



Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 332 (2004) 927–932



<http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/>

Une comparaison des schémas d'intégration temporelle explicites de Chung–Lee et Tchamwa–Wielgosz

Vincent Grolleau*, Anthony Soive, Gérard Rio

Laboratoire LG2M, université de Bretagne Sud, rue de St Maudé, 56321 Lorient, France

Reçu le 9 juillet 2003 ; accepté après révision le 6 juillet 2004

Disponible sur Internet le 9 septembre 2004

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Les simulations numériques par éléments finis de structures en régime dynamique utilisant des schémas d'intégration temporelle explicites à un pas nécessitent de filtrer les hautes fréquences parasites qui perturbent la réponse calculée. Ces dix dernières années, des auteurs ont proposé différents schémas d'intégration explicites à amortissement contrôlable. Nous présentons les résultats de l'étude de la consistance et de la stabilité du schéma de Tchamwa–Wielgosz dans les cas linéaires amortis et non amortis. Puis, nous comparons des résultats de simulation obtenus avec ce dernier et le schéma proposé par Chung–Lee. **Pour citer cet article :** V. Grolleau et al., *C. R. Mecanique* 332 (2004).

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A comparison between the Tchamwa–Wielgosz and the Chung–Lee explicit time integration algorithms. Numerous effort during the past ten years have focused on developing explicit time integration algorithms for structural dynamics that include controllable numerical dissipation of the spurious oscillations. Stability and consistency of the Tchamwa–Wielgosz algorithm are analysed for the linear damped/undamped cases. Furthermore, numerical results are compared for this algorithm and the Chung–Lee explicit method. **To cite this article:** V. Grolleau et al., *C. R. Mecanique* 332 (2004).

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; Explicite ; Eléments finis ; Bruit numérique ; Amortissement ; Dynamique

Keywords: Computational solid mechanics; Explicite; Finite element; Numerical noise; Dissipation; Dynamics

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : vincent.grolleau@univ-ubs.fr (V. Grolleau), lg2m@univ-ubs.fr (A. Soive), gerard.rio@univ-ubs.fr (G. Rio).

Abridged English version

Finite element methods have been widely used to obtain numerical solutions from structural dynamics problems. Numerous efforts during the past ten years have focused on developing single step explicit time integration algorithms for structural dynamics that include controllable numerical dissipation in the high frequency domain. The aim of this dissipation is to reduce spurious oscillations that occur due to spatial discretisation. Among these algorithms, we focus on the least known of them, the Tchamwa–Wielgosz algorithm, presented in Eq. (1). Consistency of the Tchamwa–Wielgosz algorithm leads to the reduction from four to only one parameter, called ϕ , to control the numerical scheme. Stability analysis is performed following Hughes [6], applying the equations to a single degree of freedom problem and assuming a Rayleigh damping. The amplification matrix A is then defined and a modal decomposition procedure yields the results presented in Table 1. A mechanical interpretation of the damping property is proposed, Eq. (3). Twamwa–Wielgosz and Chung–Lee algorithms are compared in the case of a simple free-fixed elastic truss bar, meshed with a hundred linear elements. A constant load is applied to the free end of the bar ($x = 0$) and the velocity of the point ($x = 34$ mm) is plotted Fig. 1 for different ϕ values, showing the damping properties of the Tchamwa–Wielgosz algorithm.

1. Introduction

Les simulations numériques par éléments finis du comportement de structures en régime dynamique comme le choc ou la mise en forme sont le siège de nombreuses perturbations dont l'origine est purement numérique. Citons comme exemple les réflexions d'ondes mécaniques qui interviennent aux changements de tailles d'éléments. Certes, une attention particulière peut être portée aux formes de la discrétisation spatiale et du chargement de la structure pour réduire ces perturbations dans des cas académiques notamment unidimensionnels et élastiques. Mais l'utilisateur qui, par exemple, met en oeuvre une simulation multi-dimensionnelle avec des contacts à gérer entre solides déformables est contraint à l'utilisation d'outils d'amortissement. Les codes de calculs industriels proposent ainsi d'introduire une part de comportement visqueux dans les simulations sous le nom de *bulk viscosity*, ou de filtrer la réponse finale du calcul.

Si les méthodes d'intégration temporelle explicites ont connu un essor important depuis plusieurs décennies, ce n'est que récemment, depuis 1993, que différents auteurs ont proposé des algorithmes d'intégration temporelle explicites à un pas dont les propriétés d'amortissement constituent autant d'alternatives intéressantes aux méthodes classiques. Ainsi, Hulbert et Chung [1], Zhai [2], Chung et Lee [3], et enfin Tchamwa et Wielgosz [4] ont proposé des algorithmes amortissants; mais seuls ces deux derniers présentent la caractéristique d'offrir un coefficient d'ajustement variable de l'amortissement et c'est pourquoi cette étude se focalise sur ces schémas.

Pour écrire l'équation d'équilibre classique obtenue à partir de l'expression des puissances virtuelles, nous noterons dans ce qui suit M la matrice masse, q les *ddl* du système qui sont ici les positions nodales, \dot{q} et \ddot{q} leurs dérivées première et seconde par rapport au temps, $\mathcal{R}_{\text{int}}(q, \dot{q})$ les efforts intérieurs et $\mathcal{R}_{\text{ext}}(q, \dot{q})$ les efforts extérieurs. Le temps est discrétisé en pas de temps $\Delta t = h$ et l'indice n correspond au temps $t = nh$.

2. Présentation du schéma de Chung–Lee

C'est en 1993 que Chung et Lee [3] proposent leur nouvel algorithme d'intégration dont la précision est du second ordre. Dès lors qu'une matrice masse diagonale est utilisée, cet algorithme a pour avantage de rester purement explicite, et ce dans tous les cas complexes de comportement non linéaire comme la visco-plasticité et lors de grandes transformations. Chung et Lee proposent la discrétisation temporelle :

$$M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{\text{int}}(q_n, \dot{q}_n) = \mathcal{R}_{\text{ext}}(q_n, \dot{q}_n) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h(\hat{\gamma}\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1}) \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + h^2(\hat{\beta}\ddot{q}_n + \beta\ddot{q}_{n+1}) \end{cases}$$

L'écriture de ce schéma se caractérise par le choix d'exprimer les forces intérieures et extérieures au pas de temps n et non $(n + 1)$ comme cela est le cas dans le schéma de Newmark. En ce qui concerne les paramètres du schéma, les auteurs montrent que le choix optimal est obtenu lorsque $\hat{\beta} = \frac{1}{2} - \beta$, $\hat{\gamma} = 1 - \gamma$ et $\gamma = \frac{3}{2}$; ce qui ne laisse qu'un seul paramètre de contrôle β . Finalement, les études de consistance et stabilité [3] conduisent à une petite plage d'utilisation de la valeur du paramètre $\beta : \beta \in [1; \frac{28}{27}]$.

3. Présentation du schéma de Tchamwa–Wielgosz

Si les algorithmes de Chung–Lee et de Zhai sont des formes particulières de la méthode beta-m, qui est une généralisation de la méthode de Newmark [5], ce n'est pas le cas pour celui proposé par Tchamwa et Wielgosz en 1997 [4] pour résoudre l'équation d'équilibre :

$$M\ddot{q}_{n+1} + \mathcal{R}_{\text{int}}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) = \mathcal{R}_{\text{ext}}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \lambda h \ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + \alpha h \dot{q}_n + \beta h^2 \ddot{q}_n + \gamma h \dot{q}_{n+1} \end{cases} \quad (1)$$

3.1. Consistance

Soit $u_n^T = [\dot{q}_n, q_n]$, l'approximation de la solution exacte $u(t_n)$. Le schéma d'intégration est consistant si : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \dot{u}_n$.

En remarquant que $\lim_{h \rightarrow 0} (\alpha \dot{q}_n + \gamma \dot{q}_{n+1} + h\beta \ddot{q}_n) = (\alpha + \gamma) \dot{q}_n$, l'étude de consistance conduit aux relations $\lambda = 1$ et $\alpha + \gamma = 1$. Ainsi, de quatre paramètres, le nombre est finalement réduit à un seul, noté $\phi = \beta + \gamma$.

3.2. Stabilité

La présente étude de stabilité est basée sur la méthode que propose Hughes [6]. Les résultats sont légèrement différents de ceux obtenus par Tchamwa en utilisant la méthode décrite par Chung et Lee [3]. D'une manière classique, nous nous plaçons dans un cadre linéarisé. En notant q le déplacement nodal, M la matrice masse, C la matrice d'amortissement, K la matrice de raideur et F l'effort extérieur, l'algorithme de Tchamwa devient après discrétisation temporelle :

$$M\ddot{q}_{n+1} + C\dot{q}_{n+1} + Kq_{n+1} = F_{n+1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h\ddot{q}_n \\ q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \phi h^2 \ddot{q}_n \end{cases} \quad (2)$$

En supposant un amortissement de type Rayleigh, c'est-à-dire en supposant que C est une combinaison linéaire des matrices M et K et en faisant la décomposition modale de l'équation d'équilibre, le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \ddot{q}_{n+1} + 2\xi\omega\dot{q}_{n+1} + \omega^2q_{n+1} = F_{n+1} \\ u_{n+1} = Au_n + L_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 - 2\xi h\omega & -h\omega^2 \\ h(1 - 2\xi h\omega) & 1 - \phi h^2\omega^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_n = \begin{pmatrix} hF_n \\ \phi h^2F_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

où A est la matrice d'amplification et L_n le vecteur de chargement. En exprimant la solution exacte comme : $u(t_{n+1}) = Au(t_n) + L_n + \tau(t_n)$ où $\tau(t_n)$ est l'erreur de troncature locale ; la différence entre la solution exacte et la solution discrétisée, en supposant nulle l'erreur initiale $e(t_0)$, est alors :

$$e(t_{n+1}) = u(t_{n+1}) - u_{n+1} = A(u(t_n) - u_n) + \tau(t_n) = \sum_{i=0}^n A^i \tau(t_{n-i})$$

Le schéma numérique est stable si il existe un pas d'intégration $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in [0, h_0]$, une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant t_n n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état u_{n+j} calculé à un instant ultérieur t_{n+j} . Il faut alors que le rayon spectral $\rho(A)$ soit strictement inférieur à 1. Les valeurs propres

Tableau 1
Conditions de stabilité du schéma de Tchamwa–Wielgosz

Conditions sur ϕ	Conditions sur ξ	Stabilité
$\phi \geq 1$	$\xi = 0$ (non amorti)	$\Omega < \sqrt{2/(\phi - \frac{1}{2})}$
$\phi = 1 - \frac{2\xi}{\Omega^2}$	$\forall \xi$	$\Omega < 2$
$\phi < \frac{1}{2}$	$\xi \leq \sqrt{1 - 2\phi}$	inconditionnelle
$\phi > 1$	$\forall \xi$	$\Omega \leq (-\xi + \sqrt{\xi^2 + 2(\phi - \frac{1}{2})})/(\phi - \frac{1}{2})$
$\phi > 1 - \frac{2\xi}{\Omega^2}$	$\forall \xi$	$\Omega \leq (-\xi + \sqrt{\xi^2 + 2(\phi - \frac{1}{2})})/(\phi - \frac{1}{2})$
$\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$	$\xi \leq \sqrt{2(1 - \phi)}$	inconditionnelle
	$\xi > \sqrt{2(1 - \phi)}$	$\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 2(1 - \phi)}}{1 - \phi} \leq \Omega \leq \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 2(1 - \phi)}}{1 - \phi}$

de A sont $\lambda_{1,2} = A_1 \mp \sqrt{A_1^2 - A_2}$, avec $A_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(A)$ et $A_2 = \det(A)$. En notant $\Omega = h\omega$, et en faisant la même étude de stabilité que celle proposée par Hughes ([6]), on peut montrer que le schéma numérique est stable s’il répond aux critères suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{A_2 + 1}{2} \leq A_1 \leq \frac{A_2 + 1}{2} \\ -1 \leq A_2 < 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2 = 1 \\ -1 < A_1 < 1 \end{array} \right. \quad \text{avec :} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 1 - \xi\Omega - \frac{\phi}{2}\Omega^2 \\ A_2 = 1 - 2\xi\Omega + (1 - \phi)\Omega^2 \\ \frac{A_2 + 1}{2} = A_1 + \frac{1}{2}\Omega^2 \end{array} \right.$$

Le Tableau 1 résume les résultats obtenus ; où l’on remarque que sans amortissement, la condition de stabilité est légèrement plus stricte qu’avec le schéma des différences centrées qui conduit à $\Omega \leq 2$.

3.3. Interprétation mécanique de l’algorithme de Tchamwa–Wielgosz

Il est intéressant d’obtenir une interprétation mécanique de l’effet amortissant de l’algorithme étudié. L’équation de base de la méthode des différences centrées (DC) s’écrit

$$h^2 \ddot{q}_n^{(DC)} = q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}$$

et l’équation (2) exprimant q_{n+1} , en considérant l’expression $h\dot{q}_n = q_n - q_{n-1}$, permet d’obtenir une expression de l’accélération $\ddot{q}_n^{(TW)}$ sous la même forme, au coefficient ϕ près, ce qui permet d’écrire :

$$\ddot{q}_n^{(TW)} = \ddot{q}_n^{(DC)} / \phi, \quad \text{soit, si } \phi \text{ est proche de } 1 : \quad M\ddot{q}_n^{(TW)} - M\ddot{q}_n^{(DC)} \approx (1 - \phi)M\ddot{q}_n^{(DC)} \tag{3}$$

La réponse est donc d’autant plus amortie que le terme d’accélération est grand, c’est-à-dire lors d’oscillations à hautes fréquences. Le terme supplémentaire dû à l’algorithme pouvant être interprété comme une raideur numérique qui s’oppose à la raideur du matériau. Cette expression montre également que le schéma de Tchamwa–Wielgosz est précis au second ordre à la valeur $(\phi - 1)\ddot{q}$ près, qui reste faible dans la mesure où les valeurs usuelles de ϕ restent inférieures à 1.1.

4. Comparaison des algorithmes de Chung–Lee et Tchamwa–Wielgosz

Considérons le problème mono-dimensionnel d’une barre de longueur $L = n_e l = 200$ mm et de masse volumique $\rho = 10^{-9}$ ton/mm³ au comportement élastique linéaire (module d’Young $E = 100$ GPa), encadrée au noeud 1 situé en $x = 0$ et soumise à un créneau de contrainte $\sigma = 100$ MPa en son extrémité libre. La barre

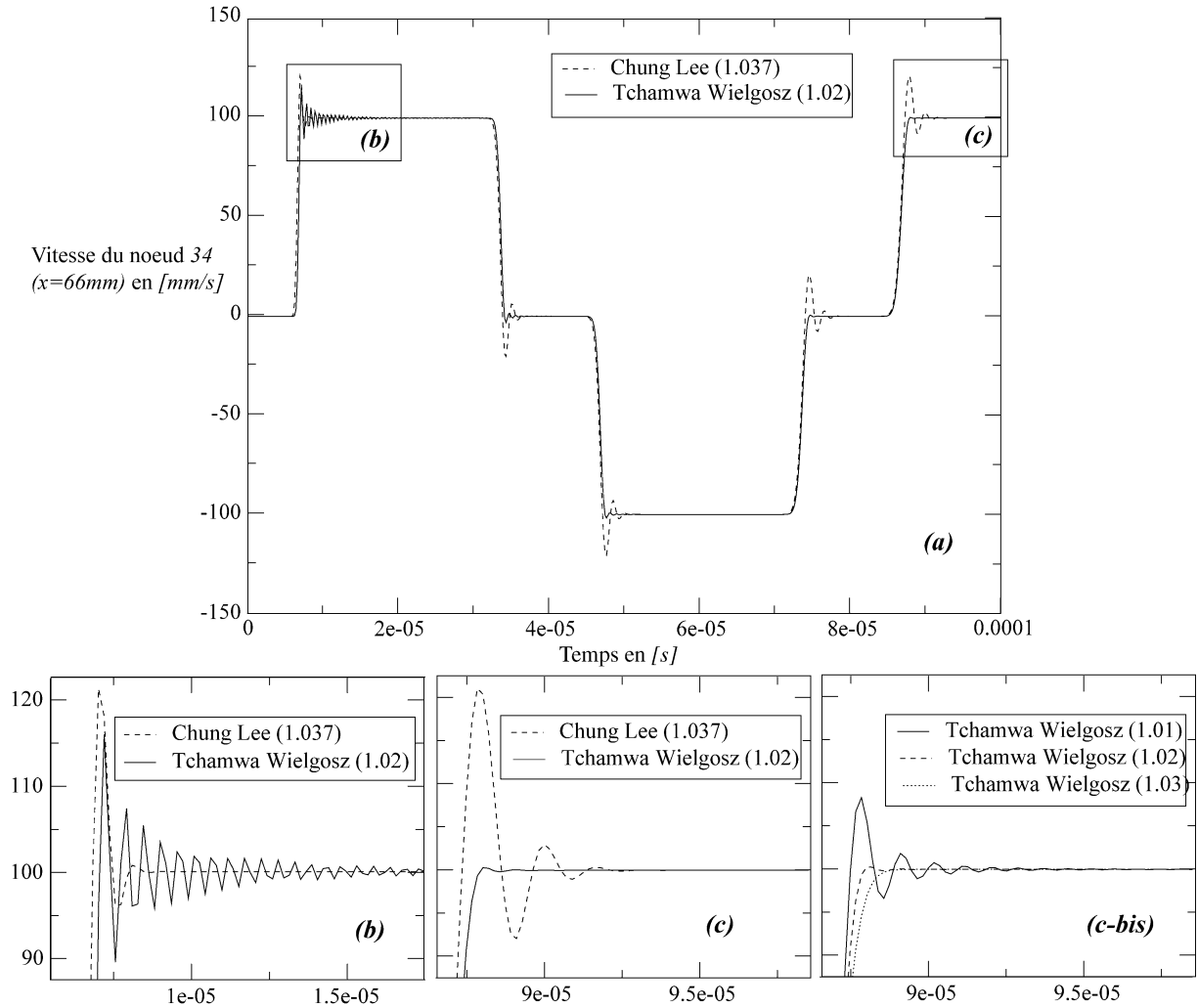


Fig. 1. Vitesse du noeud 34 ($x = 66$ mm) d'une barre encastree soumise à une force constante. Comparaison des schémas temporels sur un maillage homogène. Les créneaux de vitesse (+100 mm/s) de la réponse théorique débutent aux instants 6,6 et 86,6 μ s ((b), (c), (c-bis)).

est maillée de façon homogène avec $n_e = 100$ éléments linéaires et le pas de temps du calcul est fixé à $0,9\Delta t_c$ ($\Delta t_c = l\sqrt{\rho/E}$ est le pas de temps critique). Les calculs sont réalisés avec le code HEREZH++ développé au laboratoire LG2M de l'UBS [7].

Observons le déplacement du noeud 34 situé initialement en $x = 66$ mm. Les réponses obtenues avec les schémas de Chung–Lee et Tchamwa–Wielgosz sont visibles Fig. 1 (a), (b), (c) et (c-bis) pour différents coefficients. Pour ce problème, la solution théorique du système continu est en créneau de vitesse d'amplitude $v_{th} = \sigma/\sqrt{E\rho} = \pm 100$ mm/s, vitesses atteintes aux instants 6,6, 46,6 et 86,6 μ s, Fig. 1. Avec le schéma d'intégration en différences finies centrées, la réponse en vitesse oscille autour de la valeur théorique avec une amplitude comprise entre 50 et 15 mm/s sur la période de temps observée Fig. 1(a). Cette figure montre ainsi clairement l'effet amortissant des schémas présentés. Les Figs. 1(b) et 1(c) mettent en évidence la différence de comportement dans le temps des deux schémas amortissants, le schéma de Chung–Lee laissant se propager une perturbation d'amplitude constante, au contraire du schéma de Tchamwa–Wielgosz. Enfin, le réglage du caractère amortissant

de ce dernier par le paramètre ϕ est mis en évidence Fig. 1(c-bis). Soulignons enfin que les conclusions sont les mêmes pour les cas bi-dimensionnels que nous avons étudiés, notamment celui du chargement latéral d'une plaque.

5. Conclusion

Nous avons présenté les conditions de convergence du nouvel algorithme proposé par Tchamwa et Wielgosz [4] en 1997 en adoptant la méthode utilisée par Hughes [6]. L'effet amortissant de cet algorithme sur les plus hautes fréquences est montré sur un cas simple et une interprétation mécanique en est proposée. Cet amortissement est comparé à celui obtenu avec le schéma de Chung–Lee et présente des propriétés intéressantes pour tenter d'amortir les fréquences parasites dues à la discrétisation spatiale.

Remerciement

Les auteurs tiennent à remercier chaleureusement M. le Pr. Christian Wielgosz, de l'Université de Nantes, pour l'attention qu'il a bien voulu porter à ce travail.

Références

- [1] G.M. Hulbert, J. Chung, Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 137 (1996) 175–188.
- [2] W.M. Zhai, Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 39 (1996) 4199–4214.
- [3] J. Chung, J.M. Lee, A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 37 (1994) 3961–3976.
- [4] B. Tchamwa, Contribution à l'étude des méthodes d'intégration directe explicites en dynamique non linéaire des structures, Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 1997.
- [5] M.G. Katona, O.C. Zienkiewicz, A unified set of single step algorithms. Part 3: The beta-m method, a generalization of the Newmark scheme, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 21 (1985) 1345–1359.
- [6] T.J.R. Hughes, Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior, *Comput. Meth. Transient Analysis* 1 (1983) 67–155.
- [7] <http://www-lg2m.univ-ubs.fr>, Laboratoire LG2M, Université de Bretagne Sud.