

Stabilité linéaire d'écoulements symétriques presque parallèles en canal

Ahmed Hifdi *, Mohammed Ouazzani Touhami, Jaâfar Khalid Naciri

Laboratoire de mécanique, faculté des sciences Aïn chock, B.P. 5366 Maârif, Casablanca, Maroc

Reçu le 10 février 2004 ; accepté après révision 29 juin 2004

Disponible sur Internet le 10 août 2004

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Dans cette Note, nous présentons une analyse de stabilité temporelle linéaire des écoulements symétriques en zone d'établissement en canal à partir de la résolution de l'équation d'Orr–Sommerfeld par la méthode spectrale de collocation de Chebyshev. La solution de base considérée est présentée sous forme analytique et correspond à des profils légèrement perturbés par rapport au profil de Poiseuille. Nous montrons en particulier que la forme et l'amplitude de ces profils sont déterminantes pour leur stabilité. *Pour citer cet article : A. Hifdi et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Linear stability of nearly parallel symmetric flows in a channel. In this Note, we present a temporal linear stability analysis of symmetric developing flows slightly perturbed from Poiseuille flow. The Chebyshev spectral collocation method is used to resolve the Orr–Sommerfeld equation. For the main flow, the solution considered is analytic. The results of the stability study depend essentially on the shape and amplitude of the velocity profiles imposed at the channel entry. *To cite this article: A. Hifdi et al., C. R. Mecanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Écoulements d'entrée ; Perturbations symétriques ; Stabilité linéaire ; Équation d'Orr–Sommerfeld ; Méthode spectrale

Keywords: Fluid mechanics; Entry flows; Symmetric perturbations; Linear stability; Orr–Sommerfeld equation; Spectral method

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : ahmedhifdi@yahoo.fr (A. Hifdi).

Abridged English version

The study of the pipe entrance flow stability is a relatively classical theme for which extensive analytical investigations have been performed by [1–6]. However, the temporal linear stability of channel entrance flow is an unresolved issue. We approach in this Note this topic.

Before proceeding to the stability problem, attention is first given to the main flow in order to give some details on its analytic solution that we have established in a recent paper [9]. This solution is based on the hypothesis of small disturbances from fully developed flow and it is valid for intermediate Reynolds numbers. The disturbances are separated into symmetric and antisymmetric eigenmodes of the velocity. In a second step, we deal with the linear stability of this main flow taking into account the nearly parallel flow assumption. The stability problem formulation leads to Orr–Sommerfeld equation. This equation is then resolved using Chebyshev spectral collocation method [11]. To validate this numerical method, we have found some classical results reported by Orszag [12] and Dongarra et al. [16] when the main flow is supposed to be Poiseuille flow.

To illustrate our study of stability, the complete solutions of two main flows in the zone of entrance are obtained from Eq. (7) when we use two samples of the entry symmetric velocity profiles slightly perturbed from Poiseuille flow (cf. Figs. 2 and 3). It is shown that its stability essentially depends on the shape of the velocity profile imposed at the channel entry (cf. Figs. 4 and 5). Eigenvalues spectrum of these profiles are shown in Figs. 6 and 7 at a sample of entry zone station and compared to the spectrum of Poiseuille flow supposing the Reynolds number and wave number equal 10 000 and 1 respectively (cf. Fig. 1). Finally, to surround the influence of each symmetric perturbation modes of the Poiseuille flow on the stability of entry flow, we superpose them to Poiseuille profile separately when they are weighted with a positive real amplification coefficient. We study then its stability (cf. Fig. 8). They are most unstable as the amplification coefficient increase.

1. Introduction

Pour les écoulements en conduites, les problèmes de stabilité des écoulements d'entrée presque parallèles ont suscité beaucoup d'intérêt depuis les années 70 du siècle dernier [1–6]. Ces travaux, à caractère expérimental [3] ou numérique [1,2,4–6], ont porté sur la détermination des effets de perturbations axisymétriques ou non sur la stabilité de ces écoulements. Pour les approches numériques, le profil d'entrée considéré est généralement celui de Sparrow [1,2] ou celui de Hornbeck [4,5]. Les résultats numériques ne sont comparables aux observations expérimentales que pour ce dernier profil.

Pour l'écoulement en canal, seules des solutions numériques pour de faibles perturbations symétriques de l'écoulement de Poiseuille sont proposées [7,8] pour décrire des écoulements d'entrée. L'aspect relatif à l'étude de la stabilité de ces écoulements n'a pas encore, à notre connaissance, été abordé.

Dans ce travail nous rappelons, dans un premier temps la méthode de résolution analytique que nous avons développée dans [9], pour la détermination des profils de vitesses relatifs aux écoulements d'entrée en canal dans le cas où les profils imposés sont légèrement perturbés par rapport à l'écoulement de Poiseuille. Cette approche se base sur la résolution d'un problème aux valeurs propres obtenu à partir d'une forme linéarisée des équations de Navier–Stokes [10] correspondant à des nombres de Reynolds dits intermédiaires et à un rapport des longueurs caractéristiques transversale et longitudinale des perturbations très petit devant un. Ces solutions analytiques permettent, d'une part, d'accéder à un large spectre de modes propres et de distinguer les modes symétriques des modes antisymétriques et d'autre part, de mettre en évidence l'influence des modes antisymétriques sur le rétablissement de l'écoulement [9].

Dans une seconde étape, nous procédons à une analyse de stabilité linéaire temporelle de ces écoulements d'entrée. Les solutions de base, considérées dans le cadre de cette analyse sont, bien sûr, celles rappelées dans la première partie de ce travail. Néanmoins, nous nous limitons, dans un premier temps, aux cas où celles-ci sont symétriques. Par ailleurs, les perturbations de ces solutions de base que nous écrivons sous forme d'ondes de Tollmien–Schlichting, sont supposées bidimensionnelles et de nature visqueuse. L'équation classique d'Orr–

Sommerfeld, que nous obtenons dans ces conditions, est résolue par la méthode spectrale de collocation de Chebyshev [11]. Les travaux d’Orszag [12] portant sur la stabilité linéaire de l’écoulement de Poiseuille en Canal, nous permettent dans un premier temps, de valider les résultats obtenus. Par la suite, nous présentons les résultats dégagés à partir de l’étude de stabilité de quelques écoulements d’entrée symétriques légèrement perturbés par rapport celui de Poiseuille. Nous vérifions alors, que ces résultats varient d’un profil à un autre et dépendent en fait de leur forme et de leur amplitude. Ceci nous a conduit, en particulier, à cerner l’effet déstabilisateur des différents modes de perturbation de l’écoulement de Poiseuille lorsqu’ils sont superposés séparément à celui-ci.

2. Solution analytique de l’écoulement de base

Dans le système de coordonnées cartésiennes (x^*, y^*) , on considère l’écoulement d’un fluide visqueux incompressible situé entre deux plans parallèles d’équations $y^* = h$ et $y^* = -h$ que l’on suppose légèrement perturbé par rapport à celui de Poiseuille. Pour cela, on pose : $U^* = U_p^*(y) + u^*(x, y)$, $V^* = v^*(x, y)$ et $P^* = P_0^*(x) + p^*(x, y)$ où $U_p^*(y)$ et $P_0^*(x)$ sont la vitesse et la pression de l’écoulement de Poiseuille, $u^*(x, y)$, $v^*(x, y)$ et $p^*(x, y)$ sont respectivement les perturbations des vitesses longitudinale, transversale et de la pression.

Pour l’écriture adimensionnelle des équations de Navier–Stokes correspondant à cet écoulement, on se place dans le cadre de l’approche qui consiste à supposer que les perturbations sont de faibles amplitudes, le paramètre de forme $\epsilon \ll 1$ (ϵ étant le rapport entre h et la longueur axiale caractéristique L de la perturbation) et le nombre de Reynolds $Re = \epsilon U_0 h / \nu$ intermédiaire (U_0 et ν sont respectivement la vitesse moyenne de l’écoulement de Poiseuille et la viscosité cinématique du fluide). La prise en considération de ces hypothèses permet alors d’aboutir [10], en première approximation et en absence des forces volumiques, à la forme adimensionnelle linéaire des équations de Navier–Stokes suivante :

$$Re \left(U_p \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U_p}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{1a,b}$$

Les conditions aux limites en y de ce système, traduisant l’adhérence du fluide aux parois $y = 1$ et $y = -1$, s’écrivent : $u(x, 1) = u(x, -1) = v(x, 1) = v(x, -1) = 0$. On considère qu’à l’entrée du canal ($x = 0$) est imposé un profil de vitesse axiale $U_e(y)$ qui vérifie $U_e(1) = U_e(-1) = 0$ et $\int_{-1}^1 U_e(y) dy = 4/3$ (les perturbations de vitesses sont alors de débit nul).

L’objet de ce qui va suivre, concerne la détermination des solutions analytiques du système (1a,b). Pour ce faire, on y introduit, comme cela est le cas dans les travaux [7,8], la fonction de courant de la perturbation $\Psi_p(x, y) = \Phi(y) e^{-\alpha x}$ où le coefficient α est un réel positif. On obtient ainsi :

$$\Phi^{(3)}(y) + \alpha Re (1 - y^2) \Phi^{(1)}(y) + 2\alpha Re y \Phi(y) = e^{\alpha x} dp/dx \tag{2}$$

où $\Phi^{(i)}(y) = d^i \Phi(y) / dy^i$. Les conditions aux limites s’écrivent : $\Phi(1) = \Phi(-1) = 0$ et $\Phi^{(1)}(1) = \Phi^{(1)}(-1) = 0$. Cette équation où le second membre est obligatoirement constant ($= k$) permet d’écrire le gradient de pression de la perturbation sous la forme : $dp/dx = k e^{-\alpha x}$. Elle permet de plus, de vérifier que les profils de vitesses antisymétriques induits par la perturbation sont observés à des gradients de pression nuls pour celle-ci [7]. Enfin, en considérant la dérivée de cette équation, on obtient le problème aux valeurs pres suivant :

$$\Phi^{(4)}(y) + \alpha Re (1 - y^2) \Phi^{(2)}(y) + 2\alpha Re y \Phi(y) = 0 \tag{3}$$

dont la résolution, par des méthodes numériques, a déjà fait l’objet de nombreux travaux notamment dans [7,8].

Il a déjà été établi [9] que la solution analytique de cette équation peut s’écrire :

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(y) = & y \int_0^y t \Theta(t) dt - y \sqrt{\pi/2} \int_0^y F(t/\sqrt{2}) \Theta(t) (t^2 - 1) e^{-t^2/2} dt + 2c_1 y \\ & + \{ y \sqrt{\pi/2} F(y/\sqrt{2}) - e^{y^2/2} \} \left\{ c_2 + \int_0^y \Theta(t) (t^2 - 1) e^{-t^2/2} dt \right\} \end{aligned} \tag{4}$$

Tableau 1
Les valeurs propres $\alpha_i Re$ de l'Éq. (3)
Table 1
The eigenvalues $\alpha_i Re$ of Eq. (3)

Modes i	Antisymétriques	Symétriques
1	21,67960	28,22083
2	73,30818	86,28399
3	156,64606	175,93671
4	271,84257	297,34978
5	418,95346	450,60010
6	598,00650	635,73381
7	809,01696	852,77493
8	1051,99528	1101,74256
9	1326,94734	1382,64954
10	1633,87888	1695,50541
11	1972,79208	2040,31744
12	2343,69121	2417,09136

avec : $F(y/\sqrt{2}) = \sqrt{2/\pi} \int_0^y e^{t^2/2} dt$, c_1 et c_2 sont des constantes. L'expression de la fonction $\Theta(y)$ est :

$$\Theta(y) = k\beta^3 \sqrt{\pi/2} \left\{ \tilde{u}(a, y/\beta) \int_0^{y/\beta} t \tilde{v}(a, t) dt - \tilde{v}(a, y/\beta) \int_0^{y/\beta} t \tilde{u}(a, t) dt \right\} + d_1 \tilde{v}(a, y/\beta) + d_2 \tilde{u}(a, y/\beta) \quad (5)$$

où $a = -\sqrt{\alpha Re/4}$, $\beta = \sqrt{2}(\alpha Re)^{-1/4}/2$, $\tilde{u}(a, y/\beta)$ et $\tilde{v}(a, y/\beta)$ sont des fonctions cylindriques [13], d_1 et d_2 sont des constantes.

En conséquence, la perturbation de la vitesse axiale est : $u(x, y) = \Phi^{(1)}(y) e^{-\alpha x}$. Notons que ce profil est symétrique si $c_1 = 0$ et antisymétrique pour $c_2 = 0$.

L'indépendance des $\Phi_i^{(1)}(y)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) permet de dégager, grâce au procédé de Gram–Schmidt [14], deux bases de fonctions propres orthonormées symétriques $\Phi_{oi}^{(1)s}(y)$ et antisymétriques $\Phi_{oi}^{(1)as}(y)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) associées respectivement aux valeurs propres $\alpha_i^s Re$ et $\alpha_i^{as} Re$ que nous rappelons dans le Tableau 1.

Compte tenu de ceci et de la nature linéaire du système (1a,b), la composante axiale de la vitesse de la perturbation s'écrit :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \Phi_{oi}^{(1)s}(y) e^{-\alpha_i^s x} + \sum_{i=1}^n \beta_i \Phi_{oi}^{(1)as}(y) e^{-\alpha_i^{as} x} \quad (6)$$

où $\gamma_i = [\int_{-1}^1 u_e^s(y) \Phi_{oi}^{(1)s}(y) dy]/2$ et $\beta_i = [\int_{-1}^1 u_e^{as}(y) \Phi_{oi}^{(1)as}(y) dy]/2$. Les fonctions $u_e^s(y)$ et $u_e^{as}(y)$ sont respectivement définies par : $u_e^s(y) = [u(0, y) + u(0, -y)]/2$ et $u_e^{as}(y) = [u(0, y) - u(0, -y)]/2$. La solution complète de l'écoulement dans le canal s'écrit alors :

$$U(x, y) = 1 - y^2 + u(x, y) \quad (7)$$

Les écoulements ainsi définis sont de nature presque parallèles dans la mesure où, d'une part, la composante transversale V de la vitesse reste négligeable devant la composante axiale U et d'autre part, les variations de $\partial U/\partial x$ restent faibles devant 1 [15].

3. Etude de stabilité linéaire

Pour l'étude de la stabilité linéaire temporelle des écoulements d'entrée en canal définis dans la section précédente dont la vitesse axiale U est donnée par l'Éq. (7), nous posons : $\tilde{U} = U + u'$, $\tilde{V} = v'$ et $\tilde{P} = P + p'$

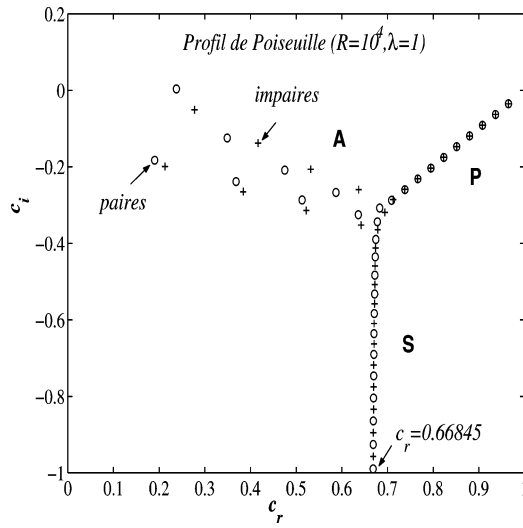


Fig. 1. Spectre de l'écoulement de Poiseuille.
 Fig. 1. The spectrum for plane Poiseuille flow.

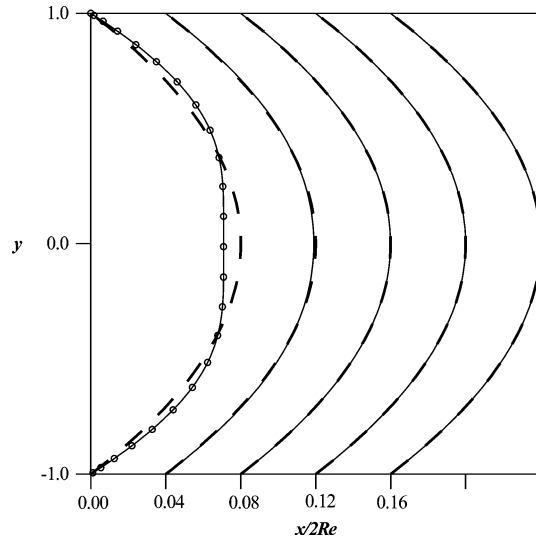


Fig. 2. Evolution de l'écoulement 1 dans la zone d'entrée.
 — : $U(x, y)$, - - - : $U_p(y)$, o o o : $U(0, y)$ imposé.
 Fig. 2. Evolution of the flow 1 in the entry zone.

où $u' = \partial H / \partial y$, $v' = -\partial H / \partial x$ et p' définissent respectivement les perturbations faibles en terme de stabilité de la vitesse axiale, transversale et de la pression. L'analyse en modes normaux de ce problème de stabilité ($H(x, y, t) = G(y) e^{i\lambda(x-ct)}$) conduit à l'équation d'Orr–Sommerfeld suivante :

$$AG = cBG, \quad G(\pm 1) = D^1 G(\pm 1) = 0 \tag{8}$$

où $A = R^{-1}(D^2 - \lambda^2)^2 - i\lambda U(D^2 - \lambda^2) + i\lambda D^2 U$, $B = -i\lambda(D^2 - \lambda^2)$ et $D^{(i)} = d^i / dy^i$. λ (réel positif) et c (complexe = $c_r + ic_i$) définissent respectivement le nombre d'ondes et la vitesse de propagation. Notons au passage que le nombre de Reynolds R correspondant à ces perturbations est, de façon similaire à celle développée plus haut, défini par $R = U_0 h^2 / L_1 \nu$ où L_1 est la longueur axiale caractéristique de la perturbation en terme de stabilité et U_0 la vitesse moyenne de l'écoulement de base. Par ailleurs, pour nous placer dans le cadre le plus général des perturbations de nature bidimensionnelles, on considère le cas où $L_1 = h$ [15]. Ceci mène donc à la définition suivante du nombre de Reynolds $R = U_0 h / \nu$.

Pour la résolution de l'Éq. (8), nous utilisons la méthode spectrale de collocation de Chebyshev. Des précisions concernant cette méthode sont explicitées dans l'ouvrage de Canuto et al. [11].

Dans le but de valider le code de calcul nous avons considéré le cas où l'écoulement de base est celui de Poiseuille. Dans ce cadre, le tracé de la courbe de stabilité marginale permet, lorsque le nombre N de noeuds de Chebyshev est égal à 80, de retrouver le résultat classique pour cet écoulement portant sur les valeurs du nombre de Reynolds critique R_c et du nombre d'ondes λ_c correspondant ($R_c = 5772,2223$; $\lambda_c = 1,02055$). Par ailleurs et pour le cas où $R = 10^4$ et $\lambda = 1$, nous retrouvons, lorsque $N = 100$, les résultats du Tableau 5 d'Orszag [12] en plus de la valeur propre extra correspondant à $c = 0,2127257823 - 0,1993606947i$ qui est de nature impaire et dont l'existence a déjà été signalée par Dongarra et al. [16] (cf. Fig. 1).

4. Résultats et discussion

(i) Pour l'illustration proprement dite des résultats de l'analyse de stabilité concernant les écoulements symétriques en zone de rétablissement, nous considérons les deux profils d'entrée, représentés sur les Figs. 2 et 3 et pour

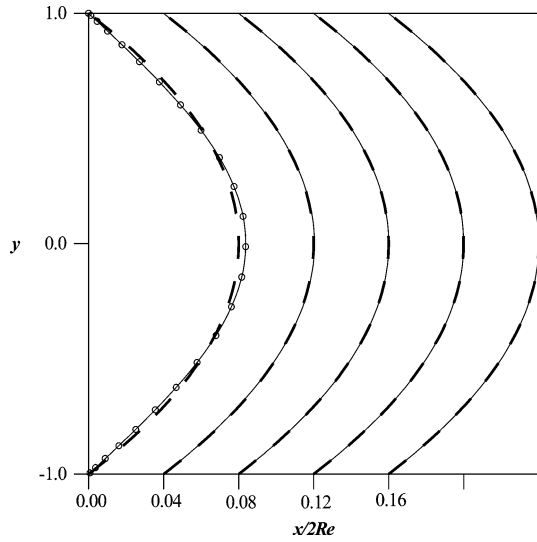


Fig. 3. Evolution de l'écoulement 2 dans la zone d'entrée lorsque $U(0, y) = -(\pi/3) \cos[\pi(1 - y/2)]$ est imposé. — : $U(x, y)$, - - - : $U_p(y)$, o o o : $U(0, y)$ imposé.

Fig. 3. Evolution of the flow 2 in the entry zone when the profile $U(0, y) = -(\pi/3) \cos[\pi(1 - y/2)]$ is imposed.

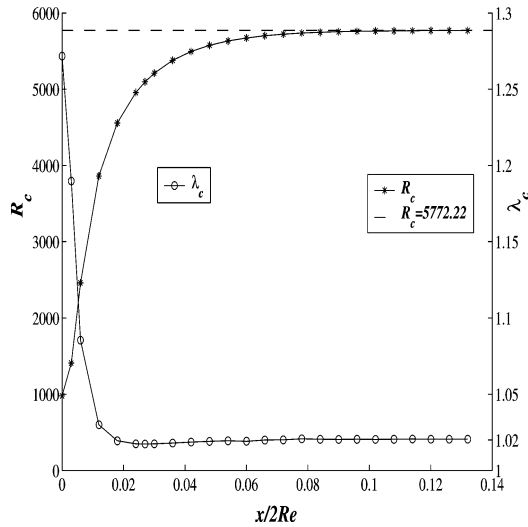


Fig. 5. Evolution axiale des nombres de Reynolds et d'onde critiques pour l'écoulement 2.

Fig. 5. Critical Reynolds and wave numbers axial distribution for the flow 2.

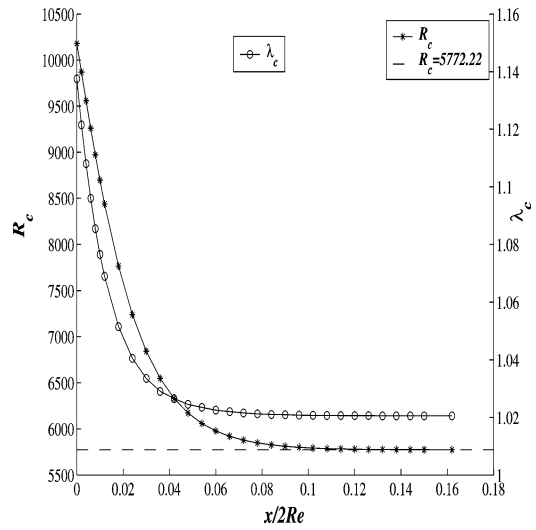


Fig. 4. Evolution axiale des nombres de Reynolds et d'onde critiques pour l'écoulement 1.

Fig. 4. Critical Reynolds and wave numbers axial distribution for the flow 1.

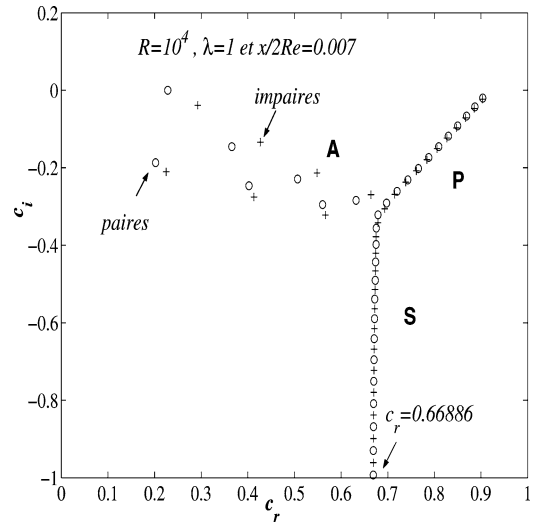


Fig. 6. Spectre des valeurs propres de l'écoulement 1 à $x/2Re = 0.007$.

Fig. 6. The eigenvalue spectrum for the flow 1 at $x/2Re = 0.007$.

lesquels les évolutions axiales sont naturellement déterminées à partir de l'Éq. (7). Pour ces deux écoulements (que nous identifions dans la suite par écoulements 1 et 2), le tracé des courbes de variation des nombres de Reynolds critiques R_c en fonction de $x/2Re$ permet de vérifier que le premier est plus stable que l'écoulement de Poiseuille

Tableau 2

Evolution des grandes valeurs de c_i pour les écoulements 1 et 2 lorsque $R = 10^4$ et $\lambda = 1$

Table 2

The evolution of great values of c_i for flows 1 and 2 when $R = 10^4$ and $\lambda = 1$

$x/2Re$	c_{i1}	c_{i2}	c_{ip}
0.001	-0.002164765	0.011518739	0.003739670
0.003	-0.001328792	0.006866078	-
0.005	-0.000607159	0.005468621	-
0.007	+0.000013523	0.004881740	-
0.009	+0.000545831	0.004580653	-
0.011	+0.001001405	0.004404140	-
0.013	+0.001390637	0.004289672	-

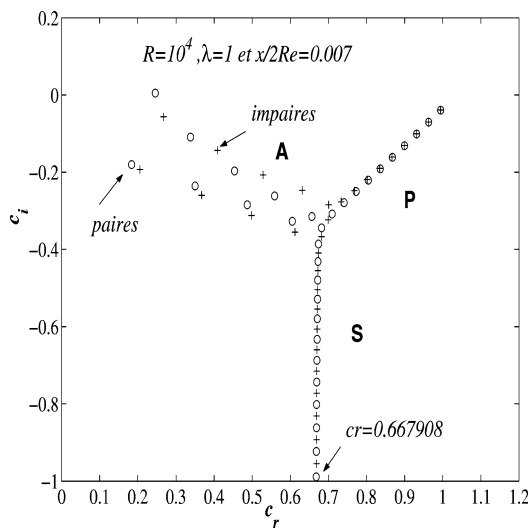


Fig. 7. Spectre des valeurs propres de l'écoulement 2 à $x/2Re = 0.007$.

Fig. 7. The eigenvalue spectrum for the flow 2 at $x/2Re = 0.007$.

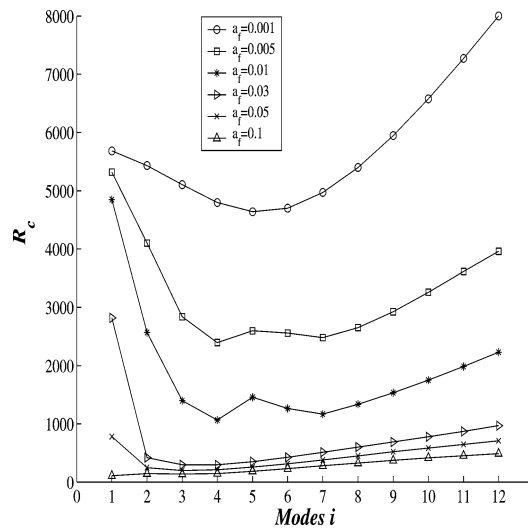


Fig. 8. Stabilité des douze premiers modes symétriques superposés séparément au profil de Poiseuille lorsque $0.001 \leq a_f \leq 0.1$.

Fig. 8. Stability of the first twelve symmetrical eigenmodes superposed separately to Poiseuille profile when $0.001 \leq a_f \leq 0.1$.

alors que le second l'est moins (cf. Figs. 4 et 5). Ceci permet de mettre en évidence l'influence de la forme du profil à l'entrée sur la stabilité de l'écoulement.

(ii) Pour une étude plus détaillée de ce problème de stabilité, et dans le but de pouvoir se référer aux résultats correspondants à l'écoulement de Poiseuille en canal [12,16], nous considérons les spectres de ces deux écoulements lorsque $R = 10^4$ et $\lambda = 1$. L'analyse de ces spectres, lorsque $c_i \in [-1, 0.2]$ et $c_r \in [0, 1]$, permet de dégager un ensemble de remarques dont notamment le fait que le deuxième profil est instable depuis l'entrée alors que le premier ne le devient qu'à partir de $x/2Re = 0,007$. Ce résultat peut être constaté sur le Tableau 2 où nous avons reporté les évolutions, en zone d'entrée, des valeurs, les plus grandes, de c_i pour chacun de ces écoulements ainsi que leur équivalent c_{ip} pour le profil de Poiseuille. Par ailleurs, la représentation de ces spectres pour $x/2Re = 0,007$ (cf. Figs. 6 et 7) permet de constater que dans le cas du premier écoulement (respectivement du deuxième écoulement), la branche S tend vers celle de Poiseuille par valeur supérieure (respectivement par valeur inférieure). Enfin et pour cette même station, nous observons que la dégénérescence de la branche P correspondant

à l'écoulement 1 est à peine entamée alors que pour l'écoulement 2, elle est presque complète. Ces remarques sont en accord avec la conclusion dégagée dans le paragraphe précédent et constituent une description qualitative de ce problème de stabilité.

(iii) Dans une dernière étape et pour cerner l'influence de chacun des modes symétriques $\Phi_{oi}^{(1)s}(y)$ ($i = 1, 2, \dots, 12$) de perturbation du profil de Poiseuille sur la stabilité des écoulements en zone d'entrée du canal, nous avons considéré les cas où chacun de ces modes, que nous avons pondéré d'un coefficient d'amplification réel et positif a_f , est superposé séparément à l'écoulement de Poiseuille. Les calculs montrent que leur stabilité dépend de leur rang et du coefficient a_f qui leur est associé (cf. Fig. 8). Nous vérifions en particulier que le nombre de Reynolds critique pour chaque mode diminue lorsque son amplitude a_f augmente. Notons à ce niveau que le fait de considérer une distribution discrète des valeurs de a_f permet d'une part, d'envisager la possibilité d'étudier la stabilité de profils de vitesses en zone d'établissement autres que ceux considérés plus haut et d'autre part, de disposer d'un protocole de contrôle des écoulements symétriques en zone d'entrée.

5. Conclusion

Dans cette étude, nous avons mis en évidence l'intérêt de la disponibilité de solutions analytiques des écoulements d'entrée en canal pour l'étude de leur stabilité. Les résultats présentés permettent de relever l'influence de la forme des profils considérés sur l'apparition des instabilités en zone d'établissement. Par ailleurs, nous sommes en mesure de caractériser, et par la suite de contrôler l'apport de chaque mode de perturbation symétrique du profil de Poiseuille dans ce processus. Enfin, et contrairement au cas des écoulements d'entrée en conduite où l'on se limite aux profils de Sparrow et de Hornbeck, il est possible d'envisager, à partir de nos résultats, un spectre suffisamment large de profils d'entrée en canal et d'étudier leur stabilité.

Références

- [1] L.M. Huang, T.S. Chen, Stability of developing pipe flow, *Phys. Fluids* 17 (1974) 245–247.
- [2] T. Tatsumi, Stability of the laminar inlet-flow prior to the formation of Poiseuille regime I & II, *J. Phys. Soc. Japan* 7 (5) (1952) 489–502.
- [3] T. Sarpkaya, A note on stability of developing laminar pipe flow subjected to axisymmetric and non-axisymmetric disturbances, *J. Fluid Mech.* 68 (2) (1975) 345–351.
- [4] V.K. Garg, Stability of developing flow in a pipe: non-axisymmetric disturbances, *J. Fluid Mech.* 110 (1) (1981) 209–216.
- [5] S.C. Gupta, V.K. Garg, Effect of velocity distribution on the stability of developing flow in a pipe, *Phys. Fluids* 24 (1981) 576–578.
- [6] D.F. Da Silva, E.A. Moss, The stability of pipe flows subjected to axisymmetric disturbances, *J. Fluids Engrg.* 116 (1994) 61–65.
- [7] A. Kumar, K.S. Yajnik, Internal separated flows at large Reynolds number, *J. Fluid Mech.* 97 (1) (1980) 27–51.
- [8] R.M. Sadri, J.M. Floryan, Entry flow in a channel, *Comput. Fluids* 31 (2002) 133–157.
- [9] A. Hifdi, J. Khalid-Naciri, Étude analytique de perturbations de l'écoulement de Poiseuille, *C. R. Mecanique* 332 (2004) 241–248.
- [10] A. Benjelloun, J. Khalid Naciri, M. Mafkhari, M. Ouazzani-Touhami, Étude analytique de l'écoulement dans une conduite déformée, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Iib* 327 (1999) 759–764.
- [11] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1988, p. 69.
- [12] S.A. Orszag, Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation, *J. Fluid Mech.* 50 (4) (1971) 689–703.
- [13] M. Abramowitz, I.A. Stegun, in: *Appl. Math. Ser.*, vol. 55, National Bureau of Standards, Washington, 1964, p. 687.
- [14] A. Nikiforov, V. Ouvarov, *Eléments de la théorie des fonctions spéciales*, Mir, Moscou, 1968, p. 31.
- [15] P.G. Drazin, W.H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981, p. 154.
- [16] J.J. Dongarra, B. Straughan, D.W. Walker, Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamics stability problems, *J. Appl. Numer. Math.* 22 (4) (1996) 399–435.