



Réduction de modèle en convection naturelle par une méthode d'identification

Manuel Girault *, Stéphanie Derouineau, Jacques Salat, Daniel Petit

Laboratoire d'études thermiques, U.M.R. C.N.R.S. n°6608, ENSMA, téléport 2, 1, avenue Clément Ader,
BP 40109, 86961 Futuroscope Chasseneuil cedex, France

Reçu le 1^{er} décembre 2003 ; accepté après révision le 14 juin 2004

Disponible sur Internet le 10 août 2004

Présenté par Sébastien Candel

Résumé

Dans cette étude numérique, un Modèle Réduit (MR) de convection naturelle est construit en utilisant les résultats d'un Modèle Détaillé (MD, obtenu par une méthode pseudo-spectrale), associés à un problème d'optimisation. La structure du MR est définie à partir d'une formulation matricielle obtenue après discrétisation spatiale des équations locales du problème. Les matrices du MR sont identifiées à travers la minimisation d'une fonctionnelle bâtie sur l'écart entre les réponses du MD et celles du MR, ceci pour plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh. La méthode est appliquée à un écoulement laminaire stationnaire en cavité 2D différentiellement chauffée (Window problem). Le MR permet une diminution importante du temps de calcul. **Pour citer cet article : M. Girault et al., C. R. Mecanique 332 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Model Reduction in natural convection using an identification method. In this numerical study, a natural convection Reduced Model (RM) is built by using results of a Detailed Model (DM, obtained by a pseudo-spectral method), associated with an optimisation problem. RM's structure is defined from a matrix formulation obtained after spatial discretisation of the problem local equations. RM's matrices are identified through the minimisation of a functional build on the discrepancy between DM's and RM's responses, for several values of Rayleigh number. The method is applied to a laminar steady flow in a 2D differentially heated cavity (Window problem). The RM allows one to strongly reduce computing time. **To cite this article: M. Girault et al., C. R. Mecanique 332 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Transferts thermiques ; Convection naturelle ; Modèle Réduit ; Identification de modèle ; Optimisation

Keywords: Heat transfer; Natural convection; Reduced Model; Model identification; Optimisation

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : girault@let.ensma.fr (M. Girault), derouineau@let.ensma.fr (S. Derouineau), salat@let.ensma.fr (J. Salat), petit@let.ensma.fr (D. Petit).

Abridged English version

Numerical models for natural convection problems require large computing times. This becomes a limiting factor when considering the realisation of commanded flows. Model reduction brings interesting answers: it consists to replace a model built from a classical spatial discretisation of the domain (using Finite Volumes, Finite Elements, . . .), also called Detailed Model (DM) and whose dimension corresponds to the number N of discretisation nodes, by a model involving a small number $n \ll N$ of equations, or Reduced Model (RM), reproducing the DM behaviour with limited loss of accuracy and reduced computing time. Only few reduction methods exist for fluid mechanics problems, coupled or not with heat transfer. One should note the POD method (Proper Orthogonal Decomposition) also called the Karhunen–Loève Galerkin method [1], used for the resolution of inverse natural convection problems [2]. An original method for identifying a natural convection reduced model is proposed in this numerical study. It derives from the Modal Identification Method developed for dynamic linear thermal systems to build reduced models [3], and then extended to nonlinear heat conduction [4]. From a spatial discretisation of local equations for conservation of mass, momentum and energy under the Boussinesq hypothesis (Eq. (1)), a matrix formulation of the transient problem can be obtained (Eq. (2)). By manipulating these equations, a RM structure is defined (Eq. (16)), allowing one to compute the approached velocity and temperature fields. Thanks to the adopted state space representation, the method can be applied whatever the domain geometry. The RM is then written for the steady case considered in this study (Eq. (17)). RM's matrices are identified through the minimisation of a squared residues functional (Eq. (18)) built on the discrepancy between, on the one hand, the system responses, obtained in this study using a DM based on a pseudo-spectral method [5] and computed on the IDRIS calculators by S. Xin (LIMSI, Orsay, France), and on the other hand, RM's outputs, for several values of Rayleigh number. The identification procedure uses optimisation techniques (*Linear least squares*, *Quasi-Newton* method). A simple example illustrates the method: a steady laminar natural convection flow in a 2D differentially heated cavity (Window problem) is considered. Velocity and temperature data fields for $Ra = 1.5 \times 10^7$, 6×10^7 , 1.1×10^8 and 1.6×10^8 are used for the RM identification. A RM of order $n = 4$ is identified and then tested for values of Rayleigh number different from those used for the identification: velocity and temperature fields corresponding to $Ra = 3 \times 10^7$, 8×10^7 and 1.4×10^8 computed using the RM are in good agreement with those obtained with the DM (cf. Table 1 and Figs. 1 and 2 for the velocity component u field in the $Ra = 8 \times 10^7$ case). Whereas the computation using the DM of order $N = 81 \times 81 = 6561$ requires several CPU hours, only 0.5 s CPU on a 2.3 Go RAM workstation with a MIPS R12000 processor cadenced at 270 MHz is needed with the RM of order $n = 4$. Therefore this first approach for RM identification allows one to drastically reduce computing time in comparison with the DM. One can therefore conceive the interest to use such a RM to solve inverse problems, for example to estimate a boundary condition or a heat source (at present under development). Of course, in the steady case, velocity and temperature fields could be obtained by simple interpolations between data fields at different Ra , and one understands that the present study only constitutes a preliminary step: the final objective is to identify an unsteady RM which could be particularly useful to realise flow control. The identification of a RM from experimental data is also under investigation.

1. Introduction

Les codes de simulation des problèmes de convection naturelle requièrent des temps de calcul importants. Dans l'optique du contrôle d'écoulements, cet aspect devient un facteur limitant. La réduction de modèle apporte des réponses intéressantes : elle consiste à remplacer un modèle construit à partir d'une discrétisation spatiale classique du domaine (par Volumes Finis, Eléments Finis, . . .), aussi appelé Modèle Détaillé (MD) et dont la dimension correspond donc au nombre N de nœuds de discrétisation, par un modèle mettant un jeu un nombre d'équations $n \ll N$, ou Modèle Réduit (MR), reproduisant de manière satisfaisante le comportement du MD avec un temps de calcul restreint. Peu de méthodes de réduction existent pour les problèmes de mécanique des fluides, couplés ou non avec les transferts de chaleur. On notera l'approche dite POD (Proper Orthogonal Decomposition) aussi appelée méthode de Karhunen–Loève Galerkin [1], notamment utilisée pour la résolution de problèmes inverses

en convection naturelle [2]. Une méthode originale d'identification de modèle réduit de convection naturelle est proposée dans cette étude numérique. Elle dérive de la Méthode d'Identification Modale développée dans le cadre des systèmes thermiques linéaires dynamiques pour la construction de modèles réduits [3], puis étendue au cas de la conduction non-linéaire [4].

2. Principe de la méthode

On considère une formulation matricielle du problème transitoire que l'on peut obtenir à partir d'une discrétisation spatiale des équations locales de continuité, de Navier–Stokes et de l'énergie, sous l'hypothèse de Boussinesq. En exploitant ces équations, une structure est définie pour le MR, permettant le calcul de champs de vitesse et de température approchés. Grâce à la représentation d'état adoptée, la méthode peut être appliquée quelle que soit la géométrie du domaine. Le MR est ensuite écrit pour le cas du régime permanent, auquel se limite cette étude. Les matrices du MR sont identifiées à travers la minimisation d'une fonctionnelle d'écart quadratique bâtie sur la différence entre d'une part les réponses du système, obtenues dans cette étude avec un MD basé sur une méthode pseudo-spectrale [5] et calculées sur les calculateurs de l'IDRIS par S. Xin (LIMSI, Orsay, France), d'autre part les sorties du MR, ceci pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. La procédure utilise des techniques d'optimisation (*Moindres carrés linéaires*, méthode *Quasi-Newton*).

3. Formulation du Modèle Réduit à identifier

On considère un fluide dans un domaine 2D de géométrie quelconque. Un écoulement de convection naturelle peut être généré par l'existence, sur deux portions de la frontière du domaine, d'une température chaude T_c^* et d'une température froide T_f^* . Les autres parties de la frontière sont supposées isolées. En utilisant un adimensionnement correspondant à une vitesse de référence $U_c = \sqrt{g\beta\Delta T L/Pr}$ (avec $\Delta T = T_c^* - T_f^*$ et L une longueur de référence) et à une température adimensionnée $T = (T^* - 0,5(T_c^* + T_f^*))/\Delta T$, les équations de continuité, de Navier–Stokes et de l'énergie en formulation « fonction de courant – vortacité », pour un écoulement incompressible et sous l'hypothèse de Boussinesq, s'écrivent dans le système de coordonnées 2D cartésien, en notant respectivement ψ et ω la fonction de courant et la vortacité adimensionnées, et avec les nombres de Rayleigh $Ra = g\beta\Delta T L^3/\alpha\nu$ et de Prandtl $Pr = \nu/\alpha$ (g accélération de la pesanteur, β coefficient de dilatation volumique sous l'effet de l'augmentation de température, ν viscosité cinématique du fluide, α diffusivité thermique du fluide) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = Pr Ra^{-1/2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + Pr \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = Ra^{-1/2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (1a-c)$$

Nous utilisons maintenant un nouvel adimensionnement en température $T = (T^* - T_f^*)/\Delta T_{\text{ref}}$, où ΔT_{ref} est une différence de température de référence indépendante de T_c^* et de T_f^* . La nouvelle température froide adimensionnée T_f est égale à 0. La température chaude adimensionnée $T_c = \Delta T/\Delta T_{\text{ref}}$ est alors l'unique sollicitation thermique, et le nombre de Rayleigh classique Ra est remplacé par un Rayleigh de référence $b = g\beta\Delta T_{\text{ref}}L^3/\alpha\nu$ indépendant de ΔT . Cet adimensionnement permet, dans une optique de contrôle-commande, d'isoler dans les équations du problème la quantité T_c commandant l'écoulement.

Classiquement, au lieu de discrétiser un domaine physique de forme irrégulière, on transforme ce dernier en un domaine de calcul de forme régulière dans lequel les équations du problème sont réécrites. Cependant, nous considérons ici une discrétisation spatiale des Éqs. (1a–c) réadimensionnées, qui peut être obtenue par une méthode classique (Volumes Finis, Éléments Finis, ...), incluant les conditions aux limites. Soit N le nombre de nœuds

utilisés. On appelle Ψ le vecteur des ψ_i , $i = 1, \dots, N$, Ω le vecteur des ω_i , $i = 1, \dots, N$, et T le vecteur des T_i , $i = 1, \dots, N$. La discrétisation spatiale peut être écrite sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} A\Psi = -\Omega \\ \dot{\Omega} = Pr b^{-1/2}(A + C)\Omega + W(\Psi, \Omega) + Pr K T \\ \dot{T} = b^{-1/2}AT + W(\Psi, T) + b^{-1/2}BT_c \end{cases} \quad (2a-c)$$

où :

- A est la matrice de dimension (N, N) contenant la discrétisation de l'opérateur Laplacien.
- $W(\Psi, \Omega)$ est le vecteur de dimension N correspondant à la discrétisation du terme $-(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y})$ de l'équation de vorticité (1b). Chacune de ses composantes contient donc, avec d'autres éléments comme les pas d'espace, des sommes de certains produits $\psi_i \omega_j$. De façon analogue, $W(\Psi, T)$ est le vecteur de dimension N correspondant à la discrétisation du terme $-(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y})$ de l'équation de l'énergie (1c). Chacune de ses composantes contient des sommes de certains produits $\psi_i T_j$.
- K est une matrice de dimension (N, N) correspondant à la discrétisation de « l'opérateur » $\frac{\partial}{\partial x}$.
- C est une matrice de dimension (N, N) reliant les N nœuds de discrétisation aux conditions aux limites en vorticité.
- B est un vecteur de dimension N reliant les N nœuds de discrétisation à la sollicitation thermique T_c .
- $\dot{\Omega}$ et \dot{T} sont les vecteurs dérivés par rapport au temps des vecteurs Ω et T .

Imaginons que l'on résolve les problèmes aux valeurs propres associés aux matrices $A + C$ et A . Appelons D_η et D_θ les matrices diagonales dont les composantes sont les valeurs propres de $A + C$ et A et M_η et M_θ les matrices dont les colonnes sont les vecteurs propres correspondants. On a donc :

$$D_\eta = M_\eta^{-1}(A + C)M_\eta \quad \text{et} \quad D_\theta = M_\theta^{-1}AM_\theta \quad (3a,b)$$

Effectuons les changements de variables suivants :

$$\Psi = M_\eta \xi, \quad \Omega = M_\eta \eta, \quad T = M_\theta \theta \quad (4a-c)$$

Leur introduction dans les Éqs (2a-c) mène, en tenant compte de (3a,b), à :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = S\eta \\ \dot{\eta} = Pr b^{-1/2}D_\eta \eta + M_\eta^{-1}W(M_\eta \xi, M_\eta \eta) + Pr M_\eta^{-1}KM_\theta \theta \\ \dot{\theta} = b^{-1/2}D_\theta \theta + M_\theta^{-1}W(M_\eta \xi, M_\theta \theta) + b^{-1/2}M_\theta^{-1}BT_c \end{cases} \quad (5a-c)$$

où $S = -M_\eta^{-1}A^{-1}M_\eta$. Nous avons noté que chaque composante du vecteur $W(\Psi, T)$ contient des sommes de produits $\psi_i T_j$. D'après (4a) et (4c), chaque terme $\psi_i T_j$ s'écrit :

$$\psi_i T_j = \left(\sum_{k=1}^N M_{\eta ik} \xi_k \right) \left(\sum_{l=1}^N M_{\theta jl} \theta_l \right) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (M_{\eta ik} M_{\theta jl} \xi_k \theta_l) \quad (6)$$

Le vecteur $W(\Psi, T) = W(M_\eta \xi, M_\theta \theta)$ peut donc se mettre sous la forme :

$$W(\Psi, T) = W(M_\eta \xi, M_\theta \theta) = L_1 \Pi(\xi, \theta) \quad (7)$$

où la matrice L_1 de dimension (N, N^2) contient des produits $M_{\eta ik} M_{\theta jl}$, et le vecteur Π (dim N^2) est défini comme :

$$\begin{aligned} \Pi(X, Y) \\ = [X_1 Y_1 \quad X_1 Y_2 \quad \cdots \quad X_1 Y_N \quad X_2 Y_1 \quad X_2 Y_2 \quad \cdots \quad X_2 Y_N \quad \cdots \quad X_N Y_1 \quad X_N Y_2 \quad \cdots \quad X_N Y_N]^T \end{aligned} \quad (8)$$

En injectant (5a) dans (7), on obtient :

$$W(\Psi, T) = W(M_\eta \xi, M_\theta \theta) = L_1 \Pi(S\eta, \theta) = F \Pi(\eta, \theta) \tag{9}$$

où la matrice F est de dimension (N, N^2) .

De façon analogue, le vecteur $W(\Psi, \Omega) = W(M_\eta \xi, M_\eta \eta)$ peut se mettre sous la forme :

$$W(\Psi, \Omega) = W(M_\eta \xi, M_\eta \eta) = L_2 \Pi(\xi, \eta) = L_2 \Pi(S\eta, \eta) = RZ(\eta) \tag{10}$$

où la matrice R est de dimension $(N, N(N+1)/2)$ et Z est le vecteur de dimension $N(N+1)/2$ défini comme :

$$Z(X) = [X_1^2 \quad X_1 X_2 \quad \dots \quad X_1 X_N \quad X_2^2 \quad X_2 X_3 \quad \dots \quad X_2 X_N \quad \dots \quad X_{N-1}^2 \quad X_{N-1} X_N \quad X_N^2]^T \tag{11}$$

D'après (9) et (10) et en posant $P = M_\eta^{-1} R$, $Q = M_\theta^{-1} F$, $E = M_\eta^{-1} K M_\theta$, $G = M_\theta^{-1} B$, les Éqs. (5a–c) s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = S\eta \\ \dot{\eta} = Pr b^{-1/2} D_\eta \eta + PZ(\eta) + Pr E\theta \\ \dot{\theta} = b^{-1/2} D_\theta \theta + Q\Pi(\eta, \theta) + b^{-1/2} G T_c \end{cases} \tag{12a–c}$$

Appelons U le vecteur des composantes de vitesse horizontale u_i , $i = 1, \dots, N$, et V le vecteur des composantes de vitesse verticale v_i , $i = 1, \dots, N$, aux nœuds de discrétisation du domaine. Sachant que la fonction de courant Ψ est définie par : $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, et en appelant J et K les matrices correspondant respectivement à la discrétisation des « opérateurs » $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$, on peut écrire :

$$U = J\Psi = J M_\eta \xi = J M_\eta S\eta = H_U \eta \tag{13}$$

$$V = -K\Psi = -K M_\eta \xi = -K M_\eta S\eta = H_V \eta \tag{14}$$

L'ensemble des Éqs. (12a–c) en variables η, θ (forme « modale ») et des équations permettant d'exprimer les champs de vitesse (Éqs. (13) et (14)) et de température (Éq. (4c)) prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = Pr b^{-1/2} D_\eta \eta + PZ(\eta) + Pr E\theta \\ \dot{\theta} = b^{-1/2} D_\theta \theta + Q\Pi(\eta, \theta) + b^{-1/2} G T_c \end{cases} \quad \begin{cases} U = H_U \eta \\ V = H_V \eta \\ T = M_\theta \theta \end{cases} \tag{15a–e}$$

Remarque 1. La variable ξ a été éliminée au profit de η . En fait, la matrice S de l'Éq. (12a) (issue de l'Éq. (2a) reliant la fonction de courant à la vorticité) est intégrée dans les matrices P , Q , H_U et H_V .

Dans la formulation (15), les équations différentielles en η et θ sont toujours d'ordre N , cependant la matrice P est de dimension $(N, N(N+1)/2)$ et la matrice Q est de dimension (N, N^2) !!! L'idée est de s'appuyer sur cette structure pour identifier un Modèle Réduit de forme analogue, mais d'ordre $n \ll N$, soit :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = Pr b^{-1/2} D_\eta \eta + PZ(\eta) + Pr E\theta \\ \dot{\theta} = b^{-1/2} D_\theta \theta + Q\Pi(\eta, \theta) + b^{-1/2} G T_c \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{U} = H_U \eta \\ \tilde{V} = H_V \eta \\ \tilde{T} = H_T \theta \end{cases} \tag{16a–e}$$

fournissant des champs approchés $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{T}$, et pour lequel η et θ sont des vecteurs de dimension $n \ll N$. Les matrices D_η et D_θ sont diagonales de dimension (n, n) , P est de dimension $(n, n(n+1)/2)$, Q de dimension (n, n^2) , E de dimension (n, n) et G de dimension n . Les matrices H_U, H_V et H_T sont de dimension (N, n) .

L'objectif étant à terme d'utiliser des MR dans des problèmes de contrôle, les  qs. (16) du MR ont été développées dans le cas instationnaire. Cependant, nous nous limitons dans cette étude au cas du régime permanent : en incluant D_η dans P et E et D_θ dans Q et G , le MR à identifier s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = Pr b^{-1/2} \eta + PZ(\eta) + Pr E\theta \\ 0 = b^{-1/2} \theta + Q\Pi(\eta, \theta) + b^{-1/2} G T_c \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{U} = H_U \eta \\ \tilde{V} = H_V \eta \\ \tilde{T} = H_T \theta \end{cases} \tag{17a–e}$$

4. Identification des matrices du MR

L'identification des composantes des matrices P , Q , E , G , H_U , H_V et H_T du MR est réalisée par la minimisation d'une fonctionnelle quadratique bâtie sur l'écart entre les réponses du MD et les réponses correspondantes du MR fournies par les Éqs. (17a–e), pour plusieurs valeurs de Ra (i.e. plusieurs valeurs de T_c) afin de couvrir la gamme de Ra désirée :

$$J_{\text{red}}(P, Q, E, G, H_U, H_V, H_T) = \sum_{i=1}^{N_{Ra}} \sum_{j=1}^N [(U_{ij}^* - \tilde{U}_{ij})^2 + (V_{ij}^* - \tilde{V}_{ij})^2 + (T_{ij}^* - \tilde{T}_{ij})^2] \quad (18)$$

où U^* , V^* , T^* sont les champs de vitesse et de température fournis par le MD (réadimensionnés de la manière exposée à la paragraphe 3), et N_{Ra} est le nombre de valeurs de Ra utilisées. Bien sûr, plus le nombre de valeurs de Ra différentes pour lesquelles on dispose des champs de vitesse et de température est important, meilleure sera la précision du MR identifié dans la gamme. Le MR est d'ailleurs construit pour une gamme de Ra choisie, hors de celle-ci, il fournira des résultats qui s'ils demeurent cohérents, reproduiront bien entendu moins fidèlement le comportement du MD.

Remarque 2. L'approche présente l'avantage de permettre de construire un MR spécifique à quelques points de contrôle. Soit q le nombre de ces points. On utilise alors comme données pour l'identification les vitesses et températures aux q points concernés et les matrices H_U , H_V et H_T du MR sont de dimension (q, n) . Dans l'exemple présenté au paragraphe suivant, l'ensemble des points de la cavité est considéré ($q = N$).

Remarque 3. Si les données de l'algorithme d'identification proviennent d'un MD, comme c'est le cas dans cette étude, les paramètres Pr et b sont connus et leurs valeurs peuvent être utilisées. Dans le cas de données expérimentales, ces paramètres peuvent n'être connus qu'imparfaitement : il est alors possible de les conserver comme inconnues à identifier au même titre que les matrices du modèle, ou encore de les intégrer à celles-ci.

La méthode de minimisation du critère d'écart (18) utilise des techniques d'optimisation. Les Éqs. (17) montrent que les sorties du MR sont linéaires par rapport à H_U , H_V et H_T , mais pas par rapport à P , Q , E , G . Pour un ordre n fixé, la méthode de minimisation de J_{red} utilise donc deux techniques différentes :

Les composantes de P , Q , E et G , soit au total $1,5(n^3 + n^2) + n$ paramètres, sont identifiés par une méthode de programmation non-linéaire (méthode *Quasi-Newton*). Ainsi, à l'ordre $n = 4$, on a 124 paramètres à identifier. Les composantes du gradient du critère J_{red} sont calculées par différences finies. L'algorithme d'identification requiert de nombreuses résolutions du système (17). Le faible nombre d'équations n mises en jeu rendent chacune de ces résolutions très peu coûteuse en temps de calcul.

A chaque itération de l'algorithme *Quasi-Newton*, P , Q , E et G sont fixés, les vecteurs d'état η et θ sont alors calculés et H_U , H_V et H_T sont déterminées par *moindres carrés linéaires* de façon à minimiser J_{red} .

Dans le cas d'un MR fonctionnant en régime transitoire, et donc identifié à partir de données échantillonnées dans le temps, la procédure serait la suivante : partant de $n = 1$, on incrémente l'ordre n du MR et on identifie un MR pour chaque valeur de n jusqu'à ce que la précision souhaitée soit obtenue ou que l'écart entre deux critères successifs soit très faible. Dans le cas permanent présenté ici, la démarche est un peu différente (cf. ci-dessous).

5. Exemple d'application

La méthode est illustrée sur l'exemple simple d'un écoulement laminaire stationnaire de convection naturelle dans une cavité 2D différentiellement chauffée. Nous disposons des champs de vitesse et de température pour 7 valeurs du nombre de Rayleigh dans la gamme $[1,5 \times 10^7; 1,6 \times 10^8]$. Nous avons donc choisi d'utiliser comme données pour l'identification du MR, les champs à 4 Ra différents ($1,5 \times 10^7$, 6×10^7 , $1,1 \times 10^8$ et $1,6 \times 10^8$),

et de tester le MR obtenu en comparant ses réponses avec les champs issus du MD pour les 3 autres valeurs de Ra (3×10^7 , 8×10^7 et $1,4 \times 10^8$).

Pour le cas permanent présenté ici, pour lequel on utilise les solutions à 4 Ra différents, l'ordre maximal du MR est alors $n = 4$. En effet, pour $n = 5$, on aurait plus d'inconnues pour chacune des matrices H_U , H_V et H_T de dimension $(N, 5)$ que de données correspondantes $(4N)$. Pour $n = 1, 2, 3, 4$, la fonctionnelle J_{red} vaut respectivement 2,74; 0,60; $3,3 \times 10^{-2}$ et 10^{-13} . Cette dernière valeur, très faible, s'explique bien sûr par le fait que pour $n = 4$, il y a exactement autant de données que d'inconnues $(4N)$ pour chacune des matrices H_U , H_V et H_T . Dans le cas de données échantillonnées dans le temps, on aurait bien sûr toujours beaucoup plus de données que d'inconnues.

Pour les 3 Rayleigh servant de test (3×10^7 , 8×10^7 et $1,4 \times 10^8$), les champs calculés avec le MR d'ordre $n = 4$ sont en bonne adéquation avec ceux obtenus par le MD d'ordre $N = 81 \times 81 = 6561$. En effet, le Tableau 1 regroupe, pour chacune des variables u , v , T et pour les 3 valeurs de Ra (3×10^7 , 8×10^7 et $1,4 \times 10^8$), les valeurs des écarts quadratiques moyens entre les solutions du MD et celles du MR, définis comme :

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (U_i - \tilde{U}_i)^2}, \quad \sigma_V = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (V_i - \tilde{V}_i)^2}, \quad \sigma_T = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_i - \tilde{T}_i)^2}$$

où U, V, T sont les solutions du MD et $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{T}$ celles du MR. Les valeurs de σ_U, σ_V et σ_T sont de l'ordre de 10^{-3} , alors que les valeurs maximales de u et v sont respectivement de l'ordre de 0,11 et 0,22 pour les 3 Ra considérés,

Tableau 1
Résumé de la validation du MR pour les 3 nombres de Rayleigh test

Table 1 Summary of RM validation for the 3 test Rayleigh numbers			
Ra	3×10^7	8×10^7	$1,4 \times 10^8$
σ_U	$1,83 \times 10^{-3}$	$5,52 \times 10^{-4}$	$5,47 \times 10^{-4}$
σ_V	$4,33 \times 10^{-3}$	$1,26 \times 10^{-3}$	$1,27 \times 10^{-3}$
σ_T	$2,46 \times 10^{-3}$	$6,42 \times 10^{-4}$	$6,07 \times 10^{-4}$

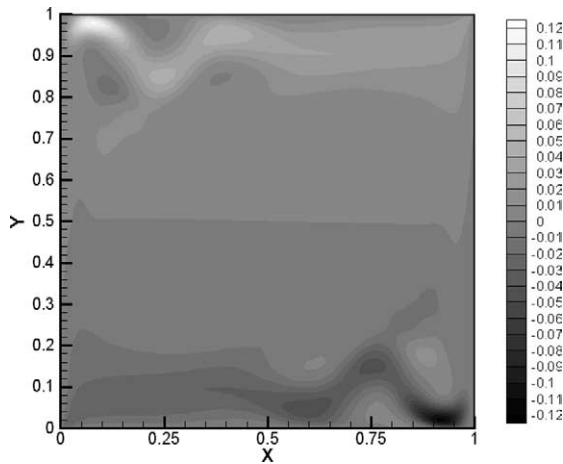


Fig. 1. Champ de composante de vitesse u obtenu par MD pour $Ra = 8 \times 10^7$.

Fig. 1. Velocity component u field obtained by DM for $Ra = 8 \times 10^7$.

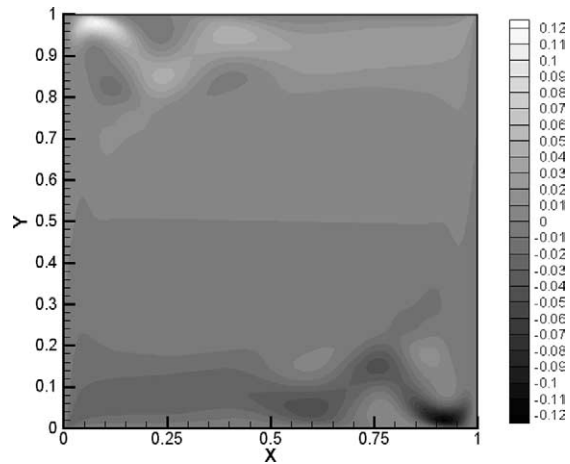


Fig. 2. Champ de composante de vitesse u obtenu par MR, pour $Ra = 8 \times 10^7$.

Fig. 2. Velocity component u field obtained by RM, for $Ra = 8 \times 10^7$.

et la valeur maximale de la température égale à 0,5 (retour dans l'intervalle classique de température $[-0,5; 0,5]$). Les Figs. 1 et 2 montrent respectivement le champ de la composante de vitesse u obtenu par MD et par MR dans le cas $Ra = 8 \times 10^7$.

Alors que le temps de calcul avec le MD d'ordre $N = 6561$ nécessite plusieurs heures CPU, le calcul avec le MR d'ordre $n = 4$ sur une station de calcul possédant 2,3 Go de mémoire vive et équipée d'un processeur MIPS R12000 cadencé à 270 MHz, ne demande que 0,5 s CPU. Une fois identifié, le MR est utilisable pour n'importe quel Ra dans la gamme considérée, avec un temps de calcul toujours de cet ordre. Un MR n'étant pas construit pour ne s'en servir qu'une seule fois, le temps de calcul nécessaire à la construction du MR, dépendant du nombre de données traitées et de l'ordre n du modèle (quelques secondes à l'ordre 1, quelques minutes à l'ordre 4 sur la station de calcul évoquée), ne doit pas à notre sens être inclus dans la comparaison avec le MD. Quoi qu'il en soit, ces temps de construction sont eux-mêmes très courts.

6. Conclusion

Une méthode d'identification de Modèle Réduit (MR) pour les écoulements de convection naturelle est proposée dans cette Note. Une structure matricielle réduite est définie à partir d'une formulation obtenue après une discrétisation spatiale théorique des équations locales de Boussinesq. Les matrices du MR sont identifiées en minimisant une fonctionnelle bâtie sur l'écart entre les réponses du système obtenues avec un Modèle Détaillé (MD) et celles du MR, pour plusieurs nombres de Rayleigh. La méthode est illustrée sur l'exemple simple d'un écoulement laminaire stationnaire de convection naturelle dans une cavité 2D différentiellement chauffée.

Cette première approche d'identification de MR permet un gain substantiel en temps de calcul par rapport au MD, on conçoit donc l'intérêt d'utiliser un tel MR pour la résolution de problèmes inverses (actuellement en cours). Bien sûr, en régime permanent, les champs de vitesse et de température pourraient être obtenus par de simples interpolations à partir des champs connus à différents Ra , et on comprend que la présente étude ne constitue qu'une étape préliminaire : l'objectif final est d'identifier un MR instationnaire qui pourrait s'avérer très utile pour le contrôle d'un écoulement. A partir de données en régime transitoire issues d'un MD, il a déjà été possible d'identifier un MR reproduisant fidèlement les évolutions de vitesse et de température d'un point de la cavité calculés par un MD. Une structure de MR applicable à une configuration tridimensionnelle peut être développée à partir d'une formulation « fonction de courant – vorticité » 3D. L'identification d'un MR à partir de données expérimentales peut donc être envisagée.

Références

- [1] A.J. Newman, Model reduction via the Karhunen–Loève expansion, Part I: an exposition, Technical Research Report of the Institute for Systems Research, University of Maryland, 1996. http://techreports.isr.umd.edu/TechReports/ISR/1996/TR_96-32/TR_96-32.phtml.
- [2] H.M. Park, W.S. Jung, The Karhunen–Loève Galerkin method for the inverse natural convection problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* 44 (1) (2001) 155–167.
- [3] D. Petit, R. Hachette, D. Veyret, A modal identification method to reduce a high order model: application to heat conduction modelling, *Int. J. Model. Simul.* 17 (3) (1997) 242–250.
- [4] M. Girault, D. Petit, Identification d'un Modèle Réduit de diffusion thermique non linéaire instationnaire, in: *Congrès français de Thermique, SFT 2003*, Grenoble 3–6 juin, 2003.
- [5] S. Xin, P. Le Quéré, Linear stability analyses of natural convection flows in a differentially heated square cavity with conducting horizontal walls, *Phys. Fluids* 13 (9) (2001) 2529–2542.