



## Espaces d'écoulements dits « universels », 3

Michel Bouthier

Laboratoire de modélisation en mécanique, UPMC, tour 65, 4, place Jussieu, 75252 Paris, France

Reçu le 11 mars 2004 ; accepté le 12 mai 2004

Présenté par Patrick Huerre

---

### Résumé

Les mouvements premiers à vortacité stationnaire uniforme composent une corolle d'espaces vectoriels isomorphes dérivés des déplacements solides ou des écoulements de Couette. Proches cadets des écoulements potentiels, ils vérifient deux extensions du théorème de Lagrange, s'étudient à l'aide des fonctions holomorphes, et sont célèbres quand ils sont plans. Ils interviennent en hydrodynamique, aérodynamique, géophysique, astrophysique, turbulence, physiques des plasmas et de l'hélium superfluide. À chaque fois, des translations transversales non stationnaires arbitraires permettent de générer des mouvements premiers tridimensionnels complexes. Trois écoulements périodiques méconnus servent d'illustration, et approchent l'instabilité de cisaillement dans pléthore de fluides. *Pour citer cet article : M. Bouthier, C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Spaces of universal flows, 3.** Universal motions with uniform steady vorticity form a corolla of linear spaces derived from rigid body motions. Closely related to potential flows, they satisfy two extensions of Lagrange theorem, are investigated with the help of complex functions, as stand celebrated when be plane. They take place in hydrodynamics, aerodynamics, geophysics, astrophysics, turbulence, physics of plasmas and superfluid helium. In all the cases, arbitrary unsteady span-wise translations permit to generalise as well as to exhibit helical or 3D universal motions. Three misunderstood periodic flows illustrate our purpose, as they approach shear instabilities in numerous fluids. *To cite this article: M. Bouthier, C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Génie des matériaux ; Poches tourbillonnaires de Batchelor, Kirchhoff, Rankine ; Couches critiques viscoélastiques ; Ondes de Tollmien–Schlichting

*Keywords:* Material engineering; Rankine, Kirchhoff and Batchelor's vortex patches; Visco-elastic critical layers; Tollmien–Schlichting waves

---

### Abridged English version

*Displacements* stand for universal motions iff their instantaneous rotations are steady. If so, even fluids of third grade and linearly visco-elastic fluids can undergo such displacements; which span linear spaces to which belong Couette and Taylor–Couette flows. Here we define fluid velocity by  $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{x} + \nabla\varphi$ , and determine the space corresponding to a prescribed direction of vorticity [1]. The vorticity  $\boldsymbol{\omega}_0$  has the components  $(0, 0, -\tau)$  with respect

to appropriate inertial rectangular coordinates  $x, y, z$ , whereas the function  $\varphi(x, y, z, t)$  must verify (1). We express the general solution (2) of (1) by means of the real part  $\text{Re}[f(x + iy, t)]$  of arbitrary holomorphic function  $f$  and the component  $w_0(t)$  depending arbitrarily on  $t$  alone. Then the space results simply from superposing arbitrary unsteady normal translations to the plane motions with uniform steady vorticity. The Lagrange theorem admits extensions here: a motion of perfect fluid is universal with constant vorticity iff the initial vorticity is uniform, and iff the pressure gradient  $p'_z$  in the direction of the initial vorticity depends on  $t$  alone. Near a regular point (taken as origin), we can expand the holomorphic function  $f$  in a Taylor serie; that leads to the expansion (4) defining the stream-function  $\psi(x, y, t)$  of the universal motions. Here  $\phi_n, \psi_n, n > 2$ , are defined by (3), whereas  $P_2(x, y, t)$  is any polynomial in  $x, y$  of degree  $\leq 2$ , such that the sum of its coefficients in  $x^2$  and  $y^2$  equals the constant  $\frac{1}{2}\tau$ . *The helical triangular eddy* [3] as *helical eddies* [2] in *multipolar strain fields* with  $\Psi \equiv \frac{\tau}{4}r^2 + a_n(t)r^n \cos n\theta$  represent typical instances. *Around a singularity*, we may utilise Laurent series, and immerse vortices, sinks or sources in simple shears. Consider the stream-functions  $\Psi = \frac{\tau}{2}(y - d)^2 + c \ln(x^2 + y^2)$ ,  $\Psi = \frac{\tau}{2}(y - d)^2 + c \tan^{-1}(y/x)$ ,  $\tau, c, d$  being real constants. They define two noteworthy flows [4], on which the theory [6,7] of profiles with shear at infinity is based entirely. Then, we can rebuild all the theory with universal motions, transpose vortex theory, conformal maps, circle theorem, etc. *mutatis mutandis*, as on the way extend every result to the 3D case whenever so-called sweeping velocities  $w_0(t)$  occur. *Plane motions with constant vorticity* are well known [9]. Potential flows can surround areas with constant vorticity [11] as in *the combined vortices of Rankine* [9], of *Kirchhoff* [12] and *the vortex patch of Prandtl–Batchelor* [13,14]. Several such areas can coexist as in *two-contour vortices* [15] and *strained vortices* [17]. We regard all these flows as *piecewise universal motions*. Nowadays, polygon shaped assemblies of stable line-vortices are called vortex crystals [18]. Vortex rounds of Kelvin stand for early celebrated crystals, which become most valuable for describing *the quantized vortices of helium and plasma columnars*. Vortex patches too can form lattices [20] as they adjoin line-vortices; this involve ‘*shielded Rankine vortices*’ and ‘*invisible multipolar vortices*’ [16]. At last, one often investigates *other strained vortices* [21] and *vortex stability* [22] thanks to Kelvin–Helmholtz waves, which keep the flows universal. In *wave motions*, where walls often lie far away, each spectral expansion furnishes numerous examples of universal motions. First, at  $y = 0$ , consider a rank [6] of line-vortices with intensity  $-\alpha^{-1}\nu_0$  at spacing  $2\pi/\alpha$ , and immerse it in shear velocity field  $(\tau y, 0, 0)$ . We can regard the motion as *universal shear instability with ‘Kelvin cat’s eyes’* [23,24]. We may reduce infinite dissipation at the center of eyes by means of rotating rigid cores as in Rankine vortex. Next, the velocity field  $\tau y + \nu_0 e^{-\alpha y} \sin[\alpha(x - ct)]$ ,  $\nu_0 e^{-\alpha y} \cos[\alpha(x - ct)]$ ,  $w_0$  stands for another universal motion. Here, shear  $\tau$  and phase velocity  $c$  are constant, whereas the wave number  $\alpha$ , the perturbation velocity  $\nu_0$  and the cross flow  $w_0$  can vary with  $t$ : powerful vertical jets hit Couette flow located at  $y > 0$ . Near  $y = 0$ , the flows strongly interact as there appear instabilities depending on the parameter  $\tau(\alpha\nu_0)^{-1}$ . *Wang cells* [25] correspond to  $c = w_0 = 0$  as  $\alpha, \nu_0$  are held constant. We distinguish three cases (Fig. 1): (i)  $\tau(\alpha\nu_0)^{-1} \leq e$ , low shear, Couette flow wavers a little; (ii)  $e < \tau(\alpha\nu_0)^{-1} < e^\kappa/\kappa \cong 4.012$ , where  $\kappa$  is the positive root ( $\cong 2.200$ ) of  $(\kappa - 1) \text{th}(\kappa - 1) = 1$ ; the shear is greater, there appear isolated eddies; (iii)  $e^\kappa/\kappa \leq \tau(\alpha\nu_0)^{-1}$ , strong shear, the eddies enlarge, connect to make up a Kelvin train. At last, we construct another example by superposing simple shear with two symmetric ranks so as a wall lies at  $y = 0$ . The associate complex velocity is  $u - iv = \tau y + k\nu_0 - \nu_0(\text{sh } \alpha h)[\text{ch } \alpha h - \cos \alpha(x - ct + iy)]^{-1}$ ,  $c = \frac{1}{2}\nu_0 \coth \alpha h$ . Here notations stay the same as before, but the parameter  $k$ , that ought to minimise slipping at wall, equals 1. Streamlines in a frame moving at the phase velocity  $c$  are plotted in Fig. 3.

## 1. Définition

En exemple liminaire important, voici les mouvements premiers à vorticité stationnaire uniforme, ou plus brièvement à vorticité constante. *Les déplacements* sont des mouvements vissés généralisés car, si la vitesse à l’origine est  $\mathbf{u}_0(t)$ , la vitesse au point  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_0(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0(t) \wedge \mathbf{x}$ , en vérifie la définition  $\text{rot}(\boldsymbol{\omega}_0 \wedge \mathbf{u}_s) = \mathbf{0}$ . Par suite, *un déplacement représente un mouvement premier si et seulement si sa rotation instantanée*  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0(t)$  *est stationnaire*. Mieux, reportons dans l’équation au tourbillon [1] : pareil déplacement est réalisable dans tout fluide de Rivlin–Ericksen de troisième grade. Sa vorticité constante le rend même réalisable dans tout matériau « viscoélastique

linéairement » [1], et similaire aux écoulements de Couette et de Taylor–Couette. De fait, tous appartiennent aux mêmes espaces de mouvements premiers. Pour déterminer l'espace *correspondant à une direction fixée de vortacité*, choisissons un système de coordonnées orthonormées  $x, y, z$  où ladite vortacité  $\omega_0$  a pour coordonnées  $(0, 0, -\tau)$ , le scalaire  $\tau \neq 0$  étant constant par hypothèse. Puis cherchons les mouvements premiers dont la vitesse  $\mathbf{u}(x, t)$  revêt la forme  $\frac{1}{2}\omega_0 \wedge \mathbf{x} + \nabla\varphi$ , où  $\nabla\varphi$  désigne le gradient d'une fonction inconnue  $\varphi(x, y, z, t)$ . L'inconnue doit vérifier [1]

$$\mathbf{0} = \text{rot}[(0, 0, 1) \wedge \nabla\varphi] = (-\varphi''_{xz}, -\varphi''_{yz}, \varphi''_{xx} + \varphi''_{yy}), \quad 0 = \text{div}(\nabla\varphi) = \varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} + \varphi''_{zz} \quad (1)$$

Ce système (indépendant de  $\tau$ ) paraît surdéterminé, mais sa solution générale est

$$\varphi = zw_0(t) + \text{Re}[\mathbf{f}(x + iy, t)] \quad (2)$$

où  $\mathbf{f}$  est une fonction holomorphe arbitraire en  $x + iy$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

La vitesse arbitraire  $w_0(t)$  dépend ici de  $t$  seul, de même la fonction holomorphe arbitraire  $\mathbf{f}(x + iy, t)$  et sa partie réelle  $\text{Re}[\mathbf{f}]$  peuvent dépendre de  $t$  mais pas de  $z$ . Pour chaque direction de  $\omega_0$ , (2) détermine un espace vectoriel de dimension infinie de mouvements par tranches. Ce dernier est *somme des mouvements plans à vortacité constante et des translations normales instationnaires*  $w_0(t)$ . Faisons maintenant varier la direction de  $\omega_0$  : les mouvements premiers à vortacité constante se déploient en une corolle à deux paramètres (coefficients directeurs de  $\omega_0$ ) d'espaces vectoriels isomorphes.

## 2. Le théorème de Lagrange

*Le théorème de Lagrange* admet ici un prolongement : *le mouvement initialement plan d'un fluide parfait est premier de vortacité constante si sa vortacité initiale est uniforme, et si le gradient de pression  $p'_z$  selon la direction de cette vortacité initiale dépend ultérieurement de  $t$  seul.* Choisissons  $x, y, z$  tels que l'axe  $z$  soit parallèle à la vortacité initiale, et posons  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ . L'équation d'Euler impose  $dw/dt = -p'_z(t)$ , où  $dw/dt$  désigne la dérivée matérielle de  $w$ . Par hypothèse  $p'_z(t)$  dépend de  $t$  seul,  $w$  demeure donc toujours uniforme et le mouvement s'effectue par tranches. La vortacité  $\omega$  aura pour composantes  $-v'_z, u'_z, -\tau$ , lesquelles peuvent dépendre de  $x, y, z, t$ . Maintenant, puisque  $p = zp'_z(t) + p_0(x, y, t)$ , l'équation d'Euler exige aussi  $du/dt = -p'_{0x}(x, y, t)$ ,  $dv/dt = -p'_{0y}(x, y, t)$ . Dérivons,  $0 = (du/dt)'_z = du'_z/dt + u'_z u'_x + v'_z u'_y$ ,  $0 = dv'_z/dt + u'_z v'_x + v'_z v'_y$ , et raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une solution  $u, v$  telle que  $u'_z$  et  $v'_z$  soient initialement nuls sans l'être identiquement pour tout  $t$ . Le système  $du'_z/dt + u'_z a + v'_z b = 0$ ,  $dv'_z/dt + u'_z c + v'_z d = 0$ , où l'on a posé  $a \equiv u'_x, b \equiv u'_y, c \equiv v'_x, d \equiv v'_y$  est linéaire homogène. Quand  $u'_z$  et  $v'_z$  sont initialement nuls, sa solution est unique, c'est :  $u'_z = v'_z = 0$  pour tout  $t$ , d'où contradiction. L'équation au tourbillon  $\omega'_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\omega = \omega \cdot \nabla\mathbf{u}$  fournit ainsi  $d\tau/dt = w'_z \tau = 0$ , et  $\tau$  est constant.

## 3. Autour d'un point régulier

*Autour d'un point régulier* choisi comme origine,  $\mathbf{f}$  est développable en série de puissances entières  $(x + iy)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons donc les fonctions réelles  $\phi_n, \psi_n, n > 2$ , suivantes

$$\begin{aligned} \phi_n &\equiv \text{Re}[(x + iy)^n] = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (-1)^k y^{2k} x^{n-2k} \\ \psi_n &\equiv \text{Im}[(x + iy)^n] = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} (-1)^k y^{2k+1} x^{n-2k-1} \end{aligned} \quad (3)$$

où  $[\frac{n}{2}]$  représente la partie entière de  $\frac{n}{2}$ , et  $\binom{n}{p}$  le nombre de combinaisons de  $n$  éléments  $p$  à  $p$ . Dans tout un cylindre d'axe  $z$ , nous pouvons alors définir nos écoulements par tranches au moyen d'une composante normale  $w$  et d'une fonction de courant  $\Psi(x, y, t)$  tels que

$$w = w_0(t), \quad \Psi = P_2(x, y, t) + \sum_{n>2} a_n(t)\phi_n + \sum_{n>2} b_n(t)\psi_n \quad (4)$$

Les coefficients  $a_n(t)$ ,  $b_n(t)$ ,  $w_0(t)$  sont arbitraires, propres à chaque écoulement, et dépendent seulement de  $t$ . La fonction arbitraire  $P_2(x, y, t)$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  en  $x, y$ . Sa dépendance en  $t$  est quelconque, mais la somme des coefficients de  $x^2$  et  $y^2$  doit évaluer  $\frac{1}{2}\tau$  sans dépendre du temps. Ce polynôme  $P_2$  représente selon le cas : un déplacement plan, un tourbillon elliptique, un compression oblique ou bien un cisaillement simple de Couette. En coordonnées cylindriques  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z$ , on a  $\phi_n \equiv r^n \cos n\theta$  et  $\psi_n \equiv r^n \sin n\theta$ . Chacune de ces fonctions de courant isolément représente une compression polygonale (collision de  $n$  jets convergeant vers l'origine). Aux sommes du développement (4) et de ses translatés en tout point du plan correspond une infinité d'écoulements explicites inédits en viscoélasticité. Les tourbillons hélicoïdaux à symétrie polygonale  $\Psi \equiv \frac{\tau}{4}r^2 + a_n(t)r^n \cos n\theta$  en font partie [2], tout comme le tourbillon triangulaire  $\Psi \equiv \frac{\tau}{4}(x^2 + y^2) + a_3(t)y(3x^2 - y^2)$  qui s'adapte aux conduites de section triangulaire équilatérale [3].

#### 4. Autour d'une singularité

Autour d'une singularité, comme dans l'écoulement de Taylor–Couette, on pourra utiliser une série de Laurent en puissances entières  $(x + iy)^n$ ,  $n$  entier relatif. Une telle série converge à l'intérieur d'une couronne circulaire. En combinant plusieurs singularités algébriques, les fonctions de courant dérivent tout bonnement de fractions rationnelles en  $x + iy$ . Considérons un tourbillon filament et superposons-le à un cisaillement. On obtient un mouvement premier défini par la fonction de courant  $\Psi = \frac{\tau}{2}(y - d)^2 + c \ln(x^2 + y^2)$ . Faisons de même avec une source ou un puit, on obtient un autre mouvement premier défini par  $\Psi = \frac{\tau}{2}(y - d)^2 + c \tan^{-1}(y/x)$ ,  $\tau, c, d$  étant des constantes réelles. Ces deux mouvements sont célèbres [4], et dès 1990, Wang [5] a noté qu'ils étaient solutions des équations de Navier–Stokes. Ils fondent la théorie [6,7] des profils dans les écoulements cisailés à l'infini, ... Par suite, toute ladite théorie peut être rebâtie sur notre espace d'écoulements par tranches, avec transposition linéaire *mutatis mutandis* de la théorie des tourbillons, de la représentation conforme, du théorème du cercle pour les écoulements potentiels, etc. Superposons enfin un cisaillement à deux tourbillons filaments parallèles opposés, on obtient un troisième exemple décrivant le sillage d'une aile d'envergure finie avec vent latéral [8]. Soulignons que partout, nous venons de prolonger méthodes, théorèmes, résultats en fluide « viscoélastique linéairement », ainsi qu'en 3D où apparaît une vitesse  $w_0(t)$  dite de balayage ou de dérapage.

#### 5. Mouvements plans

Quand ils sont plans, les mouvements à vorticité constante sont bien connus [9]. Un mouvement pseudo-plan de seconde espèce de fluide parfait sera de ce type, à une translation uniforme près, si sa vitesse  $w$  et sa vorticité sont initialement uniformes (autre extension du théorème de Lagrange). Il en est ainsi quand le mouvement initial est un simple cisaillement ou un déplacement solide. Bannissons toutefois les écoulements créés par arrêt de rotation du récipient : ce sont des écoulement turbulents (critère d'instabilité de Rayleigh). En revanche, la mise en rotation du récipient initialement au repos fournit un mouvement relatif à vorticité constante stable et facilement observable [10]. Seule sa cinématique pourra ici correspondre, car la dynamique (pressions, contraintes, ...) d'un tel mouvement relatif diffère de celle prévue en repère galiléen. Nombre d'écoulements, par ailleurs potentiels, peuvent comporter une enclave à vorticité constante dite poche de tourbillon [11]. Ces écoulements sont premiers par morceaux. Tel est le cas des tourbillons composites de Rankine [6], de Kirchhoff [12], et surtout de l'insigne « Prandtl–Batchelor vortex patch » [13,14]. Ce dernier, composé d'une aire à vorticité constante et d'un saut de

vitesse à sa frontière, décrit (en première approximation) les *décollements* s’installant sur les profils à forte incidence, à l’arrière des obstacles, dans les cavités et les culots, dans les dièdres, près des sauts de pression . . . Mais un mouvement premier par morceaux peut présenter plusieurs zones à vorticité non nulle comme dans les *tourbillons à doubles contours* [15], les « *shielded Rankine vortices* », les « *invisible multipolar vortices* » [16] ou le *tourbillon elliptique plongé dans un cisaillement* [17]. Aujourd’hui, on appelle « *vortex crystal* » tout assemblage polygonal stable de tourbillons filaments [18]. Ils décrivent les *tourbillons quantiques de l’hélium* ou ceux des *colonnes de plasma*, et peuvent être plongés dans un fluide en rotation [19]. A leur tour, les poches   tourbillon peuvent former des cristaux [20]. Enfin, les *compressions de tourbillons* [21] ou leur *stabilité* [22] s’étudient au moyen d’ondes de Kelvin–Helmholtz qui conservent le caractère premier du mouvement.

**6. Les phénomènes ondulatoires**

Dans les phénomènes ondulatoires, les parois sont souvent situées à l’infini, et tout développement spectral cache des myriades d’exemples de mouvements premiers. Une rangée de tourbillons–filaments d’entraxe  $2\pi/\alpha$  et d’intensité constante  $-\alpha^{-1}v_0$  (sens de rotation rétrograde) située en  $y = 0$  forme un exemple bien connu d’écoulement potentiel [6]. Plongeons-le dans un cisaillement de vitesse  $(\tau y, 0, 0)$ . Le mouvement premier obtenu peut être regard  comme une *instabilité de cisaillement et présente des rouleaux* ou « *Kelvin cat’s eyes* » caractéristiques des *couches critiques* [23,24]. Bien que « solution exacte », le mouvement s’avère de dissipation infinie aux centres des yeux. Les lignes de courant étant circulaires près de ces centres, on pourra modérer l’anomalie grâce à des noyaux en rotation uniforme comme dans le tourbillon de Rankine. Dans le même contexte, proposons un autre mouvement premier dont la vitesse a pour composantes  $\tau y + v_0(t) e^{-\alpha y} \sin[\alpha(x - ct)]$ ,  $v_0(t) e^{-\alpha y} \cos[\alpha(x - ct)]$ ,  $w_0(t)$ ; la constante  $\tau$  désigne ici un cisaillement, tandis qu’aux fonctions  $\alpha(t)$ ,  $c(t)$ ,  $v_0(t)$  et  $w_0(t)$  qui peuvent varier avec  $t$ , sont associés un nombre d’onde et des vitesses de phase, de perturbation et de balayage. Le mouvement décrit un cisaillement simple du demi-plan  $y > 0$  dross  par de puissants jets provenant de l’infini  $y = -\infty$ . Dans chacun des demi-plans  $y < 0$  et  $y > 0$ , les jets et l’écoulement de Couette se perturbent mutuellement assez peu. En revanche, à leur frontière vers  $y = 0$ , naissent des perturbations et une zone d’instabilités dont l’aspect dépend du seul paramètre  $(\tau\alpha v_0)^{-1}$ . Les cellules de Wang [25] correspondent au cas où  $\alpha$ ,  $v_0$  sont constants et  $c = w_0 = 0$ . Améliorons-en l’étude, et distinguons trois cas (Fig. 1) : (i)  $\tau(\alpha v_0)^{-1} \leq e$ , le cisaillement rapport  à  $\alpha v_0$  est faible. L’écoulement de Couette louvoie simplement sous l’impact; (ii)  $e < \tau(\alpha v_0)^{-1} < e^\kappa/\kappa \cong 4,012$ , où  $\kappa$  est la racine positive ( $\cong 2,200$ ) de l’équation  $(\kappa - 1) \text{th}(\kappa - 1) = 1$ , le cisaillement est plus fort, apparaissent des rouleaux isolés; . . . (iii)  $e^\kappa/\kappa \leq \tau(\alpha v_0)^{-1}$ , fort cisaillement, les rouleaux grossissent, se connectent en un chapelet caractéristique. Mat rialisons une frontière des rouleaux, et prenons  $w_0$  égal à une constante non nulle : nous obtenons un

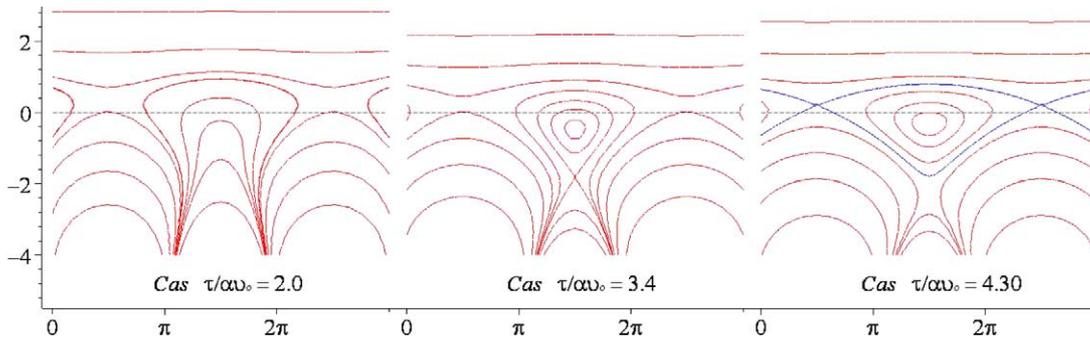


Fig. 1. Vue de profil des lignes de courant (ou cellules de Wang) dans les trois cas typiques  $\tau(\alpha v_0)^{-1} = 2; 3,4; 4,3$ . En abscisses les variations de  $\alpha(x - ct)$ , et en ordonnées celles de  $\alpha y$ .

Fig. 1. Side view of the streamlines (Wang’s cells) in the 3 typical cases  $\tau(\alpha v_0)^{-1} = 2; 3,4; 4,3$ ; abscissas relating to variations of  $\alpha(x - ct)$ , as ordinates to  $\alpha y$ .

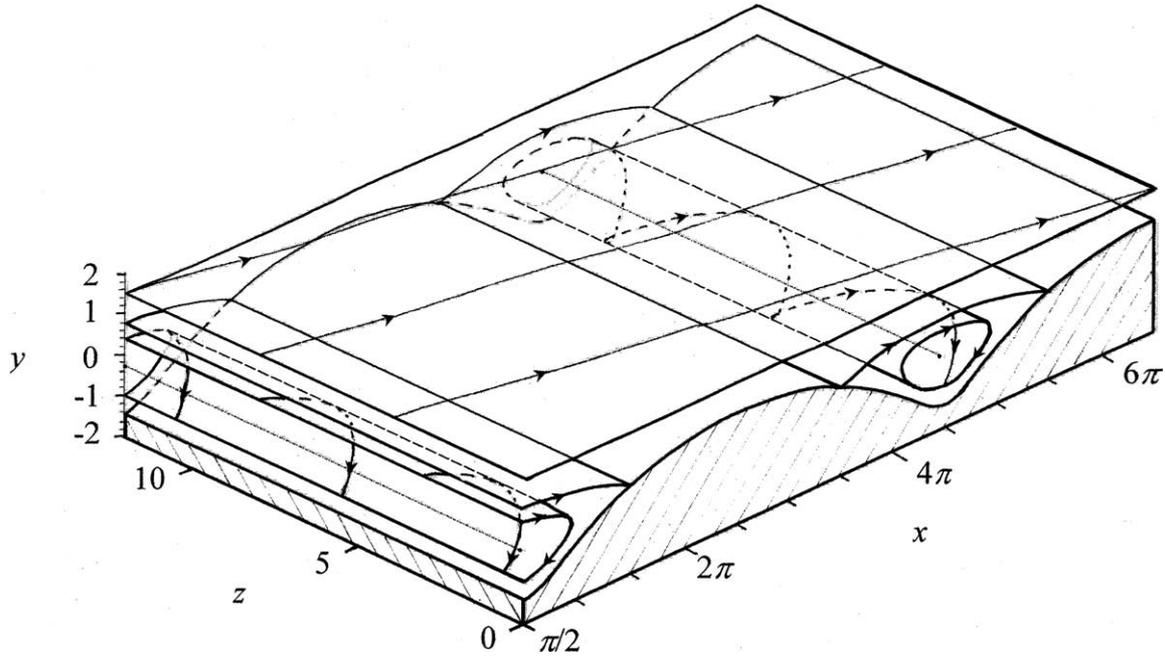


Fig. 2. Cisaillement balayant une paroi ondulée, ou lignes de courant du champ de vitesse  $(5y + e^{-y} \sin x, e^{-y} \cos x, -1,5)$ .  
 Fig. 2. Simple shear sweeping a wavy wall, streamlines of the velocity field  $(5y + e^{-y} \sin x, e^{-y} \cos x, -1,5)$ .

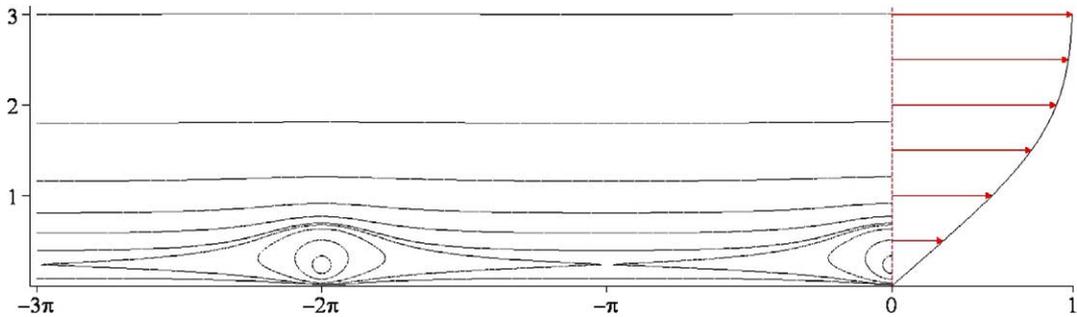


Fig. 3. A gauche, lignes de courant approchant la couche critique de la couche limite au seuil d'instabilité ; en abscisses les variations de  $\alpha(x - ct)$ , et en ordonnées celles de  $y/\delta_1$ , où  $\delta_1$  est l'épaisseur de déplacement. A droite, profil de vitesse de Blasius montrant que les rouleaux apparaissent bien dans la région à vorticité uniforme.  
 Fig. 3. On the left, streamlines of critical layer in boundary layer at the threshold of instability; abscissas relating to variations of  $\alpha(x - ct)$ , as ordinates to  $\alpha y/\delta_1$  where  $\delta_1$  be displacement thickness. At the right, Blasius velocity profile showing that the eddies lie in the region of uniform vorticity.

* coulement 3D avec balayage et bulbes de décollement sur paroi ondulée* (Fig. 2). En fluide visqueux, la condition d'adhérence n'est qu'approximativement respectée puisque la vitesse est réduite à la paroi sans y être partout nulle. Pour mieux tolérer l'approximation, prenons  $w_0 = 0$ . L'écoulement évoque alors une sous-couche limite et une rugosité dont le profil dépend du paramètre  $\tau(\alpha\nu_0)^{-1}$ . Autre interprétation en élasticité classique : remplacons les vitesses par les déplacements depuis l'état naturel, la déformation représente *un engrenage et le cisaillement d'un bloc élastique retenu sans frottement par une denture fixe*. Mais revenons à notre rangée de tourbillons-filaments. Placons-la en  $y = h$ , puis placons une seconde rangée de tourbillons de rotation et d'intensité opposées  $\alpha^{-1}\nu_0$  en image sur  $y = -h$ . Il peut ainsi exister une paroi avec vitesse de glissement en  $y = 0$ . Pour annuler la vi-

tesse à l'infini, nous devons prendre  $c = \frac{1}{2}v_0 \coth \alpha h$  [6], mais cela est facultatif en spectre continu (la vitesse tend ici vers une constante). Plongeons maintenant l'ensemble dans un cisaillement de vitesse  $\tau y + kv_0$ , 0, 0, lequel approche le comportement des couches limites près des parois. Les paramètres réels  $\tau$  et  $k$  sont pour l'instant arbitraires. La vitesse complexe est ici  $u - iv = \tau y + kv_0 - v_0(\text{sh } \alpha h)[\text{ch } \alpha h - \cos \alpha(x - ct + iy)]^{-1}$ . Faute de pouvoir annuler totalement  $u(x, 0, t)$ , annulons sa valeur moyenne  $\int_0^{2\pi/\alpha} u(x, 0, t) dx$  grâce au paramètre  $k$ , ou bien minimisons son écart quadratique moyen  $\int_0^{2\pi/\alpha} [u(x, 0, t)]^2 dx$ . Les deux démarches fournissent une seule et même valeur de  $k$  égale à 1, valeur remarquable indépendante des autres paramètres. L'écart  $\alpha(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi/\alpha} [u(x, 0, t)]^2 dx$  vaut alors  $v_0^2(\coth \alpha h - 1)$ . Le seuil d'instabilité de la couche limite de Blasius correspond aux valeurs  $R_{\delta 1} = 520$ ,  $\alpha_{\delta 1} = 0,303$ ,  $c = 0,396$  du nombre de Reynolds, du nombre d'onde et de la vitesse de phase basés sur la vitesse à l'infini et l'épaisseur de déplacement  $\delta_1$ . Il lui correspond aussi le paramètre  $\tau(\alpha v_0)^{-1} = 6,29/v_0$  et une ordonnée critique  $h$  telle que  $\alpha h = 0,213$ . Choisissons alors la perturbation d'amplitude respectable  $v_0 = 0,3$  et traçons la Fig. 3. Malgré son glissement pariétal résiduel et sa dissipation localement infinie, le modèle peut approcher l'instabilité de couche limite dans pléthore de fluides.

## Références

- [1] M. Bouthier, Espaces d'écoulements dits « universels », Part 1, C. R. Mécanique 331 (2003) 165–172. Section 4, Éq. (12); Section 1, Eq. (3);  
M. Bouthier, Espaces d'écoulements dits « universels », Part 2, C. R. Mécanique 332 (2004) 237–240. Section 1.
- [2] C. Eloy, S. Le Dizès, Stability of the Rankine vortex in a multipolar strain field, Phys. Fluids 13 (3) (2001) 660–676, Eq. (1.1a).
- [3] G.F. Carnevale, R.C. Kloosterziel, Emergence and evolution of triangular vortices, J. Fluid Mech. 259 (1994) 305–331.
- [4] H.S. Tsien, Symmetrical Joukowski airfoils in shear flow, Quart. Appl. Math. 1 (1943) 130–148.
- [5] C.Y. Wang, Exact solutions of the Navier–Stokes equations – the generalized Beltrami flows, review and extension, Acta Mech. 81 (1990) 69–74. Source or vortex in shear flow, Eqs. (12)–(13); Shear flow over convection cells, Eq. (14).
- [6] L.M. Milne-Thomson, Theoretical Aerodynamics, fourth ed., 1966, reedited by Dover, New York, 1973; Section 5-72, Uniform shear flow; Section 5-73, Circular cylinder in uniform shear flow; pp. 93–95; Section 13-13, Rankine's combined vortex, pp. 355–356; Section 13-71, Single infinite row, p. 375; Examples XIII 24, 26, p. 389.
- [7] J. Obala, Sur les écoulements de cisaillement à tourbillon constant autour d'un profil animé d'un mouvement quelconque, J. Mec. 13 (1974) 1–30.
- [8] D.J. Hill, P.G. Saffman, Counter-rotating vortex patches in shear: a model of the effect of wind shear on aircraft trailing vortices, Proc. R. Soc. London Ser. A 458 (2002) 1527–1553.
- [9] G.K. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000. Section 7.4, Steady two-dimensional flow with vorticity throughout the fluid, pp. 538–543.
- [10] H.P. Greenspan, The Theory of Rotating Fluids, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1968. Section 1.1, A few experiments, pp. 1–5.
- [11] P.G. Saffman, Vortex Dynamics, Dover, 1997. Chapter 9, Dynamics of two-dimensional vortex patches, pp. 160–191.
- [12] H. Villat, Théorie des tourbillons, Gauthiers, Villars, Paris, 1930. Chapitre VIII, Tourbillons de dimensions finies. Le tourbillon elliptique de Kirchhoff, pp. 187–198.
- [13] K. Batchelor, A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number, J. Fluid Mech. 1 (1956) 388–398.
- [14] D.W. Moore, P.G. Saffman, S. Tanver, The calculation of some Batchelor flows: The Sadovskii vortex and rotational corner flow, Phys. Fluids 31 (5) (1988) 978–990.
- [15] Y.G. Morel, X.J. Carton, Multipolar vortices in two-dimensional incompressible flows, J. Fluid Mech. 267 (1994) 23–51.
- [16] D. Crowdy, Multipolar vortices and algebraic curves, Proc. R. Soc. London Ser. A 457 (2001) 2337–2359.
- [17] S. Kida, Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow, J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 3517–3520.
- [18] D.A. Schecter, D.H. Dubin, K.S. Fine, C.F. Driscoll, Vortex crystals from 2D Euler flow: experimentation and simulation, Phys. Fluids 11 (1999) 905–914.
- [19] D.Z. Jin, E. Dubin, Point vortex dynamics within a background vorticity patch, Phys. Fluids 13 (3) (2001) 677–691.
- [20] D.G. Crowdy, Exact solutions for rotating vortex arrays with finite-area cores, J. Fluid Mech. 469 (2002) 209–235.
- [21] J.C. Neu, The dynamics of a columnar vortex in an imposed strain, Phys. Fluids 27 (1984) 2397–2402.
- [22] I. Lansky, T. O'Neil, Stability analysis of a two-dimensional vortex pattern, Phys. Rev. E 55 (6) (1997) 7010–7014.
- [23] Drazin, W.H. Reid, Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1981. Fig. 4.3, p. 141.
- [24] S.A. Maslowe, Critical layers in shear flows, Annu. Rev. Fluid Mech. 18 (1986) 405–432. Fig. 2, p. 411.
- [25] C.Y. Wang, Shear flow over convection cells—an exact solution of the Navier–Stokes equations, Z. Angew. Math. Mech. 70 (8) (1990) 351–352.