une erreur  $Er$  moins importante que celle de la méthode particulaire. Cette remarque reste valable pour les autres valeurs de maille utilisées.

#### 4. Conclusion

Comme pour la simulation d'un écoulement de fluide parfait, la méthode particulaire anisotrope permet d'obtenir une meilleure précision avec un nombre restreint de particules. Ce gain est contrebalancé par une plus grande complexité, donc un coût de calcul plus élevé. La méthode présente toutefois l'avantage d'être construite dans un cadre qui permet en principe de fixer l'ordre de la précision arbitrairement en introduisant des moments supplémentaires. Une particularité de la prise en compte de la viscosité est la nécessité d'introduire des moments géométriques. Cela indique qu'une meilleure connaissance de la déformation des particules est a priori nécessaire dès lors que l'on veut s'intéresser aux moments d'ordre supérieur ce qui n'était pas le cas pour un problème de convection pure, au moins pour des écoulements plans.

#### Références

- [1] A. Beaudoin, S. Huberson, E. Rivoalen, Méthode particulaire anisotrope, C. R. Mecanique 330 (2002) 51–56.
- [2] J.P. Choquin, S. Huberson, Particles simulation of viscous flow, Comput. & Fluids 17 (1989) 397–410.
- [3] P. Degond, S. Mas-Gallic, The weighted particle method for convection diffusion equation, I, The case of an isotropic viscosity, Math. Comp. 53 (1989) 485–507.