



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mécanique 332 (2004) 627–632



# Dispersion de particules solides en mouvement de saltation dans un écoulement turbulent

César Aguirre<sup>a</sup>, Yu Guo<sup>b</sup>, Michel Ayrault<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique, UMR CNRS 5509, École centrale de Lyon, 69131, Ecully cedex, France*

<sup>b</sup> *Turbulence Laboratory, Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, Chine*

Reçu le 2 juillet 2003 ; accepté après révision le 30 mars 2004

Disponible sur Internet le 1<sup>er</sup> juin 2004

Présenté par Sébastien Candel

---

## Résumé

La dispersion de particules solides en mouvement de saltation est étudiée dans une turbulence homogène et dans une couche limite turbulente. La vitesse du fluide le long de la trajectoire de la particule est estimée à l'aide d'une équation différentielle stochastique continue dans laquelle le temps intégral de corrélation tient compte des effets de gravité et d'inertie. Pour la couche limite, l'entraînement aérodynamique et le rebond des particules sont considérés comme des variables aléatoires de densités de probabilité gaussiennes. Les résultats du modèle, comparés aux résultats expérimentaux montrent que le modèle reproduit correctement la dispersion mais sous-évalue légèrement les fluctuations de vitesse. *Pour citer cet article : C. Aguirre et al., C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Dispersion of solid saltating particles in a turbulent flow.** The solid particle dispersion in saltating motion is studied in an homogeneous turbulence and in a turbulent boundary layer. The fluid velocity along the particle trajectory is estimated using a continuous stochastic differential equation in which the correlation integral time takes into account gravity and inertia effects. As far as the boundary layer is concerned, the aerodynamic entrainment of particles and the rebound are modelised as random variables with Gaussian probability density functions. Compared with experimental results, the numerical results show good agreement for dispersion, although velocity fluctuations are slightly under evaluated. *To cite this article: C. Aguirre et al., C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Turbulence ; Mécanique des fluides ; Dispersion de particules ; Équation de Langevin ; Saltation ; Effet d'inertie

*Keywords:* Turbulence; Fluid mechanics; Particle dispersion; Langevin equation; Saltation; Inertia effect

---

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [ayrault@mecaflu.ec-lyon.fr](mailto:ayrault@mecaflu.ec-lyon.fr) (M. Ayrault).

### Abridged English version

In the Lagrangian approach to the calculation of heavy-particle trajectories, the main difficulty lies in the determination of fluid velocities  $u_i^p(\vec{y}, t)$  along a heavy-particle trajectory. The stochastic nature of an aeolian saltation motion suggest that this velocity could be determined using a Lagrangian stochastic model [1–4]. In analogy with a fluid element, these authors suppose that increments in the driving fluid velocity evolve as a continuous Markov process, which can be represented by a stochastic equation. Recently, Shao [5] and Reynolds [6] have pointed out some contradictions relative to the structure function, and suggested that this velocity should be evaluated using a fractional Langevin equation. This new theory is developed only for homogeneous turbulence. We decided, in order to go forward, to forsake these considerations and treat increments  $d\xi$  as increments of a Wiener process, and to define a modified correlation timescale taking more precisely into account the effects of gravity and inertia.

Consider a one-dimensional flow. In the stochastic equation (1), the coefficient  $b(u^p, V, y, t)$  is expressed as  $b = \sigma_u \sqrt{2/T_L^p}$ ,  $T_L^p$  being interpreted as a Lagrangian correlation timescale of the fluid velocity along the particle trajectory. We propose the following form  $T_L^p = T_L / (\alpha_{\text{grav}} + \alpha_{\text{inert}})$  where  $\alpha_{\text{grav}}$  and  $\alpha_{\text{inert}}$  are coefficients relative to the gravity and the inertia effects. The gravity effect  $\alpha_{\text{grav}}$  is estimated following the Csanady's approximation [8] (Eq. (3)). The inertia effect  $\alpha_{\text{inert}}$  can be separately evaluated in the limit of large inertia and vanishing terminal velocity. A turbulent structure with lengthscale  $\ell$ , passing by the moving particle would have a frequency of  $v_{\text{part}} = (u^p - V)/\ell \approx ((u^p - V)/\sigma_u)v_L$  where  $\sigma_u$  represents the rms fluid velocity and  $v_L$  the Lagrangian correlation timescale frequency. This relation could be extended and so, in a general case, the inertia coefficient is expressed as Eq. (4). The new Lagrangian correlation timescale writes finally as Eq. (5). This new timescale relaxes towards the expected values for the three limiting cases.

Finally, following Reynolds [4], the deterministic term  $a(u^p, V, y, t)$  in Eq. (1) is determined with the aid of the Fokker–Planck equation relative to the pdf  $P(u^p, V, y, t)$  and in coherence with the well-mixed criteria. For the limiting case of small inertia and large terminal velocity, the one-dimensional stochastic equation for an inhomogeneous Gaussian turbulence is given by the Eq. (6).

The model has been tested against heavy particle dispersion in an homogeneous turbulence – the experiments of Snyder and Lumley [9], and in a turbulent boundary layer – the experiments of Tanière et al. [10]. Particles are randomly ejected from the source using a Gaussian probability density function. For the case of the boundary layer, the aerodynamic lift off and the rebound are simulated as random variables with Gaussian pdf whose characteristics are defined from experimental results. The predicted mean-square dispersion (Fig. 1(a)) or mass fluxes (Fig. 2) are in good agreement with the experimental data. However, the model is slightly underestimating the particle variance velocities as shown on Fig. 1(b).

### 1. Le problème

La modélisation d'un vent de poussières éoliennes nécessite au préalable la modélisation de la dispersion de particules solides lourdes en saltation (sable) dans la couche limite atmosphérique. La nature stochastique d'un tel transport suggère qu'une modélisation lagrangienne stochastique est bien adaptée. Alors, la principale difficulté réside dans la détermination à chaque instant de la vitesse instantanée  $u_i^p(\vec{y}, t)$  du fluide à la position  $\vec{y}$  de la particule solide, les effets d'inertie et de gravité de la particule entraînant une décorrélation entre la particule solide et le fluide environnant. Le premier effet influe principalement sur la dynamique de la réponse de la particule solide à l'écoulement turbulent tandis que le second effet imprime à la particule solide une vitesse de glissement. Outre l'effet sur la corrélation de la vitesse et appelé effet de croisement de trajectoires, la vitesse de chute va induire une anisotropie sur les coefficients de dispersion de la particule appelée effet de continuité, le coefficient dans la direction perpendiculaire à la vitesse de chute étant plus petit que dans la direction parallèle.

Par analogie avec le cas d'un traceur fluide, la vitesse  $u_i^p(\vec{y}, t)$  a été évaluée à l'aide d'une équation stochastique continue markovienne à une particule et une échelle de temps [1–4]. Récemment, Shao [5] et Reynolds [6] ont montré que certaines contradictions sur la fonction de structure pouvaient être résolues à la condition de considérer une équation de Langevin fractionnaire. Mais cette théorie n'étant développée que pour une turbulence homogène, nous nous sommes placés dans le cadre d'une équation stochastique markovienne où les effets d'inertie et de gravité de la particule sont correctement pris en compte. Notre étude peut être considérée comme une extension des travaux de Zhuang et al. [1], Sawford et Guess [2] ainsi que de Reynolds [4].

Considérons le cas d'un écoulement mono dimensionnel. Cette vitesse fluide  $u^p(\vec{y}, t)$  le long de la trajectoire de la particule solide peut être représentée par une équation différentielle stochastique de la forme

$$du^p = a(u^p, V, y, t) dt + b(u^p, V, y, t) d\xi \quad (1)$$

où  $d\xi$  représente les incréments d'un processus de Wiener [7]. En cohérence avec la théorie inertielle de Kolmogorov et par analogie avec le cas d'une particule fluide, on écrira  $b = \sigma_u \sqrt{2/T_L^p}$  ou  $T_L^p$  peut s'interpréter comme un temps de corrélation des vitesses fluides le long de la trajectoire de la particule solide. Ce temps de corrélation  $T_L^p$ , plus court que le temps lagrangien  $T_L$  doit tenir compte des effets de gravité et d'inertie.

Diverses expressions ont été proposées pour une turbulence homogène et isotrope. Csanady [8] proposa des expressions pour la corrélation de vitesse et pour l'échelle de temps dans le cas limite sans inertie et grande vitesse limite de chute. Wang et Stock [11] suivant les idées de Csanady ont introduits les effets d'inertie en considérant une échelle de temps intégrale  $T$ , fonction de l'inertie, à la place de  $T_L$  dans l'expression de Csanady. Ce temps  $T$  est estimé à partir de simulations numériques. Pozorski et Minier [3] quant à eux ont développé un modèle stochastique en analysant séparément les effets d'inertie et de gravité. Leur échelle de temps de corrélation considérée fait intervenir les temps lagrangien et eulérien du fluide ainsi que le rapport entre l'écart type de la vitesse de la particule et du fluide,  $x = \sigma_p/\sigma_u$ . Le temps de corrélation proposé tient compte, à chaque pas de temps, de la vitesse relative instantanée entre la particule solide et la particule fluide et non des valeurs statistiques de l'écoulement. Ceci est bien cohérent avec le modèle stochastique utilisé et avec la physique de l'interaction et donc de la décorrélation. Ecrivons ce temps sous la forme

$$\frac{1}{T_L^p} = \frac{\alpha_{\text{grav}} + \alpha_{\text{inert}}}{T_L} \quad \text{avec } \alpha_{\text{grav}} + \alpha_{\text{inert}} \geq 1 \quad (2)$$

Le coefficient de gravité  $\alpha_{\text{grav}}$  est évalué selon l'approximation de Csanady [8], interpolation entre la corrélation eulérienne correspondant à une grande vitesse limite de chute et la corrélation lagrangienne pour une faible vitesse limite de chute et une inertie négligeable, soit dans la direction parallèle à la gravité

$$\alpha_{\text{grav}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\beta V_{\text{lim}}}{\sigma_u}\right)^2} \quad \text{avec } \beta = \frac{T_L}{T_E} \quad (3)$$

Afin d'évaluer le coefficient d'inertie  $\alpha_{\text{inert}}$ , considérons le cas limite d'une grande inertie avec une vitesse limite de chute négligeable. Une structure turbulente d'échelle de longueur  $\ell$  sera vue par la particule avec une fréquence  $\nu_{\text{part}} = (u^p - V)/\ell \approx ((u^p - V)/\sigma_u)\nu_L$  où  $\nu_L$  représente la fréquence lagrangienne du fluide. Lorsque la gravité n'est plus négligeable et induit une vitesse limite de chute  $V_{\text{lim}}$ , cette fréquence va s'écrire dans la direction parallèle à celle de la gravité

$$\nu_{\text{part}} = \frac{u^p - (V - V_{\text{lim}})}{\sigma_u} \nu_L = \alpha_{\text{inert}} \nu_L \quad (4)$$

Finalement, le temps de corrélation  $T_L^p$  de la particule fluide suivant la trajectoire de la particule solide s'écrit dans la direction de la gravité

$$\frac{1}{T_L^p} = \frac{1}{T_L} \left[ \left[ 1 + \left(\frac{\beta V_{\text{lim}}}{\sigma_u}\right)^2 \right]^{1/2} + \frac{|u^p - (V - V_{\text{lim}})|}{\sigma_u} \right] \quad (5)$$

Notons que pour les trois cas limites caractéristiques, ce temps de décorrélation tend vers les valeurs physiques escomptées.

De la même manière que Reynolds [4], le terme déterministe  $a(u^P, V, y, t)$  de l'Éq. (1) est évalué, en cohérence avec le critère de mélange parfait, à partir de l'équation de Fokker–Planck relative à la densité de probabilité  $P(u^P, V, y, t)$  et après intégration relativement à  $V$ . Dans le cas limite d'une faible inertie avec une grande vitesse limite de chute, l'équation stochastique s'écrit finalement

$$du^P = \left[ -\frac{u^P}{T_L^P} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{u^P(u^P + V_{\text{lim}})}{\sigma_u^2} \right) \frac{\partial \sigma_u^2}{\partial y} \right] dt + \sigma_u \sqrt{\frac{2}{T_L^P}} d\chi \quad (6)$$

## 2. Résultats

Nous avons appliqué ce modèle pour deux turbulences différentes, une turbulence statistiquement homogène et isotrope, l'expérience de Snyder et Lumley [9] et une couche limite turbulente, l'expérience de Tanière et al. [10]. Snyder et Lumley ont étudié la dispersion de diverses particules solides lourdes (cuivre, verre, maïs, verre creux) émises à isovitesse au sein d'une turbulence statistiquement homogène et isotrope, la vitesse moyenne étant verticale et opposée à la gravité. Par contre, Tanière et al. ont étudié la dispersion de particules de verre et de PVC dans une couche limite turbulente plane, les particules étant entraînées aérodynamiquement à partir du sol. Les caractéristiques de toutes ces particules correspondent à des mouvements de suspension ou de saltation modifiés. Les statistiques ont été effectuées avec 5000 particules pour les deux simulations.

La Fig. 1 correspond à l'expérience de Snyder et Lumley [9]. Nous nous intéressons ici aux particules dont les caractéristiques physiques sont voisines des particules éoliennes comme le sable et possèdent un mouvement de saltation. La Fig. 1(a) montre la dispersion moyenne  $\langle (y(t) - y_1(t_1))^2 \rangle$  des particules de verre et de maïs en fonction du temps. Les résultats du modèle sont en parfait accord avec les résultats expérimentaux. Par contre, la comparaison de l'évolution de la vitesse des particules montre une certaine différence pour les particules de verre (Fig. 1(b)), les fluctuations de vitesse étant légèrement sous-évaluées. On note une réelle amélioration par rapport au modèle ne tenant compte que de la gravité [2,4], tant pour la dispersion que pour la vitesse.

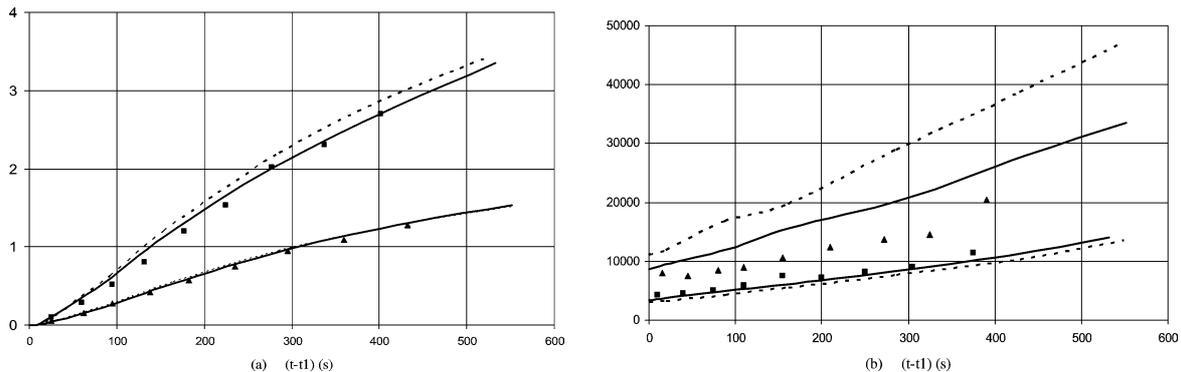


Fig. 1. Comparaison en fonction du temps de la dispersion  $[y(t) - y(t_1)]^2$  (a), de la variance  $\overline{U^2}/\sigma_u^2$  des fluctuations de vitesses (b) des particules de verre et de maïs, entre le modèle (traits pleins), le modèle avec gravité seule [2,4] (pointillés) et les résultats expérimentaux de Snyder et Lumley (symboles, triangles : verre ; carrés : maïs).

Fig. 1. Comparison with time of the dispersion  $[y(t) - y(t_1)]^2$  (a), (b) the variance  $\overline{U^2}/\sigma_u^2$  of the velocity fluctuations (b) of solid glass and corn particles with the model (solid lines), the model without gravity [2,4] (dashed lined) and the experiment data of Snyder and Lumley (symbols, triangles: glass, squares: corn).

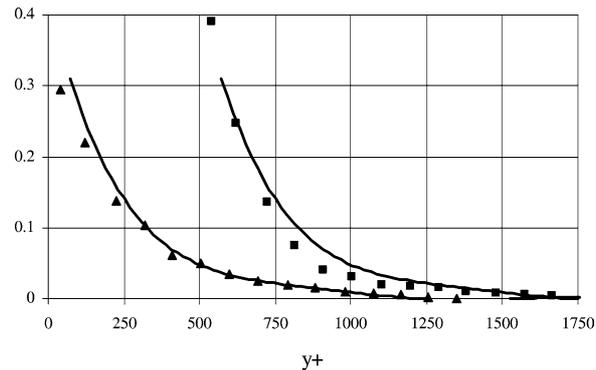


Fig. 2. Comparaison du flux de masse de particules de verre et de PVC entre le modèle (traits pleins) et les résultats de Tanière et al. (symboles, triangles : verre, carrés : PVC-translatés de  $y^+ = 500$ ) dans la section  $x = 5.06$  m.

Fig. 2. Comparison of the mass flux of glass and PVC particles between the model (solid lines) and the experimental results of Tanière et al. (symbols, triangles: glass, squares: PVC-translated from  $y^+ = 500$ ) in the section  $x = 5.06$  m.

La Fig. 2 correspond à l'expérience de Tanière et al. [10]. Les particules considérées possèdent les caractéristiques d'un mouvement de suspension modifié pour le verre et de saltation modifié pour le PVC. Les particules étant émises du sol, il faut modéliser l'entraînement aérodynamique des particules puis le rebond sur la paroi. L'entraînement aérodynamique des particules dépend de leurs caractéristiques physiques, du frottement visqueux du fluide sur les particules et donc de l'effet des structures turbulentes apparaissant à la paroi. Il en est de même du rebond, la physique du rebond des particules sur les parois étant de plus complexe et mal connue. Ces deux effets ne pouvant être caractérisés que de manière statistique, les particules sont éjectées aléatoirement à la source, l'angle et la vitesse d'éjection, fonctions de  $u_*$  étant des variables aléatoires de densité de probabilité gaussiennes. De même pour le rebond, l'angle et la vitesse de la particule rebondissante sont des variables aléatoires de densité de probabilité gaussiennes, de moyenne et d'écart type fonctions de l'angle d'impact et de la vitesse d'impact.

La Fig. 2 représente la comparaison des résultats du modèle avec les résultats expérimentaux pour le flux de masse dans une section. Pour les deux types de particules, les résultats du modèle sont en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Bien qu'approché, ce modèle stochastique lagrangien semble bien adapté pour la modélisation de la vitesse fluide le long de la trajectoire de la particule solide.

## Remerciements

Ce travail a été effectué dans le cadre du projet 97-03 du Laboratoire Franco-Chinois LIAMA (Laboratoire Franco-chinois d'Informatique, d'Automatique et de Mathématiques Appliquées).

## Références

- [1] Y. Zhuang, J.D. Wilson, E.P. Lozowski, A trajectory-simulation model for heavy particle motion in turbulent flow, *Trans. ASME* 111 (1989) 492–494.
- [2] B.L. Sawford, F.M. Guess, Lagrangian statistical simulation of the turbulent motion of heavy particles, *Boundary Layer Meteorology* 54 (1991) 147–166.
- [3] J. Pozorski, J.P. Minier, On the Lagrangian turbulent dispersion models based on the Langevin equation, *Int. J. Multiphase Flow* 24 (1998) 913–945.
- [4] A.M. Reynolds, On the formulation of Lagrangian stochastic models for heavy particle trajectories, *J. Colloid Interface Sci.* 232 (2000) 260–268.

- [5] Y. Shao, The fractional Ornstein–Uhlenbeck process as a representation of homogeneous Eulerian velocity turbulence, *Physica D* 83 (1995) 461–477.
- [6] A.M. Reynolds, J.E. Cohen, Stochastic simulation of heavy-particle trajectories in turbulent flows, *Phys. Fluids* 14 (2002) 342–351.
- [7] D.J. Thomson, Criteria for the selection of stochastic models of particle trajectories in turbulent flows, *J. Fluid Mech.* 180 (1987) 529–556.
- [8] G.T. Csanady, Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 201–208.
- [9] W.H. Snyder, J.L. Lumey, Some measurements of particles velocity autocorrelation functions in a turbulent flow, *J. Fluid Mech.* 48 (1971) 41–71.
- [10] A. Tanière, B. Oesterlé, J.C. Monnier, On the behavior of solid particles in a horizontal boundary layer with turbulence and saltation effects, *Exp. Fluids* 23 (1997) 463–471.
- [11] L.P. Wang, D.E. Stock, Dispersion of heavy particles by turbulent motion, *J. Atmos. Sci.* 50 (13) (1993) 1897–1913.