



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mécanique 332 (2004) 659–664



## Multi-shock structure of roll waves

Abdelaziz Boudlal<sup>a,\*</sup>, Valery Yu. Liapidevskii<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire de mécanique de Lille, UMR CNRS 8107 U.S.T.L., département de mécanique fondamentale, M3, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France*

<sup>b</sup> *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, 630090 Novosibirsk, Russia*

Received 28 July 2003; accepted after revision 30 March 2004

Available online 1 June 2004

Presented by Évariste Sanchez-Palencia

---

### Abstract

The special class of periodic travelling waves which is known as roll waves is investigated for nonhomogeneous hyperbolic equations of gas dynamics type. In this Note these equations are applied to shallow water flows in inclined open channels, but the results obtained are more general and far-reaching. The necessary conditions for the existence of a roll wave are derived. It is shown that for a nonconvex pressure term, multi-shock configurations of roll waves of finite amplitude exist. A new type of periodic travelling wave, which corresponds to the slug flow regime in two-layer flows, is found. **To cite this article: A. Boudlal, V.Yu. Liapidevskii, C. R. Mécanique 332 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

### Résumé

**Structure multi-chocs d'ondes à rouleaux.** On étudie la propagation d'une classe particulière d'ondes périodiques usuellement appelées ondes à rouleaux qui sont gouvernées par un système d'équations non-homogène hyperbolique de type dynamique des gaz. Dans cette note ces équations sont appliquées aux écoulements en eau peu profonde dans les canaux découverts et inclinés, mais les résultats obtenus sont de portée plus générale. On établit les conditions nécessaires d'existence des ondes à rouleaux. Pour un terme de pression non-convexe on montre l'existence de la configuration multi-chocs d'ondes à rouleaux d'amplitude finie. Un nouveau type d'ondes avec discontinuités qui correspond pour les écoulements liquide-liquide stratifiés aux régimes à bouchons est établi. **Pour citer cet article : A. Boudlal, V.Yu. Liapidevskii, C. R. Mécanique 332 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

*Keywords:* Fluid mechanics; Free surface flow; Roll waves; Anomalous waves; Inclined channel

*Mots-clés :* Mécanique des fluides ; Écoulement à surface libre ; Ondes à rouleaux ; Ondes exceptionnelles ; Canal incliné

---

---

\* Corresponding author.

*E-mail address:* [abdelaziz.boudlal@univ-lille1.fr](mailto:abdelaziz.boudlal@univ-lille1.fr) (A. Boudlal).

### Version française abrégée

1. On considère la propagation unidimensionnelle d'ondes périodiques qui sont régies par le système hyperbolique (1). Un tel système décrit l'évolution d'ondes non-linéaires dans différents domaines de la mécanique des milieux continus (dynamique des gaz, écoulement dans les canaux découverts, théorie de l'élasticité, etc.).

Dans ce qui suit nous allons appliquer (1) à l'écoulement à surface libre en eau peu profonde dans un canal cylindrique incliné et de section droite quelconque, mais la portée des résultats obtenus est plus générale. Cela étant, le système (1) représente la forme adimensionnée des équations régissant l'écoulement considéré [1],  $x$  étant la coordonnée le long du canal,  $t$  le temps,  $u$  la vitesse moyenne longitudinale,  $h$  l'aire mouillée,  $P = \int_0^h c^2(h) dh$ ,  $c^2(h) = h/b(h)$  et  $b$  la largeur au miroir.  $c(h)$  est la célérité des ondes élémentaires de pesanteur. Le terme source dans (1) qui représente les forces massiques et le frottement turbulent est choisi de la forme  $f(h, u) = h\alpha - L_w u^2$ , avec  $\alpha = \tan \varphi / c_w$ ,  $\varphi$  la pente du canal,  $c_w$  le coefficient de frottement supposé constant et  $L_w$  le périmètre mouillé. La structure non-linéaire des ondes à rouleaux décrites par (1) dépend du terme de pression  $P(h)$ . Le système (1) est hyperbolique pour  $c^2 = dP/dh > 0$ . Pour les canaux de section droite régulière avec  $dP/dh > 0$ ,  $d^2P/dh^2 > 0$ ,  $P(h) \rightarrow 0$  pour  $h \rightarrow 0$ ,  $P(h) \rightarrow \infty$  quand  $h \rightarrow \infty$ , ces ondes à rouleaux sont du même type que celles obtenues en mouvement plan dans les canaux avec  $P(h) = \frac{1}{2}h^2$  [2]. En présence d'une fonction pression non-convexe la structure des ondes à rouleaux est plus compliquée. Il est facile de trouver des exemples d'écoulements avec un terme de pression non-convexe [3,4]. Posons  $\tilde{P}(\tau) = P(h)$ ,  $\tau = 1/h$ ,  $\bar{b}(s) = b(h)$ ,  $s$  étant la hauteur de la surface libre. Par suite,  $d^2\tilde{P}/d\tau^2 = (3\bar{b} - h d\bar{b}/ds)h^4\bar{b}^{-3}(s)$ . En partant d'une section droite classique et en augmentant  $h$  sans changer ni  $\bar{b}$  ni  $d\bar{b}/ds$ ,  $d^2\tilde{P}/d\tau^2$  et  $d^2P/dh^2$  peuvent être négatives (Fig. 1).

Le problème de stabilité non linéaire d'ondes uni-chocs à rouleaux dans les canaux découverts avec  $P$  convexe a été résolu par dérivation d'équations modulées dans [1]. Le critère de stabilité a été formulé par ces auteurs en termes d'hyperbolicité des équations modulées. Par utilisation de l'approximation de Boussinesq pour deux liquides superposés en mouvement entre deux plans horizontaux il a été montré dans [5] que les ondes exceptionnelles (avec deux chocs «soniques» par période) sont les seules solutions possibles dans la classe des ondes multi-chocs à rouleaux.

Notre objectif est de mettre en évidence de nouvelles solutions d'ondes multi-chocs à rouleaux, comprenant notamment les ondes exceptionnelles, pour un terme de pression contenant des points d'inflexion.

2. Les ondes à rouleaux sont, selon la théorie de Dressler [2], des solutions d'ondes progressives descendantes avec discontinuités de (1). Dans le repère lié aux ondes de célérité constante  $\mathcal{D}$ , elles sont décrites par l'Éq. (2) avec  $\xi = x - \mathcal{D}t$ . Par convention on appellera amont d'indice  $r$  et aval d'indice  $l$  respectivement l'amont et l'aval de la discontinuité dans le repère lié aux ondes. Une des caractéristiques principales de ces ondes est l'existence d'une aire mouillée critique  $h = y_c$  où on a simultanément  $\Delta(y_c) = 0$ ,  $F(y_c) = 0$ , ce qui, entre deux discontinuités successives où l'écoulement est continu, assure la transition du régime sous-critique  $\Delta > 0$  à l'aval de la première discontinuité au régime supercritique  $\Delta < 0$  à l'amont de la suivante. Ces conditions sont données par (3) où  $u_c = u_c(y_c)$  est solution de  $f(y_c, u_c(y_c)) = 0$ . Les équations de saut sont données par (4). Par ailleurs, dans la théorie de la dynamique des gaz et celle des ondes longues, la condition de stabilité d'un choc dans une onde avec discontinuité descendante,  $u < \mathcal{D}$ , dans le cas régulier où  $dP^2/dh^2 > 0$  s'écrit [6] :  $h_r < y < h_l$ . En présence de non-convexité de la fonction pression, des conditions supplémentaires de stabilité de chocs associées à (1), appelées conditions d'Oleynik [7], sont nécessaires. Seules les discontinuités obéissant à ces conditions sont utilisées dans la construction des ondes à rouleaux.

3. Pour construire des ondes à rouleaux d'amplitude finie on utilise la dépendance  $G = G(h)$ . Dans ce qui suit on se limite au cas  $\tilde{P}(\tau)$  à deux points d'inflexion (le cas général d'un nombre fini de points d'inflexion peut être traité sans difficulté). Sur la Fig. 2 est représenté le graphe de  $G(h)$  à trois extremum  $y_1, y_2, y_3$  tels que  $h_j^- < y_1 < y_2 < h_j < y_3 < h_j^+$ ,  $y_1$  et  $y_3$  étant des minimums locaux ( $G(y_1) > G(y_3)$ ) et  $h_j^-, h_j^+, h_j$  satisfaisant  $G(h_j^-) = G(y_2) = G(h_j^+)$ ,  $G(h_j) = G(y_1)$  (Fig. 2).

L'aire mouillée critique  $y_c$  coïncide avec un des trois points  $y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . L'aire mouillée  $h_r$  à l'amont de la discontinuité pour une solution périodique de (1) correspond à un écoulement supercritique ( $\Delta(h_r) < 0$ ), et dans l'état conjugué,  $h_l$  ( $G(h_r) = G(h_l)$ ) correspond à un écoulement sous-critique ( $\Delta(h_l) > 0$ ). Cela étant, à  $y_c = y_1$  les ondes régulières de type  $ABE_1A$  peuvent exister si :  $F(h) < 0$  pour  $h_j^- < h_r < h < y_c$  et  $F(h) > 0$  pour  $y_c < h < h_l < y_2$ . L'amplitude maximale dans ce cas correspond à la transition  $ME_2E_1M$  (Fig. 2). Dans le cas  $y_c = y_2$  les conditions nécessaires d'existence d'ondes de type  $CBE_2C$  sont :  $F(h) < 0$  pour  $y_1 < h_l < h < y_c$ , et  $F(h) > 0$  pour  $y_c < h < h_r < h_j$ . Un tel type d'onde pour lequel entre deux discontinuités successives où l'écoulement est continu on a  $dh/d\xi < 0$  est appelé « onde inverse ». Sa hauteur maximale correspond à la transition  $HE_1E_2H$ . A  $y_c = y_3$ , en plus des ondes à rouleaux régulières  $CE_3LC$  les ondes correspondant à la transition  $A_1L_1E_3HE_1A_1$  d'amplitude excédant l'amplitude maximale des ondes régulières  $E_2NE_3E_2$  peuvent exister si les conditions (5) sont satisfaites. La transition  $A_1L_1E_3HE_1A_1$  représente l'onde à rouleau contenant deux discontinuités stables  $A_1L_1$  et  $HE_1$ . Le profil de cette onde est représenté sur la Fig. 3. Il faut noter que la discontinuité  $AL$  de la Fig. 2 est instable selon les conditions d'Oleynik, bien que soient satisfaites les conditions de saut de Lax. Appliquées à la construction d'ondes à rouleaux les conditions d'Oleynik [7] peuvent être formulées comme suit : toute discontinuité connectant les branches  $AE_1$  et  $LE_3$  du graphe de la Fig. 2, est admissible si elle ne traverse pas les branches  $E_1E_2$  et  $E_2E_3$  de ce graphe. D'autres possibilités de configuration du graphe de  $G$  peuvent être traitées de la même manière. Cette approche permet de faire une classification des ondes à rouleaux d'amplitude finie avec  $P(h)$  contenant un nombre fini de points d'inflexions. Par ailleurs, en plus de ces ondes à rouleaux, de nouvelles structures d'ondes « exceptionnelles » correspondant au diagramme  $ME_2HE_1M$  peuvent être construites si  $F(h) < 0$  pour  $h_j^- < h < y_1$  et  $F(h) > 0$  pour  $y_2 < h < h_j$  (Fig. 2). Elles consistent à connecter sur une période deux parties où l'écoulement est supercritique continu  $E_1M$  et  $E_2H$  par deux discontinuités « soniques »  $ME_2$  et  $HE_1$ . Remarquons que pour ces ondes « exceptionnelles » les conditions  $F(y_1) = 0$  et  $F(y_2) = 0$  ne sont pas nécessaires, puisque la transition du régime supercritique à sous-critique n'a pas lieu. Ainsi ces nouveaux types d'ondes ne sont pas des ondes à rouleaux au sens classique. Finalement, le système (1) avec un terme de pression non-convexe peut en particulier décrire d'une manière similaire toutes les ondes avec discontinuités obtenues à l'interface de deux liquides superposés en mouvement entre deux plans horizontaux, à savoir, les ondes uni-chocs et les ondes « exceptionnelles » [5].

### 1. Governing equations

Consider one-dimensional periodic travelling waves, which are governed by the following hyperbolic system

$$\left. \begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ (hu)_t + (hu^2 + P(h))_x &= f(h, u) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Eqs. (1) describe nonlinear wave evolution in different areas of continuum mechanics such as gas dynamics, open channel flows, elasticity theory etc. In what follows we apply (1) to a shallow water flow along an inclined open channel of arbitrary cross-section, but the results here obtained are general and far-reaching. The system (1) represents a dimensionless form of the shallow water equations [1],  $x$  being the coordinate along the channel,  $t$  the time,  $u$  the stream-wise velocity,  $h$  the wet area,  $P = \int_0^h c^2(h) dh$ ,  $c^2(h) = \frac{h}{b(h)}$  and  $b$  the channel width at the free surface;  $c$  is the long wave velocity. The source term in (1), which is chosen in the form  $f(h, u) = h\alpha - L_w u^2$ , models the interaction between mass forces and turbulent friction. Here  $\alpha = \tan \varphi / c_w$ ,  $\varphi$  is the channel inclination angle to the horizontal,  $L_w$  is the wet perimeter. The friction factor  $c_w$  is taken constant. The nonlinear wave patterns described by (1) depend on the pressure term  $P(h)$ . The system is hyperbolic for  $c^2 = dP/dh > 0$ . For regular channels with  $dP/dh > 0$ ,  $d^2P/dh^2 > 0$ ,  $P(h) \rightarrow 0$  when  $h \rightarrow 0$  and  $P(h) \rightarrow \infty$  when  $h \rightarrow \infty$ , the periodic travelling waves (roll waves) are the same as for the shallow water flow over an inclined plane, with  $P(h) = \frac{1}{2}h^2$ , which is the case investigated in [2]. For a nonconvex pressure function, the roll wave patterns are more complicated.

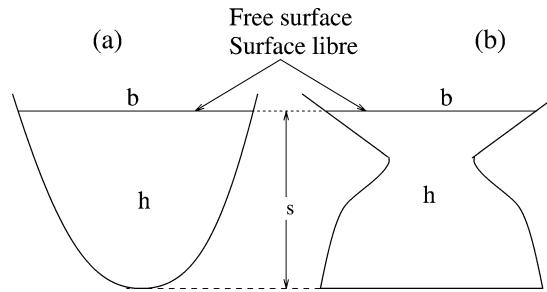


Fig. 1. (a) A regular channel with a convex pressure term:  $d^2\tilde{P}/d\tau^2 > 0$ ; (b) nonregular channel with a nonconvex pressure term:  $d^2\tilde{P}/d\tau^2 < 0$ .  
 Fig. 1. (a) Canal de section droite régulière avec un terme de pression convexe :  $d^2\tilde{P}/d\tau^2 > 0$ ; (b) canal de section droite non-régulière avec un terme de pression non-convexe :  $d^2\tilde{P}/d\tau^2 < 0$ .

It is easy to find examples of flows with a nonconvex pressure term [3,4]. Let us set  $\tilde{P}(\tau) = P(h)$ ,  $\tau = 1/h$ ,  $\bar{b}(s) = b(h)$ ,  $z = s$  being the free surface height. Then,  $d^2\tilde{P}/d\tau^2 = (3\bar{b} - h d\bar{b}/ds)h^4\bar{b}^{-3}(s)$ . Starting from a usual cross-section and increasing  $h$ , without changing either  $b$  or  $d\bar{b}/ds$ ,  $d^2\tilde{P}/d\tau^2 > 0$  and  $d^2P/dh^2 > 0$  can be negative (Fig. 1).

The problem of nonlinear stability of one-shock roll waves in regular open channel flows with a convex pressure term has been solved in [1] by deriving modulation equations. Using the Boussinesq approximation in two-layer flow between two parallel planes it has been shown in [5] that anomalous waves (with two sonic jumps in a period) are the only possible solutions in the class of multi-shock roll waves.

The aim of this investigation is to point out new solutions of multi-shock roll waves, including anomalous waves, for (1), with the pressure term containing points of inflection.

## 2. Travelling waves

According to Dressler's theory [2], roll waves are periodic discontinuous solutions of (1) depending on the variable  $\xi = x - \mathcal{D}t$ ,  $\mathcal{D} = \text{const}$ , which are described by the ordinary differential equation

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{F(h)}{\Delta(h)} \quad (2)$$

where  $G(h) = P(h) + m^2/h$ ,  $\Delta(h) = dG/dh$ ,  $F(h) = f(h, \mathcal{D} - m/h) = h\alpha - L_w(\mathcal{D} - m/h)^2$ ,  $m = h(\mathcal{D} - u) = \text{const}$ .

For convenience we will call upstream (subscript  $r$ ) and downstream (subscript  $l$ ) the sides of the jump corresponding respectively to the upstream and downstream relative to the waves. The distinctive feature of roll waves is the existence of the critical wet area  $y_c$  with  $\Delta(y_c) = 0$ ,  $F(y_c) = 0$ , providing the smooth transition from the subcritical flow ( $\Delta(h) > 0$ ) downstream of the jump to the supercritical flow ( $\Delta(h) < 0$ ) upstream of the next jump in a periodic solution. We consider here only downward travelling waves ( $u < \mathcal{D}$ ). In this case

$$m = yc(y_c), \quad \mathcal{D} = c(y_c) + u_c \quad (3)$$

where  $u_c = u_c(y_c)$  can be found from the equation  $f(y_c, u_c(y_c)) = 0$ . The jump condition can be expressed:

$$G(h_r) = G(h_l) \quad (4)$$

It is well known from gas dynamics and shallow water theory that the stability condition at the jump in a discontinuous downward travelling wave ( $u < \mathcal{D}$ ), for the regular case,  $d^2P/dh^2 > 0$ , can be expressed in the form [6]:  $h_r < y_c < h_l$ . Additional jump stability conditions for (1) with a nonconvex pressure term are known as Oleynik conditions [7]. Only stable jumps are used for the construction of periodic travelling waves.

### 3. Roll waves with a nonconvex pressure term

To construct roll waves of finite amplitude, it is convenient to use the dependence  $G = G(h)$ . In what follows we restrict our study to the pressure function  $\tilde{P}(\tau)$  having only two inflection points (the general case with a finite number of points of inflection may be investigated in the same way). The representative graph of  $G(h)$  is shown in Fig. 2.

There are three extremum points  $y_1, y_2, y_3$  which may be ordered  $h_j^- < y_1 < y_2 < h_j < y_3 < h_j^+$ ,  $y_1$  and  $y_3$  being the points of local minimum ( $G(y_1) > G(y_3)$ ) and  $h_j^-, h_j^+, h_j$  satisfying  $G(h_j^-) = G(y_2) = G(h_j^+)$ ,  $G(h_j) = G(y_1)$  (Fig. 2). The critical wet area  $y_c$  coincides with one of the points  $y_i, i = 1, 2, 3$ . The wet area  $h_r$  ahead of the jump in a periodic solution of (1) corresponds to a supercritical flow ( $\Delta(h_r) < 0$ ) and the flow in the conjugate state  $h_l$  ( $G(h_r) = G(h_l)$ ) is subcritical ( $\Delta(h_l) > 0$ ). Therefore, for  $y_c = y_1$  there are only regular roll waves  $ABE_1A$  if  $F(h) < 0$  for  $h_j^- < h_r < h < y_c$  and  $F(h) > 0$  for  $y_c < h < h_l < y_2$ . In this case the roll wave of maximum amplitude corresponds to the path  $ME_2E_1M$  shown in Fig. 2 [1]. For  $y_c = y_2$  the conditions providing the existence of the roll wave  $CBE_2C$  are:  $F(h) < 0$  for  $y_1 < h_l < h < y_c$  and  $F(h) > 0$  for  $y_c < h < h_r < h_j$ . This wave is so called ‘inverted’ roll wave, in which the flow depth is monotonically decreasing in the smooth part of the wave [8]. The maximum amplitude ‘inverted’ wave corresponds to the path  $HE_1E_2H$ . For the case  $y_c = y_3$ , in addition to regular roll waves  $CE_3LC$ , the roll wave  $A_1L_1E_3HE_1A_1$  exceeding in amplitude the maximal regular roll wave  $E_2NE_3E_2$  can exist, if the following conditions are fulfilled

$$\left. \begin{aligned} F(h) < 0 \text{ for } h_r < h < y_1 \text{ and } h_j < h < y_3 \\ F(h) > 0 \text{ for } y_3 < h < h_l \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

The path  $A_1L_1E_3HE_1A_1$  describes a roll wave containing two stable jumps  $A_1L_1$  and  $HE_1$ . The profile of the wave is shown in Fig. 3. Note that the jump  $AL$  depicted in Fig. 2 is not stable according to Oleynik conditions, although it satisfies the Lax stability conditions [7]. The Oleynik conditions, applied to the jump  $AL$ , can be formulated as follows: every jump  $AL$ , which connects the branches  $AE_1$  and  $LE_3$ , is stable if and only if it does not intersect the branches  $E_1E_2$  and  $E_2E_3$  of the graph. Other possible configurations for the function  $G(h)$  graph can be considered in similar way. The approach described above lets us give the classification of roll waves of finite amplitude for the pressure function  $P(h)$  containing a finite number of points of inflection. Furthermore, in addition to roll waves described above, a new type of ‘anomalous’ periodic travelling waves can be constructed. Such waves are described by the diagram  $ME_2HE_1$  if  $F(h) < 0$  for  $h_j^- < h < y_1$  and  $F(h) > 0$  for  $y_2 < h < h_j$  (Fig. 2). The wave consists of two smooth supercritical parts of flow  $E_1M$  and  $E_2H$  and of the two ‘sonic’ jumps

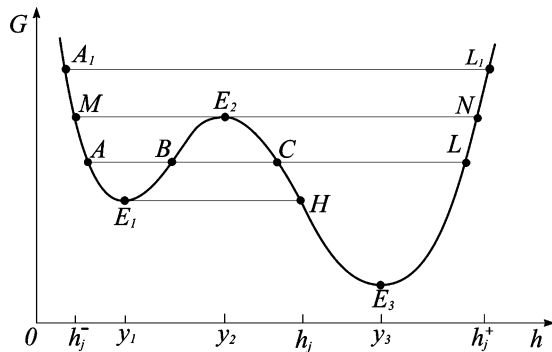


Fig. 2. Graph of  $G(h)$  with  $G(y_1) > G(y_3)$  for  $\tilde{P}(\tau)$  having two inflection points.

Fig. 2. Graphe de  $G(h)$  avec  $G(y_1) > G(y_3)$ , pour  $\tilde{P}(\tau)$  à deux points d’inflexion.

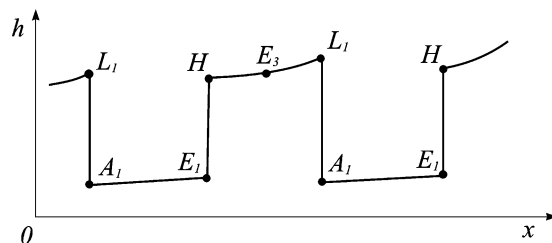


Fig. 3. Two-shock configuration of roll waves of finite amplitude.

Fig. 3. Configuration à deux discontinuités d’ondes à rouleaux d’amplitude finie.

$ME_2$  and  $HE_1$ . Note that the conditions  $F(y_1) = 0$  and  $F(y_2) = 0$ , which were necessary for roll wave existence, are no longer necessary now, because there is no transition from supercritical to subcritical flow in the wave. Therefore, such periodic waves are not roll waves. The profile of ‘anomalous’ waves differs essentially from the profile of roll waves. Finally, Eqs. (1), with a nonconvex pressure term, can equally describe, in a similar way, all the wave patterns obtained for two-layer shallow water equations [5], namely, uni-shock waves and anomalous waves.

### Acknowledgements

The research reported in this paper was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research under Grant 04-01-00253 and by Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences under Grant 3.13.1. The authors would like to thank Professor Didier Astruc for his constructive remarks.

### References

- [1] A. Boudlal, V.Yu. Liapidevskii, Stability of roll waves in open channel flows, C. R. Mecanique 330 (2002) 291–295.
- [2] R.F. Dressler, Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels, Comm. Pure Appl. Math. 2 (1949) 149–194.
- [3] A. Dymnt, Phénomènes exceptionnels de propagation d’ondes de pesanteur dans un canal, J. Mécanique 2 (1981) 59–78.
- [4] D.H. Peregrine, Long waves in a uniform channel, J. Fluid Mech. 22 (1968) 353–365.
- [5] V.Yu. Liapidevskii, The structure of roll waves in two-layer flows, J. Appl. Math. Mech. 64 (2000) 937–943.
- [6] J.B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves, Wiley, 1974.
- [7] B.L. Rozhdestvenskii, N.N. Janenko, Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics, in: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 55, American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.
- [8] A. Boudlal, V.Yu. Liapidevskii, Structure and nonlinear stability of periodic travelling waves, in: Int. Conf. Fluxes and Structures in Fluids, June 23–26, 2003, St. Petersburg, Russia, in press.