



Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Mécanique 332 (2004) 835–840



Evolution de configurations de tourbillons avec les mêmes invariants globaux

Emilie Bécu *, Vadim Pavlov

Laboratoire de mécanique de Lille, UMR 8107, université de Lille 1, boulevard Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Reçu le 26 avril 2004 ; accepté le 13 mai 2004

Disponible sur Internet le 10 août 2004

Présenté par Patrick Huerre

Résumé

Dans cette Note, nous étudions l'évolution de la répartition de N tourbillons localisés identiques. Nous montrons, en utilisant l'expérience numérique directe, plus précisément le schéma de Runge–Kutta à l'ordre 4, représenté par le modèle des tourbillons ponctuels, que des répartitions initiales, de vorticité différentes avec les mêmes invariants globaux, peuvent exister. Nous montrons que des configurations initiales avec les mêmes invariants peuvent évoluer vers des états quasi-finaux complètement différents. *Pour citer cet article : E. Bécu, V. Pavlov, C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Evolution of configurations of vortices with the same global integral invariants. In this Note, we address the question of the evolution of a distribution of N identical localized vortices. Using direct numerical simulation, (here the Runge–Kutta scheme of order 4), together with the localized-vortices model, we show that different initial distributions of vorticity with identical integral invariants may exist. We show that the initial configurations with the same invariants may evolve to totally different quasi-final states. *To cite this article: E. Bécu, V. Pavlov, C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Tourbillons localisés ; Auto-organisation

Keywords: Fluid mechanics; Localized vortices; Self organization

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : emilie.becu@ed.univ-lille1.fr (E. Bécu), Vadim.Pavlov@univ-lille1.fr (V. Pavlov).

Abridged English version

There exists a point of view based on statistical mechanical arguments (see for instance [1,2]), which affirms that two-dimensional turbulence, of full circulation Γ , initially created in a some space region, of space scale a , and evolving freely (without dissipation and forcing), should pass to a unique final axi-symmetrical distribution. In fact, two-dimensional turbulence evolution is governed by strongly nonlinear equations. In this situation, field components interact intensively and mix rapidly. For $t \gg \tau$, after only a few characteristic times of rotation (period of revolution $\tau = 2\pi a^2/\Gamma$), the system could be considered to be stochastic. It is natural to suppose that the final configuration, C_F , must be fixed by global invariants of the system (circulation, enstrophy, full kinetic energy, etc.) and is independent of initial conditions. Thus, if the process of evolution is governed by the restrictions of a statistical mechanical character, different initial configurations C_I with the same global invariants should evolve to the unique final axi-symmetrical configuration of vorticity, C_F .

Two questions arise immediately. Firstly, is it possible to build different C_I with the same global invariants? And the second one, do different initial configurations with the same invariants evolve to the unique, universal final configuration?

We have used direct numerical simulations to answer these questions. We have considered the model of localized vortices, because this model assures the respect of all conservation laws. The basic Hamiltonian equations for the system evolving freely are Eq. (1). We have started with an annular initial configuration. Different initial configurations with the same global invariants have been found; it also has been shown that the system does not evolve towards a unique axi-symmetric configuration of vorticity. ‘Clusters’ of vortices have been observed, not a unique central peak of vorticity. This fact is probably explained by the existence of the fluctuating part, f_1 , of the vortex distribution function (see (1)), which cannot be suppressed in experiments, or after averaging. The obtained results could be considered as enigmatic, but recent plasma experiences on ‘vortex crystal’ formation show that the situation is not obvious: it is clear that a perfect system which evolves in the absence of dissipation and forcing, does not forget the initial conditions. The obtained results are in agreement with Batchelor’s (see [3]) arguments that a quasi-final state of a vortex system must be governed by history details preceding the state. Hence, different quasi-final configurations have been found in the depending on possible initial configurations: (a) basic states which reach a maximum vorticity at the center, (b) ‘vortex crystals’ and (c) states where no strong vortex persists and which correspond probably to the principle of the ‘minimum of enstrophy’.

1. Présentation

Si on laisse évoluer un « gaz » de $N \gg 1$ tourbillons ponctuels bidimensionnels, de même signe, laissé seul, comme tout système macroscopique fermé, il doit tenter de passer à l’état d’équilibre statistique. Naturellement, l’évolution de la fonction de répartition des tourbillons selon l’équation cinétique doit s’accompagner de l’accroissement de l’entropie (cf., par exemple, [1,2]). En se basant sur ces arguments de Mécanique Statistique, on peut conclure qu’un système de N tourbillons doit évoluer vers une répartition finale universelle. Selon ce point de vue, on peut s’attendre à ce que la turbulence bidimensionnelle, initialement créée dans un domaine de l’espace et se développant librement (en absence de dissipation et de forçage), évolue vers une configuration finale axi-symétrique. En effet, l’évolution de la turbulence bidimensionnelle est gouvernée par des équations fortement non linéaires. Les composantes de champs interagissent intensément et doivent donc se mélanger très rapidement. Il est naturel de supposer, dans ces conditions, que le système évoluerait vers l’équilibre statistique, dont la configuration est indépendante des angles.

Discutons premièrement des limites de validité de cette hypothèse largement répandue. Soit un système constitué d’un grand nombre de tourbillons ponctuels. La vitesse angulaire de chaque tourbillon i est alors $\Omega_i = \dot{\theta}_i$ (cf. (1) pour des précisions sur θ), où θ_i est la coordonnée angulaire du tourbillon et $\dot{\theta}_i$ sa dérivée par rapport au temps. La valeur moyenne de Ω_i peut être estimée par $\bar{\Omega} \sim \Gamma/d^2$, où Γ est la circulation totale et d le diamètre du

domaine de localisation des tourbillons. Mais les différents tourbillons, influencés par l'ensemble de tous les tourbillons, ont des vitesses angulaires différentes distribuées autour de $\bar{\Omega}$ selon une certaine loi. C'est pourquoi, les tourbillons ayant par exemple à l'instant initial $t = 0$ les mêmes valeurs θ_i (i.e. $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_0$) « s'envolent » très vite ; un processus de mélange très rapide des tourbillons par rapport aux angles a donc lieu.

Supposons que la fonction de répartition des tourbillons par rapport à θ et Ω à l'instant $t = 0$ soit donnée par une fonction quelconque $f(\theta_0, \Omega)$, où $\theta_0 = \theta(t = 0)$. Décomposons cette fonction en deux parties, sous la forme $f(\theta_0, \Omega) = \bar{f}(\Omega) + f_1(\theta_0, \Omega)$, où $\bar{f}(\Omega) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\theta_0 f(\theta_0, \Omega)$ est indépendante de θ_0 . La fonction $f_1(\theta_0, \Omega_i)$ vérifie la condition $\bar{f}_1(\theta_0, \Omega) = 0$. Evidemment, cette fonction est de signe variable par rapport au premier argument. On peut toujours trouver un intervalle $\Delta\theta_{12} = \theta_{01} - \theta_{02} \sim \pi$ et donc $f_1(\theta_{01}, \Omega) \sim -f_1(\theta_{02}, \Omega)$: sur l'intervalle $\Delta\theta_0 \sim \pi$, la fonction f_1 change de signe. Pour $t > 0$, comme $\theta_i \sim \theta_{0i} + \Omega_i t$, la fonction de répartition devient $f(\theta - \Omega t, \Omega) = \bar{f}(\Omega) + f_1(\theta - \Omega t, \Omega)$, où $\theta - \Omega t$ appartient à $[0, 2\pi]$ (modulo 2π). Pour de différentes valeurs de Ω_1 et Ω_2 , les termes dépendant du temps dans le premier argument deviennent prédominants par rapport aux angles initiaux et on peut estimer que la fonction de signe variable f_1 change de signe quand $(\Omega_2 - \Omega_1)t \sim \pi$, i.e. pour une variation des vitesses angulaires $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 \sim \pi t^{-1}$. Cette estimation simple montre que la fonction devient de signe variable pour le second argument aussi. Au fur et à mesure, quand $t \rightarrow \infty$, en passant de Ω à $\Omega + \Delta\Omega$ de plus en plus proches, avec $|\Delta\Omega| \ll |\bar{\Omega}|$, la fonction f_1 devient de plus en plus oscillante par rapport au second argument, i.e. par rapport à Ω .

Dans ce contexte, l'apport d'une fonction, f_1 , oscillant rapidement autour des moyennes est toujours faible. Cette partie rapidement fluctuante de la fonction peut être négligée dans la plupart des cas. En effet, il existe toujours, dans des systèmes réels, une dissipation physique qui devient forte aux petites échelles en supprimant tous les processus qui pourraient se réaliser dans ce domaine. Le même effet (dissipation numérique) existe dans le calcul numérique quand une dissipation artificielle s'introduit aux petites échelles. Finalement, toutes les procédures expérimentales contiennent un moyennage statistique quelconque intrinsèque (cf. par exemple les expériences sur l'étude d'une répartition quasi-finale de la turbulence [4,5]).

Les arguments exposés précédemment ont évidemment un caractère général et sont appliqués à toutes les grandeurs changeant rapidement (« phases ») et variant dans des intervalles finis [6].

C'est ce qui nous permettrait d'obtenir, dans le contexte de notre travail, que $\langle f_1 \rangle \rightarrow 0$, avec une convergence rapide. Dans notre cas, ce serait un moyennage de la fonction de répartition par rapport aux angles θ . Après seulement plusieurs tours de révolution du système, pour un système avec une dissipation quelconque, pour $t \gg \bar{\Omega}^{-1}$, on devrait parvenir à $f(\theta, \Omega) \rightarrow \bar{f}(\Omega)$ (à une fonction moyennée par rapport aux angles), ce qui pourrait se traduire par une concentration axi-symétrique des tourbillons par rapport au centre du système.

D'autre part, on peut supposer, comme cela est postulé dans la Mécanique Statistique (cf. [7–12]), que la configuration finale, si elle existe, n'est fixée que par les intégrales globales du système. Parmi ces intégrales, ce sont l'énergie totale du système et les moments, notamment la circulation Γ et l'enstrophie Z_2 , qui jouent évidemment un rôle déterminant. On peut s'attendre à ce que la configuration finale, lorsqu'elle est gouvernée par les lois de la Mécanique Statistique, soit indépendante des conditions initiales du problème.

Donc, si le processus est effectivement gouverné par les contraintes de la Mécanique Statistique, *des configurations initialement différentes* ayant les *mêmes* intégrales globales doivent évoluer vers la même configuration finale axi-symétrique de la vorticité.

Dans ce contexte, deux questions se posent immédiatement. Est-il possible de construire, en principe, des *répartitions* de vorticité initiales *différentes* qui ont les *mêmes* invariants globaux ? Et, si tel est le cas, les systèmes, partant de *différentes répartitions initiales* de vorticité ayant les *mêmes* invariants globaux, évoluent-ils vers un * tat final unique* ou vers des * tats finaux différents*, ou même évoluent-ils vers aucun état final ?

A notre connaissance, ces questions n'ont pas encore été abordées dans la littérature scientifique, et ce, probablement, pour des raisons diverses : le système tourbillonnaire est gouverné par des équations d'évolution fortement non linéaires et leurs solutions analytiques ne sont pas envisageables, les approches basées sur les principes variationnels admettent des formulations diverses (cf. [7–12]), etc.

Le but principal de ce travail est d'appliquer l'expérience numérique directe pour tenter de répondre à ces questions.

Pour cela, il faut choisir un modèle mathématique pertinent, qui, en absence de dissipation, respecte toutes les lois de conservation. Dans ce contexte, les méthodes traditionnellement utilisées, par exemple le modèle de décomposition en modes spectraux, ne peuvent pas être retenues car ils présentent des problèmes numériques en petites échelles. En effet, il est bien connu qu'une des difficultés fondamentales en description de la turbulence est l'expansion du mouvement aux petites échelles, au delà de l'échelle de dissipation visqueuse, quand les calculs ne proviennent que du champ moyenné localement, à l'échelle d'une maille numérique. Le comportement de la turbulence correspondant à ces échelles explicites est habituellement numériquement modélisé au sens statistique ; des formes différentes de la viscosité turbulente sont introduites empiriquement, modélisant les transferts d'énergie à travers les échelles intermédiaires, etc. On observe fréquemment, en turbulence bidimensionnelle, que les fluctuations des magnitudes et des phases de modes supérieurs au cours de calculs n'assurent pas les lois de conservation. Par cette raison, parmi les modèles libres de ces contraintes, notre choix s'est porté sur celui de tourbillons localisés, i.e. des structures tourbillonnaires élémentaires dont la vorticité est très concentrée et très élevée par rapport au reste du domaine. Remarquons que de nombreuses études (cf. [7–12]) montrent que le modèle de tourbillons localisés malgré sa simplicité apparente, est très séduisant car il permet, par exemple d'extraire les caractéristiques générales de l'auto-organisation des structures parfois très complexes, par des procédés simples.

2. Expérience numérique directe

Soient $N \gg 1$ tourbillons ponctuels d'intensité γ_i , $i = 1, N$. Les équations de mouvement des centres des tourbillons sont : $\gamma_i \partial_t x_i = \partial_j H$, $\gamma_i \partial_t y_i = -\partial_i H$. Ce système est un système Hamiltonien. L'Hamiltonien $H = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{dx} v^2$, i.e. l'énergie cinétique de l'écoulement d'un fluide à une constante près, exprimée par les variables canoniques x_i , y_i , peut être écrit sous la forme $H = -(4\pi)^{-1} \sum_{i,j; i \neq j} \gamma_i \gamma_j \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$, où la vorticité a été choisie sous la forme $\Omega = \sum_j \gamma_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$. Ici, $(1/2\pi) \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ est la fonction de Green dans l'espace 2D illimité, $\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, où $\delta^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est la fonction de Dirac. Rappelons que l'énergie cinétique d'un fluide peut être réécrite sous la forme $H = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{dx} \psi \Omega$, où $\mathbf{dx} = dx dy$, $\Omega = -\Delta \psi$, et les composantes de la vitesse $v_i = \varepsilon_{ij} \partial_j \psi$, avec $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$ et $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$.

  la place de coordonnées cartésiennes, il est commode d'introduire les coordonnées polaires (r_i, θ_i) par le passage de coordonnées cartésiennes (x_i, y_i)   (r_i, θ_i) par la transformation $x_i = r_i \cos \theta_i$, $y_i = r_i \sin \theta_i$ avec $r_i > 0$. Une transition au système d'équations adimensionnées (par commodité pour les calculs numériques) est assurée par $x_i \rightarrow R x_i$, $y_i \rightarrow R y_i$, $t \rightarrow \tau t$ où $\tau = 2\pi R^2 \Gamma^{-1}$. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à des tourbillons d'intensité identique $\gamma_i = \Gamma/N$. Pour que le système d'équations soit canonique, passons aux variables « action-angle » (J_i, θ_i) , où $J_i \equiv r_i^2/2$:

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \bar{H}, \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial J_i} \bar{H} \quad (1)$$

avec l'Hamiltonien donné par $\bar{H} = -(4N)^{-1} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1, n \neq m}^N \ln [J_m^2 + J_n^2 - 2\sqrt{J_m J_n} \cos(\theta_m - \theta_n)]$, à une constante près.

L'expérience numérique est organisée de la façon suivante : la distribution initiale des $N \gg 1$ tourbillons s'effectue sur un anneau, de vorticité donnée, avec les coordonnées $r_s = 1$ et

$$\theta_s = 2\pi N^{-1} e(s-1)\Theta(K-s) + 2\pi N^{-1} (1-e)(s-1)\Theta(s-K) \quad (2)$$

Ici, $s = 1, 2, \dots, N$ et $1 < K < N$. Le premier tourbillon a la coordonnée $\theta_1 = 0$. La série des K premiers tourbillons est distribuée avec un pas $2\pi N^{-1} e$, les autres tourbillons sont distribués avec un pas $2\pi N^{-1} (1-e)$, $0 < e < 1$. La fonction $\Theta(z)$ est la fonction de Heaviside, $\Theta(z) = 1$ quand $z > 0$ et $\Theta(z) = 0$ quand $z < 0$. Si

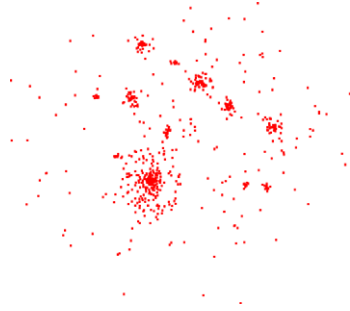


Fig. 1. Configuration des tourbillons à l'instant $t \sim 50$ pour $K = 260$ et $e_1 = 0,108$.

Fig. 1. Configuration of vortices at $t \sim 50$ with $K = 260$ and $e_1 = 0.108$.

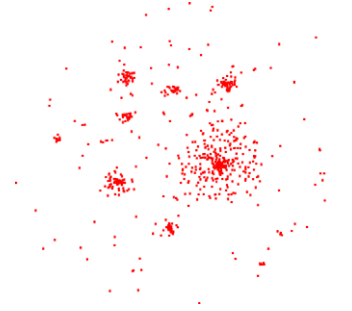


Fig. 2. Configuration des tourbillons à l'instant $t \sim 50$ pour $K = 260$ et $e_2 = 0,624$.

Fig. 2. Configuration of vortices at $t \sim 50$ with $K = 260$ and $e_2 = 0.624$.

$z = 0$, $\Theta(0) = \frac{1}{2}$. La distribution annulaire initiale a ainsi une certaine asymétrie pour différents (K, e) , mais le moment cinétique (intégrale du mouvement) \bar{P} , défini par $\bar{P} = -\frac{1}{2} \sum r_i'^2$, reste le même. L'Hamiltonien $H(e, K)$ est calculé à partir de $H(e, K) = -(4N)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \ln(1 - \cos \theta_{ij})$, avec θ_{ij} provenant de (2), avec $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$. Dans cette expression, nous n'avons laissé que les termes dépendant des angles. La circulation Γ est fixée par le nombre de tourbillons N . Dans la structure du modèle, toutes les autres intégrales de mouvement, Z_i (enstrophie Z_2 , etc.) sont conservées automatiquement. Nous fixons arbitrairement le nombre total de tourbillons à $N = 750$, les premiers tourbillons à $K = 260$. Les Hamiltoniens $H(e, K)$, avec K fixé ne sont fonction que de e et leur courbe nous permet de trouver e_1 et e_2 correspondants au H choisi pour chacun des cas. Nous prenons l'Hamiltonien initial à $H_0 = 0,25$. Nous aurons $e_1 = 0,108$ et $e_2 = 0,624$ pour $K = 260$.

L'étude de l'évolution de configuration des tourbillons pour un système donné avec des conditions initiales associées a été intégrée numériquement avec un schéma de Runge–Kutta d'ordre 4. La conservation de l'énergie et du moment angulaire a été contrôlée pendant les calculs. L'analyse montre que les paramètres ont de petites variations avec les erreurs définies par $|H_i - H_0|/|H_0| \leq 3 \times 10^{-3}$, $|P_i - P_0|/|P_0| \leq 2 \times 10^{-7}$ pendant le procédé d'itération de $t = 0$ to $t = 50$ qui correspond à 50 temps de référence. Malgré l'écart quadratique relativement significatif pour l'Hamiltonien, qui devrait mener, en principe, à l'intensification du processus de mélange grâce aux erreurs numériques s'accumulant, aucune tendance visible de la chaotisation n'a été observée.

Les résultats finaux des calculs (pour $t \sim 50$) sont présentés sur les Figs. 1 et 2.

3. Conclusion

Les Figs. 1 et 2 montrent nettement que les champs tourbillonnaires caractérisés par les répartitions initialement différentes et ayant les mêmes invariants globaux, ne tendent visiblement pas à évoluer vers une configuration universelle, unique et axi-symétrique. En effet, on remarque bien la présence de « clusters » s'organisant différemment dans les deux cas présentés. Nous pouvons l'expliquer par le fait que la fonction de répartition des tourbillons, présentée en 1, comporte une partie fluctuante, $f_1(\theta_0, \Omega)$, qui est nulle (à cause du moyennage) pour les expériences et les méthodes de modes spectraux, mais qui ne l'est pas dans notre cas. Si nous enlevons cette fonction fluctuante dans notre étude, tout se passera comme si le système évoluait vers une configuration axi-symétrique. Les résultats des Figs. 1 et 2 ne s'inscrivent donc pas dans les prédictions basées sur les arguments habituels de la Mécanique Statistique, ce qui pourrait être estimé énigmatique. Cependant, des expériences récentes sur la formation des cristaux tourbillonnaires [13,14] montrent que la situation n'est pas si évidente qu'on pourrait le penser : le système 2D, en évoluant en absence d'une dissipation et d'un forçage (physique ou numérique),

n'oublie pas les conditions initiales de sa répartition. Notre étude confirme, en un certain sens, les arguments de Batchelor [3], qui soutenait que l'état quasi-final du système tourbillonnaire est fixé par l'histoire qui précède cet état. Nous avons observé qu'en fonction des conditions initiales plusieurs états finaux peuvent donc être formés : (a) états « basiques » qui atteignent un état maximum au centre (du probablement au mélange complet des tourbillons), (b) « cristaux tourbillonnaires », et (c) les états correspondants au « minimum de l'enstrophie », où aucun tourbillon fort ne persiste.

Références

- [1] L.D. Landau, E.-M. Lifchitz, *Physique statistique*, vol. 5, Nauka, Moscou, 1979.
- [2] L.D. Landau, E.-M. Lifchitz, *Cinétique physique*, vol. 10, Mir, Moscou, 1979, p. 26.
- [3] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967, p. 537.
- [4] D. Marteau, O. Cardoso, P. Tabeling, Equilibrium states of two-dimensional turbulence: an experimental study, *Phys. Rev. E* 51 (5) (1995) 5124.
- [5] S. Danilov, F.V. Dolzhanskii, V.A. Dovzhenko, V.A. Krymov, Experiments on free decay of quasi-two-dimensional turbulent flows, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 036316.
- [6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, second ed., revised, Pergamon Press, Oxford, New York, 1987.
- [7] L. Onsager, *Statistical hydrodynamics*, *Nuevo Cimento Suppl.* 6 (1949) 279.
- [8] J. Miller, P.B. Weichman, M.C. Cross, Statistical mechanics, Euler's equations, and Jupiter's Red Spot, *Phys. Rev. A* 45 (4) (1992) 2328–2359.
- [9] Y.B. Pointin, T.-S. Lundgren, Statistical mechanics of two-dimensional vortices in a bounded container, *Phys. Fluids* 19 (1976) 1459.
- [10] J. Sommeria, C. Staquet, R. Robert, Final equilibrium state of a two-dimensional shear layer, *J. Fluid Mech.* 233 (1991) 661.
- [11] H. Brands, P.H. Chavanis, R. Pastmanter, J. Sommeria, Maximum entropy versus minimum enstrophy vortices, *Phys. Fluids* 11 (11) (1999) 3465.
- [12] V. Pavlov, D. Buisine, S. Decossin, Whether two-dimensional turbulence evolves to a unique state, *Phys. Fluids* 14 (11) (2002) 3739–3745.
- [13] K.S. Fine, A.S. Cass, W.-G. Flynn, C.-F. Driscoll, Relaxation of 2D turbulence to vortex crystals, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 3277.
- [14] X.P. Huang, C.F. Driscoll, Relaxation of 2D turbulence to a metastable equilibrium near the minimum enstrophy state, *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994) 2187.