



Modélisation du champ des vitesses de l'urine dans un bolus urétéral

Alexandre Vogel, Badaoui Elmabsout, Daniel Gintz

Laboratoire de modélisation en mécanique (LMM), université Paris VI, 4, place Jussieu, case 162, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 1^{er} octobre 2003 ; accepté après révision le 30 mars 2004

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Le transport de l'urine chez l'Homme se fait par l'intermédiaire de bolus qui se forment du côté du rein et se déplacent le long de l'uretère vers la vessie. Pour déterminer le champ des vitesses dans un bolus, nous utilisons une condition d'adhérence sur l'interface urine/paroi. On en déduit un système linéaire infini vérifié par une suite de paramètres. Un algorithme itératif convergent permet de résoudre ce système et de déterminer analytiquement les composantes du vecteur vitesse dans l'urine.

Pour citer cet article : *A. Vogel et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Modelling of urine flow in an ureteral bolus. Urine transport is made from the kidney to the bladder through the ureter by isolated pockets called bolus. To determine the urine flow in a bolus, we use an adherence condition on the interface urine/wall. It gives us an infinite linear system verified by a set of parameters. An iterative and convergent algorithm allows us to solve this system and to determine analytically the components of the velocity vector in the bolus. **To cite this article:** *A. Vogel et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Biomécanique ; Modélisation ; Uretère ; Bolus ; Champ des vitesses

Keywords: Biomechanics; Modelling; Ureter; Bolus; Urine flow

Abridged English version

Between the bladder and the kidney, urine transport is made by isolated pockets, called bolus, through the ureter at a constant speed $V_0 = 0.03 \text{ m s}^{-1}$. This study is based on the work of Gintz [1] and Gintz et al. [2]. It deals with the modelling of the urine flow in an ureteral bolus with the same hypotheses: the bolus moves on a rectilinear portion, the movement is stationary and is in each plane of the ureteral axis. Moreover, the ureteral axis

Adresses e-mail : vogel@lmm.jussieu.fr (A. Vogel), bae@ccr.jussieu.fr (B. Elmabsout), gintz@lmm.jussieu.fr (D. Gintz).

is a symmetric axis and the urine is an incompressible fluid. The muscular layer of the ureteral wall produces a mechanical force perpendicular to the axis [3]. Finally, the role of the gravity is negligible [4]. With these hypotheses, we can establish the dimensionless equations of the problem. So we decide to neglect for each equation the terms whose coefficients are less than 1% of the bigger coefficient. Under this condition, the equations of urine dynamics permit to consider that as a first approximation the pression is constant in the bolus [5].

We obtain an analytical solution for the axial and radial components U^3 and U^1 of the urine velocity expressed in the bolus frame. This solution (1) depends on two infinite series of constants, A_n and B_n ($n \in \mathbb{N}$). The internal surface of the bolus wall is given by the function $r = \phi(z)$ (Fig. 1). We use an adherence condition of the fluid on this interface by imposing the equality of the axial and radial components (U^3, U^1) of the velocity vector in the urine with the axial and radial components (V^3, V^1) of the velocity vector in the wall (2).

This condition gives us an infinite linear system (3) with two unknown vectors of infinite order, A and B . We truncate the system (3) up to s order and we can prove that the solutions A^s and B^s of this truncated system converge towards the solutions A and B when s tends to infinity.

A numerical study shows that for $s = 78$ we obtain a good approximation of A and B . This result is presented in Fig. 2. It shows that far from the extremities of the bolus, which are particular points, there exists an unique anticlockwise vortex in the bolus.

In the future, it would be interesting to consider the case of non-newtonian fluids and the influence of the properties of the wall on the urine flow and to study the flow near the bolus extremities.

1. Introduction

L'écoulement de l'urine dans l'uretère se fait par l'intermédiaire de poches fermées aux deux extrémités, appelées bolus, indépendantes les unes des autres dans le cas d'une diurèse normale. Des études précédentes menées par Gintz [1] et Gintz et al. [2] ont permis de modéliser la forme d'un bolus pour des valeurs données des paramètres médicaux. Nous reprenons dans cette étude les mêmes hypothèses de modélisation. Ainsi, le bolus sera supposé se déplacer sur une portion rectiligne et axisymétrique de l'uretère à une vitesse constante $V_0 = 0,03 \text{ m s}^{-1}$ dans un mouvement stationnaire se faisant dans tout plan passant par l'axe de l'uretère. L'axe urétéral est un axe de symétrie et l'urine est un fluide newtonien incompressible. Par ailleurs, l'uretère est constitué de trois couches qui sont de l'extérieur vers l'intérieur : l'adventice, couche conjonctivo-élastique considérée comme un tissu viscoélastique modélisable par le modèle de Kelvin–Voigt, la couche musculaire qui produit une force perpendiculaire à l'axe urétéral [3] et la muqueuse qui ne joue quant à elle aucun rôle mécanique particulier. Enfin, la pesanteur n'a qu'une influence négligeable [4]. Après avoir établi les équations de continuité et de la dynamique dans l'urine et dans la paroi ainsi que les conditions aux limites au niveau des parois interne et externe avec les hypothèses énoncées précédemment, nous les avons adimensionnées et nous avons négligé dans chaque équation les termes dont les coefficients sont inférieurs à 1% du plus grand des coefficients. Dans ces conditions, les équations de la dynamique dans l'urine permettent de considérer qu'en *première approximation* la pression est constante à l'intérieur du bolus (cf. [5]).

2. Présentation du problème

2.1. Forme du bolus

La forme du bolus utilisée dans cette étude est celle obtenue par Gintz et al. [2] grâce aux hypothèses de base évoquées précédemment et grâce aux conditions aux limites imposées sur les surfaces interne et externe du bolus évoquées plus loin. Nous noterons $\phi(z)$ la fonction décrivant la surface interne et $\psi(z)$ celle décrivant la surface

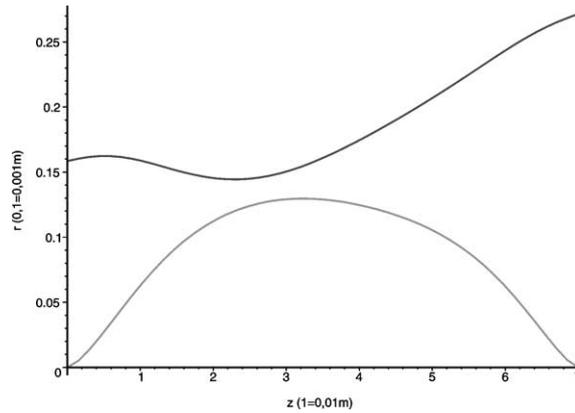


Fig. 1. Représentation graphique du bolus.
 Fig. 1. Graphical representation of the bolus.

externe. La forme de notre bolus est donnée par la Fig. 1, l'axe Oz représentant l'axe urétéral et l'axe Or l'axe radial. Le bolus présente une longueur $L = 0,07$ m.

Pour la suite de l'étude, nous avons utilisé un développement limité en série de Fourier impaire de période $2L$ de la fonction ϕ , soit $\phi(z) \approx \sum_{j=1}^{j_m} \phi_j \sin(\frac{j\pi}{L}z) \equiv \phi^{j_m}(z)$ où pour tout j , $\phi_j = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(z) \sin(\frac{j\pi}{L}z) dz$. Dans la pratique, $j_m = 20$ est suffisant pour que les courbes de ϕ et de ϕ^{j_m} coïncident.

2.2. Etablissement du système étudié

L'étude de Gintz et al. [2] permet d'obtenir une fonction de courant H que l'on prendra au départ sous la forme d'une série de Fourier de la variable z dont les coefficients dépendent de r . Soient \vec{U} le champ des vitesses de l'urine dans le bolus, exprimées dans le repère lié au bolus, découlant de cette fonction de courant, et U^1 et U^3 ses composantes respectivement radiale et axiale. Grâce à l'axisymétrie et à la fermeture du bolus à ses deux extrémités, nous avons les conditions aux limites :

$$\begin{cases} U^1(0, z) = 0 \\ U^3(0, 0) = 0 \\ U^3(\phi(L), L) = 0 \end{cases}$$

Ces conditions, ainsi que les conditions d'adhérence à la paroi traitées plus tard, permettent de simplifier la fonction H et d'en déduire la forme de U^1 et U^3 que nous présentons en (1).

$$\begin{cases} H(r, z) = M_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[r A_n I_1\left(\frac{n\pi}{L}r\right) + B_n \frac{L}{n\pi} r^2 I_0\left(\frac{n\pi}{L}r\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \\ U^1(r, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{r}{2} B_n I_0\left(\frac{n\pi}{L}r\right) + \frac{n\pi}{L} A_n I_1\left(\frac{n\pi}{L}r\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \\ U^3(r, z) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{n\pi}{L} I_0\left(\frac{n\pi}{L}r\right) A_n + \left[\frac{L}{2n\pi} I_0\left(\frac{n\pi}{L}r\right) + \frac{r}{2} I_1\left(\frac{n\pi}{L}r\right) \right] B_n \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \end{cases} \quad (1)$$

où I_0 et I_1 sont des fonctions de Bessel modifiées.

Il nous faut donc déterminer dans ces expressions de U^1 et U^3 les constantes inconnues A_n et B_n ($n \in \mathbb{N}$). Pour cela, nous imposons à l'interface paroi/urine ($r = \phi(z)$, $z \in]0, L[$) une condition d'adhérence. En effet,

connaissant les composantes radiales et axiales V^1 et V^3 du champ de vitesse dans la paroi urétérale [2], il suffit de poser pour $r = \phi(z)$, $z \in]0, L[$, l'égalité des composantes des vecteurs vitesse pour tout $z \in]0, L[$:

$$U^1[\phi(z), z] = V^1[\phi(z), z] \quad (2a)$$

$$U^3[\phi(z), z] = V^3[\phi(z), z] = -V_0 \quad (2b)$$

L'expression de $U^3[\phi(z), z]$ étant développable en série de Fourier impaire de la variable z , nous considérons la constante V_0 comme la somme d'une série de Fourier impaire dont nous noterons α_k les coefficients. En conséquence, l'Éq. (2b) est équivalente à un système infini de relations linéaires liant les A_n et les B_n . Pour l'Éq. (2a), nous utiliserons le fait que la paroi est une ligne de courant et par conséquent une trajectoire puisque le problème est stationnaire. Si l'on note \vec{n}_u le vecteur normal à la paroi interne, cela se traduit par $\vec{V} \cdot \vec{n}_u = 0 = V^1[\phi(z), z] - \phi'(z)V^3[\phi(z), z]$. Ainsi, les conditions d'adhérence à l'interface urine/paroi seront remplies si et seulement si nous imposons dans un premier temps $U^3[\phi(z), z] = -V_0$ puis $U^1[\phi(z), z] = \phi'(z)U^3[\phi(z), z] = -\phi'(z)V_0$. Le développement en série de Fourier des deux membres de cette dernière équation conduit à un autre système linéaire infini de relations liant les A_n et les B_n . Finalement, cette condition d'adhérence s'écrit sous la forme d'un système linéaire infini (3) où l'on note γ_k ($k \in \mathbb{N}$) les coefficients de Fourier du second membre de cette équation.

$$\begin{cases} P \cdot A + Q \cdot B = \alpha \\ S \cdot A + R \cdot B = \gamma \end{cases} \quad (3)$$

où les matrices P , Q , R , S et les vecteurs α et γ , de composantes respectives α_k et γ_k ($k \in \mathbb{N}$), sont des matrices et des vecteurs d'ordre infini connus alors que les vecteurs A et B sont des vecteurs inconnus.

3. Approche des vecteurs solutions A et B

3.1. Etude des matrices

Notons $P_{k,m}$, $Q_{k,m}$, $R_{k,m}$ et $S_{k,m}$ ($(k, m) \in \mathbb{N}^2$) les termes respectifs de la $k^{\text{ème}}$ ligne et de la $m^{\text{ème}}$ colonnes des matrices P , Q , R et S . De plus, nous appellerons *Termes des lignes* les termes pour k fixé et pour $m > k$ et *Termes des colonnes* les termes pour m fixé et pour $k > m$. Les *Termes de la diagonale* s'obtiennent pour $k = m$. En utilisant plusieurs fois l'intégration par parties sur chacun des termes présentés précédemment et le fait que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$, nous arrivons à déterminer l'évolution des éléments des matrices et des composantes des vecteurs.

Nous présentons dans le Tableau 1 un récapitulatif sur l'évolution des éléments $P_{k,m}$, $Q_{k,m}$, $R_{k,m}$ et $S_{k,m}$ pour k et m tendant vers l'infini et dans le Tableau 2 l'évolution des composantes α_k et γ_k pour k tendant vers l'infini. Etant donné la forme de α nous distinguerons les termes d'ordre pair et ceux d'ordre impair.

Tableau 1
Evolution des éléments des matrices P , Q , R et S

Table 1
Evolution of the elements of the matrices P , Q , R et S

	Termes des lignes	Termes des colonnes	Termes de la diagonale
P	$1/m^2$	$1/k^2$	m^4
Q	$1/m^3$	$1/k^2$	m
R	$1/m^3$	$1/k^2$	$1/m^2$
S	$1/m$	$1/k^2$	$1/m$

Tableau 2
Evolution des composantes de α et γ

Table 2
Evolution of the components of α and γ

α		γ
α_{2p}	α_{2p+1}	γ_k
0	$\frac{1}{2p+1}$	$\frac{1}{k^2}$

Tableau 3
Evolution des composantes de A et B

Table 3
Evolution of the components of A and B

A	B
$\frac{1}{k^2}$	$\frac{1}{k^3}$

3.2. Construction de l’algorithme à partir du système tronqué

Soient A^s, B^s, α^s et γ^s les vecteurs de \mathbb{R}^s ayant les s premières composantes de A, B, α et γ . De même, soient P^s, Q^s, R^s et S^s les matrices d’ordre s obtenues en ne gardant que les s premières composantes des lignes et des colonnes des matrices P, Q, R et S . En se limitant à l’ordre s , le système (3) tronqué obtenu possède les solutions A^s et B^s de la forme suivante :

$$\begin{cases} A^s = (P^s)^{-1}[\alpha^s - Q^s B^s] \\ B^s = [R^s - S^s (P^s)^{-1} Q^s]^{-1}[\gamma^s - S^s (P^s)^{-1} \alpha^s] \end{cases}$$

Connaissant le comportement de chacun des éléments du second membre de ces deux égalités, nous pouvons étudier l’évolution des composantes des vecteurs A^s et B^s pour s tendant vers l’infini. Le résultat de ces opérations est présenté dans le Tableau 3. Il faut maintenant montrer que pour un ordre s tendant vers l’infini, les vecteurs A^s et B^s convergent vers une solution de (3). Pour cela, considérons nos matrices et nos vecteurs à l’ordre $s + 1$ selon le principe suivant :

$$P^{s+1} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & & P^s & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ & & & & P_{s+1}^{s+1} & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{s+1} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{B}^{s+1} \\ \vdots \\ B_{s+1}^{s+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, si l’on reprend le système (3) tronqué à l’ordre $s + 1$, nous obtenons en particulier l’équation suivante :

$$P^s (\tilde{A}^s - A^s) + Q^s (\tilde{B}^s - B^s) + \tilde{P}^{s+1} A_{s+1}^{s+1} + \tilde{Q}^{s+1} B_{s+1}^{s+1} = 0 \tag{4}$$

où \tilde{A}^{s+1} et \tilde{B}^{s+1} sont les s premières composantes des vecteurs A^{s+1} et B^{s+1} .

Pour s tendant vers l’infini, on a montré que A_{s+1}^{s+1} et B_{s+1}^{s+1} tendent vers 0. De plus, $\|\tilde{A}^{s+1} - A^s\|$ et $\|\tilde{B}^{s+1} - B^s\|$ tendent vers 0 pour s tendant vers l’infini plus vite que $1/s$. Ceci nous permet de déduire que \tilde{A}^s et \tilde{B}^s tendent respectivement vers A^s et B^s et donc que pour s tendant vers l’infini, A^s et B^s tendent vers une valeur stable. Nous avons ainsi construit un algorithme convergent permettant d’approcher les vecteurs A et B .

4. Résultat numérique

Une approche numérique a été faite à l’aide du logiciel *Mathematica* et nous avons observé comme prévu une convergence des vecteurs A^s et B^s vers des valeurs stables. Dans la pratique, il suffit d’arrêter le calcul à $s = 78$ pour obtenir une solution numériquement acceptable. Cette solution est présentée dans la Fig. 2. Nous constatons que loin des extrémités du bolus, qui sont des points singuliers, un tourbillon unique se forme dans le sens contraire des aiguilles d’une montre.

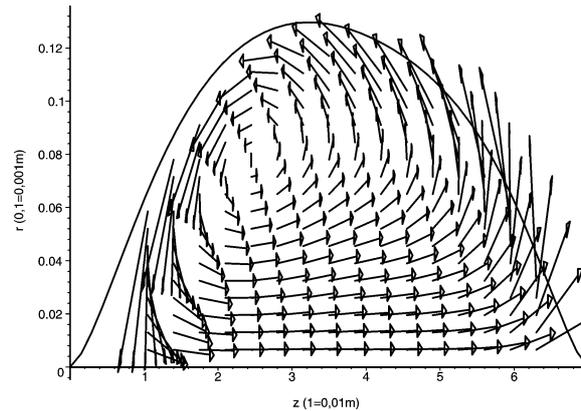


Fig. 2. Champ des vitesses dans le bolus.

Fig. 2. Urine flow in the bolus.

5. Conclusion

Nous avons exprimé les conditions d'adhérence à l'interface urine/paroi du bolus sous la forme d'un double système linéaire infini vérifié par les constantes A_n et B_n ($n \in \mathbb{N}$), dont dépend le champ des vitesses dans l'urine. Nous avons ensuite construit un algorithme itératif convergent permettant d'approcher la solution de ce système linéaire. La solution approchée de ce système tronqué à l'ordre $s = 78$ permet de décrire le champ des vitesses à l'intérieur du bolus. Nous avons pu constater ainsi l'existence d'un tourbillon unique entre l'axe et la paroi dans tout plan passant par l'axe de l'uretère.

Par ailleurs, la méthode développée pourrait ainsi permettre d'étudier l'influence des propriétés de la paroi sur le champ des vitesses et être adaptée aux fluides biologiques non-newtoniens. Enfin, il serait intéressant d'étudier l'écoulement de l'urine au voisinage des extrémités du bolus.

Références

- [1] D. Gintz, Modélisation du système urinaire supérieur chez l'homme, Thèse de l'université Paris VI, 1998.
- [2] D. Gintz, B. ElMabsout, J.-P. Renaudeau, Modélisation du bolus urétéral humain, C. R. Mécanique 329 (2001) 303–306.
- [3] E.O. Carew, T.J. Pedley, An active membrane model for peristaltic pumping: I – Periodic activation waves in an infinite tube, J. Biomech. Eng. (1997) 66–76.
- [4] J.R. Thornbury, J. Lapidus, Effect of gravity on ureteral peristalsis human adult in the inverted position, J. Urol. 111 (1974) 465–467.
- [5] D.J. Griffiths, C. Notschaele, The mechanics of urine transport in the upper urinary tract: the dynamics of the isolated bolus, Neurorol. Urodyn. 2 (1983) 155–156.