



A model for gas–liquid slug flow in downwardly inclined ducts

Arthur Dymant*, Abdelaziz Boudlal

Laboratoire de mécanique de Lille – UMR CNRS 8107, U.S.T.L., département de mécanique fondamentale,
M3, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Received 10 October 2002; accepted after revision 27 April 2004

Presented by Georges Duvaut

Abstract

A simple theoretical model is proposed in order to represent gas–liquid slug flows in inclined ducts of arbitrary shape. **To cite this article:** A. Dymant, A. Boudlal, C. R. Mecanique 332 (2004).

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Un modèle pour les écoulements gaz–liquide à bouchons en conduite inclinée. Un modèle théorique simple est proposé pour représenter les écoulements gaz–liquide périodiques à bouchons, en canalisation inclinée de forme quelconque. **Pour citer cet article :** A. Dymant, A. Boudlal, C. R. Mecanique 332 (2004).

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Keywords: Fluid mechanics; Two phase flow; Periodic slugs; Inclined duct

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Écoulement diphasique ; Bouchons liquides ; Conduite inclinée

Version française abrégée

1. L'objectif est de donner un modèle théorique simple des écoulements à bouchons liquides périodiques se propageant dans une canalisation en pente descendante et de forme quelconque. Deux bouchons successifs sont séparés par une couche liquide où l'approximation de mouvement quasi-horizontal est valable, surmontée par une bulle de gaz. On suppose que la pesanteur et le frottement du liquide sur la paroi sont les forces prépondérantes, la capillarité, le frottement du gaz sur la paroi et le frottement interfacial étant négligeables. Cela étant la pression du gaz est sensiblement constante, ce qui signifie que la quantité de mouvement du gaz est petite devant celle du liquide : compte tenu de l'écart entre les masses volumiques ceci est réalisé lorsque la vitesse du gaz n'est pas trop largement supérieure à celle du liquide.

* Corresponding author.

E-mail address: arthur.dymant@univ-lille1.fr (A. Dymant).

La section droite de la canalisation est arrondie, à concavité tournée vers l'intérieur. La canalisation présente un plan de symétrie vertical contenant l'axe des x situé dans le fond ; les axes des y et des z complètent le repère, ce dernier axe étant dans le plan de symétrie. Le profil de la section et les grandeurs $h, b, \sigma, f, k, \delta, c$ et φ sont définies sur la Fig. 1 et dans le texte en anglais, g étant l'accélération de la pesanteur. Σ, F, Δ et ϕ sont les valeurs de σ, f, δ et φ prises au sommet $h = H$ où c est infini. On sait que f est une fonction de φ décroissante et convexe [1]. Par contre, on peut montrer que δ est une fonction de h concave, avec $\delta(0) = 0, d\delta/dh \rightarrow -\infty$ en $h = H$ et présentant un maximum pour une valeur désignée par \tilde{h} .

2. Soit ω la vitesse de propagation des bouchons, u la vitesse dans la couche liquide sous la bulle de gaz, U celle dans les bouchons et v celle du gaz. L'équation de conservation de la masse du liquide (1) et celle de l'ensemble des deux fluides conduisent à $v = \omega$. La pression dans la couche liquide est $\rho g(h - z)$ avec ρ masse volumique. Par suite, l'équation de la dynamique s'exprime par (2) avec $\xi = x - \omega t, t$ étant le temps, β la pente et ψ le coefficient de frottement. Le frottement est supposé turbulent rugueux, relation (3), avec Ψ valeur de ψ dans les bouchons. Pour h donné l'Éq. (2) fournit une valeur unique de $dh/d\xi$, donc h est monotone, ce qui n'est pas possible pour une interface continue commençant et finissant en $h = H$. Il s'ensuit qu'une discontinuité confinée [1] existe à une extrémité. Pour des ondes descendantes, $\omega > u$, que nous considérons ici la discontinuité est située en tête du bouchon (Fig. 2), donc $dh/d\xi$ est positif. L'existence d'une discontinuité entraîne celle de conditions critiques (indice étoile), d'où résultent les formules (4) à (7). Cela étant l'équation (2) donne (8) avec S défini par (9). Pour satisfaire à la condition $(h - h^*)S > 0$ qui provient de (8), compte tenu de $dh/d\xi > 0$ et du fait que σc croît avec h , il faut $S < 0$ pour $h_I < h < h^*$ et $S > 0$ pour $h^* < h < H, h_I$ étant la plus grande racine de $S = 0$ inférieure à h^* . Il est facile de montrer que S augmente avec ψ^*/β pour $h < h^*$, de sorte que h_I varie de même. D'autre part, pour $h > h^*$ il faut $\delta > \delta^*$ pour réaliser $S > 0$, ce qui exige $h^* < h_\Delta$ où h_Δ est la seconde valeur de h pour laquelle $\delta = \Delta$ (Fig. 3).

En aval de la discontinuité la pression est $\rho g(H - z) + P$, avec P donné par (10) en fonction de l'altitude h_I en amont [1]. Il faut $h_I < h_i, h_i$ correspondant à $P = 0$ dans (10), pour que la discontinuité soit confinée. Les longueurs L_g et L_p d'une bulle et d'un bouchon sont données par (11) et (12), cette dernière relation exprimant le bilan de chute de pression entre deux bulles successives.

3. Les résultats précédents peuvent être rassemblés dans un diagramme global en fonction de φ (Fig. 4). Les variations de S y sont aisément transposées car $dS/d\varphi = f dS/dh$. Quant à la discontinuité, grâce à la relation $\sigma^{*2} c^{*2} = -g(d\varphi/df)^*$, on tire de (10) que la tangente au point correspondant à l'état critique sur la courbe $f(\varphi)$ est parallèle à la droite joignant les points représentatifs de l'amont et de l'aval, propriété qui vaut pour les discontinuités naissantes, ce qui donne φ_i . Selon la Fig. 4 les bouchons peuvent exister pour $h_I < h_1 < h_i$ et $S(H) > 0$. C'est le cas lorsque, ayant choisi comme prescrit $h^* < h_\Delta$, on part d'une valeur de ψ^*/β très petite car alors h_I est lui-même très petit et $S(H)$ positif. Quand on augmente $\psi^*/\beta, h_I$ augmente aussi et $S(H)$ diminue : alors les bouchons disparaissent soit parce que h_I devient égal à h_i , soit parce que $S(H)$ s'annule. Donc le domaine d'existence des bouchons dans le plan $(h^*, \psi^*/\beta)$ est limité par la courbe $S(h_i) = 0$, puisque $S(h_I)$ est nul par définition, ou par la courbe $S(H) = 0$.

Pour résumer, la solution dépend des trois paramètres h^*, ψ^* , et h_1 assujettis aux conditions énoncées ci-dessus. Or, habituellement les régimes d'écoulement et leurs frontières sont représentés à l'aide des vitesses surfaciques \bar{u} et \bar{v} [2] dont l'expression est donnée par (13). Les frontières sont obtenues en posant $h_1 = h_i, L_p = 0$.

Application est faite à la section circulaire (Fig. 5). L'angle θ est défini par $h = R(1 - \cos\theta)$ où R est le rayon, et on a $h_\Delta = R, \tilde{h} = 1.63R$. Le résultat est transposé en Fig. 6 dans le plan des vitesses surfaciques et il est superposé sur la Fig. 7 aux données expérimentales [3]. On constate que les ordres de grandeur sont respectés. De plus, la relation (7) est similaire à une des lois complémentaires introduites dans le modèle semi-empirique actuellement en usage, et destinées à fermer le système d'équations [2]. Une information supplémentaire concernant l'amplitude est apportée en remarquant que h_1 doit être inférieur à la plus grande valeur possible de h_i . Pour la section circulaire cette valeur, obtenue pour $h^* = R$, est égale à $0.45R$. Par conséquent, h_1 ne peut pas excéder $0.45R$, ce qui est conforme aux observations expérimentales [4].

1. Context

A theoretical model of gas–liquid slug flow in downwardly inclined ducts is proposed. The liquid is subject only to gravity and friction forces acting on the wall. Capillarity, interfacial friction and gas friction on the wall are neglected, so the gas pressure is almost constant, which implies that the gas momentum rate is small with respect to the liquid one. Due to the contrast in density this is fulfilled when the velocities of both fluids are of the same order of magnitude.

The cross section of the duct is round, smoothly shaped and symmetrical about a vertical plane. The x axis is situated at the bottom and it is downwardly directed; the z axis is contained in the plane of symmetry and the y axis completes the system of coordinates. Let $y = \eta(z)$ define the half of the section corresponding to $y > 0$; $z = h$ represents the free surface of the liquid layer topped by the gaseous bubble (Fig. 1); h is independent of y in the frame of the shallow water theory. We introduce $b = \eta(h)$, $\sigma = \int_0^h \eta dz$, $f = 1/\sigma$, $k = \int_0^h [1 + (d\eta/dz)^2]^{1/2} dz$, $\delta = 4\sigma/k$ and φ by $d\varphi = \sigma dh$ with $\varphi(0) = 0$; $c = (g\sigma/b)^{1/2}$ is the wave speed of small disturbances, g being the gravitational acceleration. Σ , F , Δ and ϕ are the values taken by σ , f , δ and φ at the top $h = H$, where c tends to infinity. It is known that f is a decreasing convex function of φ with $df/d\varphi \rightarrow -\infty$ for $\varphi \rightarrow 0$ and $df/d\varphi = 0$ for $f = F$ [1]. As for δ , it may be shown that it is a concave function of h with $\delta = 0$ at $h = 0$, $d\delta/dh \rightarrow -\infty$ at $h = H$ and a maximum at a value termed \bar{h} . (f and δ are represented in Figs. 3 and 4.)

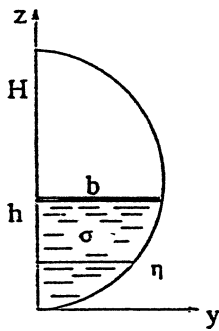


Fig. 1. Demie section droite de la conduite.

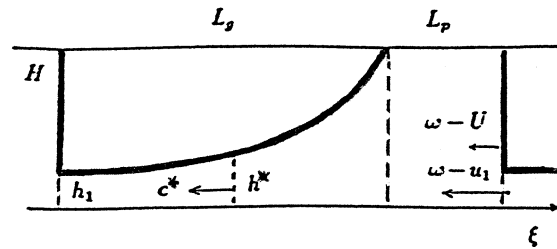


Fig. 2. Écoulement à bouchons dans le repère relatif.

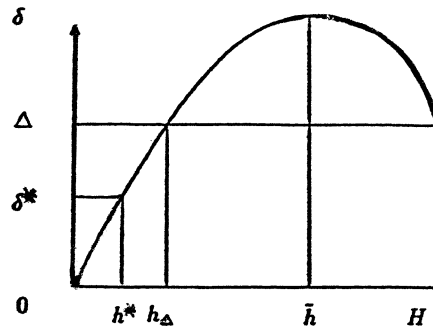


Fig. 3. Profondeur critique nécessaire aux écoulements à bouchons, $h^* < h_{\Delta}$.

2. Formulation

Let ω be the speed of propagation, u the velocity inside the liquid layer and U the velocity inside the plugs. Conservation of mass of the liquid is expressed by

$$\sigma(\omega - u) = \Sigma(\omega - U) = Q \quad (1)$$

Now, according to the conservation of mass of both liquid and gas, $\sigma u + (\Sigma - \sigma)v = \Sigma U$, we obtain for the gas velocity: $v = \omega$.

Inside the liquid layer the pressure is $\rho g(h - z)$, ρ being the density. In the relative frame of reference, with the variable $x - \omega t = \xi$, t being the time, conservation of momentum can be written

$$\left(1 - \frac{Q^2}{\sigma^2 c^2}\right) \frac{dh}{d\xi} = \beta - \frac{\psi}{2g\delta} \left(\omega - \frac{Q}{\sigma}\right)^2 \quad (2)$$

where β is the slope and ψ the friction factor. The flow regime is assumed turbulent and rough,

$$\psi \delta^n = \Psi \Delta^n \quad (3)$$

Ψ being the value of ψ inside the plugs and n a constant usually taken equal to zero or to 1/3 (Manning's law).

As σ , c , δ and ψ are constant for given h , Eq. (2) provides a definite value of $dh/d\xi$, which means that h is monotonous. Since a continuous interface beginning and ending at $h = H$ would require at least two distinct values of $dh/d\xi$, necessarily a confined discontinuity [1] takes place at one end. For downwardly travelling waves ($\omega > u$) which will be investigated in what follows the discontinuity is situated at the front of the slug, yielding $dh/d\xi > 0$ everywhere.

As a discontinuity exists critical conditions exist too (superscript star). Consequently $Q = \sigma^* c^*$ and since the left-hand side of (2) cancels at the critical section we have

$$u^* = \left(2g\beta \frac{\delta^*}{\psi^*}\right)^{1/2} \quad (4)$$

So, we can deduce from (1):

$$\omega = u^* + c^* \quad (5)$$

$$u = u^* + c^* - \sigma^* c^* f \quad (6)$$

and

$$\omega = U + F \sigma^* c^* \quad (7)$$

Then Eq. (2) becomes

$$\left(1 - \frac{\sigma^{*2} c^{*2}}{\sigma^2 c^2}\right) \frac{dh}{\beta d\xi} = S \quad (8)$$

with

$$S = 1 - \left(\frac{\delta^*}{\delta}\right)^{1+n} \left(\frac{u}{u^*}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\delta^*}{\delta}\right)^{1+n} \left[1 + \frac{c^*}{\sqrt{2g\delta^*}} \sqrt{\frac{\psi^*}{\beta}} \left(1 - \frac{\sigma^*}{\sigma}\right)\right]^2 \quad (9)$$

As $dh/d\xi$ is positive the same must be fulfilled by $(h - h^*)S$ because σc increases with h . Slug flow can occur if $S < 0$ holds for $h_I < h < h^*$, h_I being the largest root of $S = 0$ below h^* , and if $S > 0$ for $h^* < h \leq H$. The root h_I exists always as $S = 0$ and $dS/dh > 0$ at $h = h^*$ and as $S = 1$ at the value of h cancelling u , which is smaller than h^* according to (6). Moreover, it is easy to check that S increases with ψ^*/β for $h < h^*$, so that h_I increases

too. Besides, $\delta > \delta^*$ is necessary in order to realize $S > 0$ for $h > h^*$, which requires $h^* < h_\Delta$, where h_Δ is the second value of h providing $\delta = \Delta$ (Fig. 3).

Downstream of the discontinuity the pressure is $\rho g(h - z) + P$ and the pressure P at the top of the duct is expressed in terms of the flow conditions upstream (subscript 1) by [1]:

$$\frac{P}{\rho F} = \sigma^{*2} c^{*2} (f_1 - F) - g(\phi - \varphi_1) \tag{10}$$

The upstream height h_1 must be smaller than h_i , corresponding to $P = 0$, and defined consequently in terms of h^* by $\sigma^{*2} c^{*2} (f_i - F) = g(\phi - \varphi_i)$. Roll waves occur for h_1 larger than h_i (according to a stability analysis which will be presented in a separate paper).

The length L_g of a gaseous bubble results from (8):

$$\beta L_g = \int_{h_1}^H \left(1 - \frac{\sigma^{*2} c^{*2}}{\sigma^2 c^2} \right) \frac{dh}{S} \tag{11}$$

and the plug length L_p is given by the pressure drop budget between two successive bubbles:

$$P = \left(g\beta - \frac{\Psi U^2}{2\Delta} \right) \rho L_p \tag{12}$$

3. Slug occurrence and transition boundaries

The essential of previous properties can be gathered in a global diagram versus φ (Fig. 4). The variations of S can easily be reported since $dS/d\varphi = f dS/dh$. Concerning the discontinuity, the tangent at the point of the curve $f(\varphi)$ corresponding to the critical state is parallel to the straight line joining the points representative of upstream

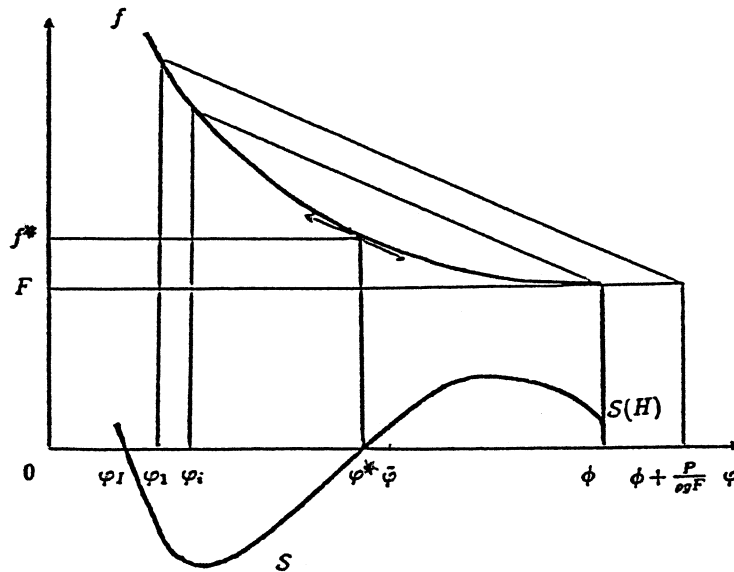


Fig. 4. Global diagram for slug flow occurrence.

Fig. 4. Diagramme global pour les écoulements à bouchons.

(φ_1, f_1) and downstream $(\phi + P/(\rho g F), F)$, a property resulting from (10) because $\sigma^{*2} c^{*2} = -g(d\varphi/df)^*$. Of course, this holds also for incipient discontinuities, providing φ_i .

As it may be observed in Fig. 4 slug flow occurs for $h_I < h_1 < h_i$ and $S(H) > 0$. The critical height h^* being chosen smaller than h_Δ , as prescribed, let us start with a very small value of ψ^*/β . In this case h_I is also very small and $S(H)$ is positive, so that the occurrence of slug flow is possible according to Fig. 4. When ψ^*/β is increased h_I increases too and $S(H)$ decreases: hence occurrence of slug flow goes out either because h_I becomes equal to h_i or because $S(H)$ cancels. Consequently, the domain of slugs in the plane $(h^*, \psi^*/\beta)$ is bounded by either the graph $S(h_i) = 0$, since $S(h_I)$ is zero, or by the graph $S(H) = 0$.

To sum up, for a given cross section shape, H and β , the solution depends on the set of three parameters h^* , ψ^* and h_1 , subject to the previously expressed conditions. Now, usually flow regimes and the transition boundaries are plotted in terms of the superficial velocities \bar{u} a \bar{v} such that $\Sigma \bar{u}$ and $\Sigma \bar{v}$ are the liquid and gas volumetric flow rates [2]. By definition $\Sigma \bar{u} = 1/T \int_0^T \sigma u dt$ where T is the period, the integral being computed at constant x . The calculation leads to:

$$\Sigma \bar{u} = \frac{u^* + c^*}{L_p + L_g} \left[\Sigma L_p + \frac{1}{\beta} \int_{h_1}^H \left(1 - \frac{\sigma^{*2} c^{*2}}{\sigma^2 c^2} \right) \frac{\sigma}{S} dh \right] - \sigma^* c^*, \quad \bar{v} = U - \bar{u} \tag{13}$$

The transition boundaries are obtained by making $h_1 = h_i$ and $L_p = 0$. The knowledge of h^* , ψ^* and h_1 is equivalent to that of \bar{u} , \bar{v} and ψ which have more physical significance as these quantities may be prescribed in laboratory experiments.

Application is made to circular ducts with $n = 1/3$ (Fig. 5). The angle θ is defined by $h = R(1 - \cos \theta)$, R being the radius, and we have $h_\Delta = R$, $\tilde{h} = 1.63R$. The transition boundaries are drawn in Fig. 6 and are superimposed in Fig. 7 to experimental data [3]. The agreement is satisfactory at least in order of magnitude. Moreover, the relation (7) has the same structure as the semi-empirical law connecting ω and U which is introduced in the frame of the classical model in order to close the set of equations [2]. Finally, supplementary information concerning the limitation in height is brought by noticing that h_1 must be smaller than the maximum possible value of h_i . Now, for circular ducts h_i maximum corresponds to $h^* = R$ and it is equal to $0.45R$. As a consequence h_1 cannot exceed $0.45R$, a result consistent with experimental observations [4].

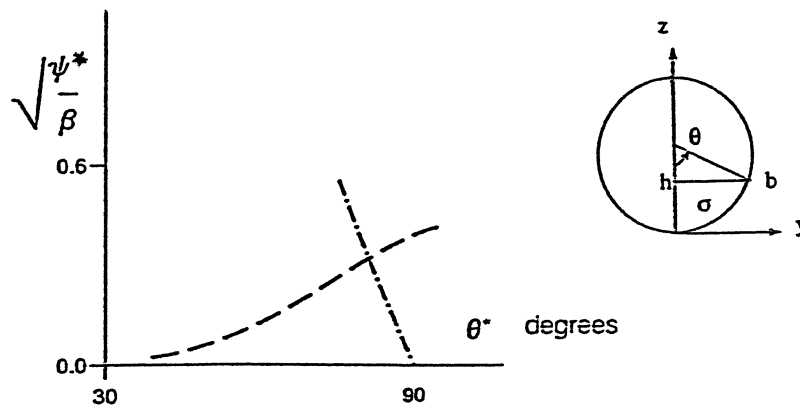


Fig. 5. Transition boundaries for slugs in circular ducts: $n = 1/3$, --- $S(h_i) = 0$, - · - · - $S(H) = 0$.

Fig. 5. Transition aux écoulements à bouchons en conduite circulaire : $n = 1/3$, --- $S(h_i) = 0$, - · - · - $S(H) = 0$.

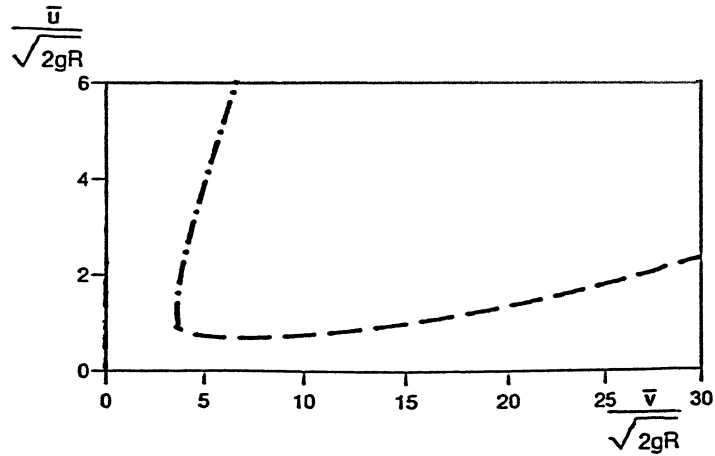


Fig. 6. Domain of slug flow occurrence in circular ducts and for $n = 1/3$.

Fig. 6. Domaine des écoulements à bouchons en conduite circulaire pour $n = 1/3$.

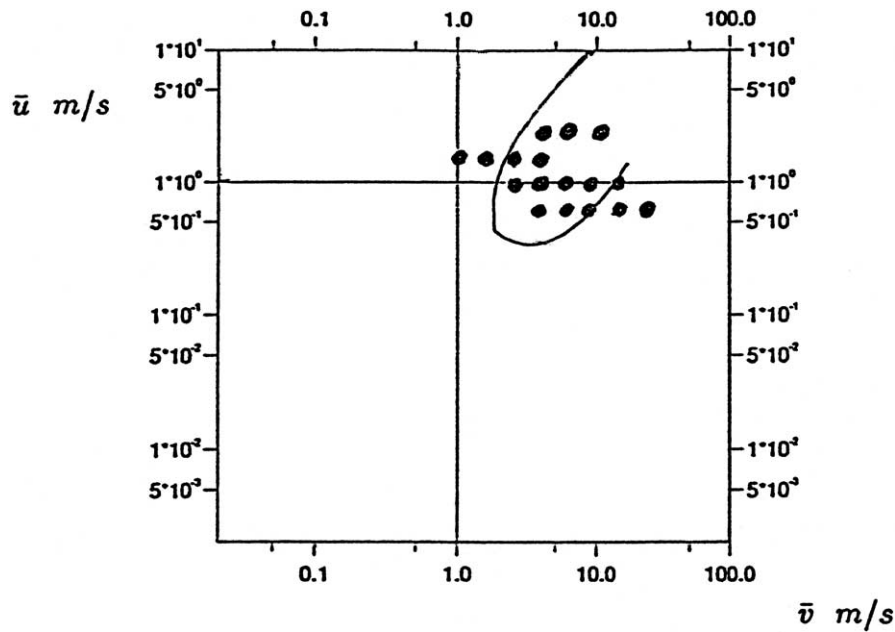


Fig. 7. Comparison with experiments, air-water, $R = 1.25$ cm, $\beta = 5^\circ$: ● experiment, — model, $n = 1/3$.

Fig. 7. Comparaison avec l'expérience, air-eau, $R = 1.25$ cm, $\beta = 5^\circ$: ● expérience, — modèle, $n = 1/3$.

References

- [1] A. Dymont, Discontinuités d'amplitude finie dans les conduites de forme quelconque partiellement remplies de liquide, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II 326 (1998) 179–184.
- [2] Y. Taitel, D. Barnea, Two phase slug flow, Adv. Heat Transfer 20 (1990) 83–132.
- [3] D. Barnea, O. Shoham, Y. Taitel, A. Dukler, Flow pattern transition for gas-liquid flow in horizontal and inclined pipes, Int. J. Multiphase Flow 6 (1980) 217–225.
- [4] P. Andreussi, L.N. Persen, Stratified gas-liquid flow in downwardly inclined pipes, Int. J. Multiphase Flow 13 (1987) 565–575.