Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 332 (2004) 881–886

COMPTES RENDUS
MECANIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Quelques modèles diffusifs capillaires de type Korteweg

Didier Bresch [a,*], Benoît Desjardins [b,c]

[a] *LMC-IMAG UMR5223, 51, rue des mathématiques, B.P. 53, 38041 Grenoble, France*
[b] *CEA/DIF, B.P. 12, 91680 Bruyères le Châtel, France*
[c] *DMA E.N.S. Ulm, 45, rue d'Ulm, 75230 Paris cedex 05, France*

Reçu le 10 février 2004 ; accepté après révision le 6 juillet 2004

Disponible sur Internet le 9 septembre 2004

Présenté par Gérard Iooss

Résumé

Le but de cette Note est de proposer de nouveaux modèles diffusifs capillaires de type Korteweg et d'analyser leurs propriétés mathématiques. Plus précisemment, on propose quelques modèles visqueux qui fournissent une information supplémentaire sur le comportement de la densité au voisinage du vide. On prouve en fait qu'une certaine relation de compatibilité entre la diffusion et la capillarité induit de la régularité sur une quantité liée à la densité. On obtient ainsi une égalité non triviale provenant de la structure particulière de l'équation de quantité de mouvement. Cette Note étend des travaux précédents réalisés par les auteurs sur le modèle de Korteweg (avec coefficient de capillarité constante) et sur les équations de Saint-Venant avec tension de surface. ***Pour citer cet article : D. Bresch, B. Desjardins, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Abstract

Some diffusive capillary models of Korteweg type. The purpose of this Note is to propose new diffusive capillary models of Korteweg type and discuss their mathematical properties. More precisely, we introduce viscous models which provide some additional information on the behavior of the density close to vacuum. We actually prove that if some compatibility conditions between diffusion and capillarity are satisfied, some extra regularity information on a quantity involving the density is available. We obtain a non-trivial equality deduced from the special structure of the momentum equation. This Note generalizes to some extent the authors' previous works on the Korteweg model (with constant capillary coefficient) and on the shallow water equation. ***To cite this article: D. Bresch, B. Desjardins, C. R. Mecanique 332 (2004).***

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Modèles d'interface diffuse ; Modèles de type Korteweg ; Estimations d'énergie ; Modèles compressibles

Keywords: Computational fluid mechanics; Diffuse interface models; Korteweg models; Energy estimates; Compressible flows

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : Didier.bresch@imag.fr (D. Bresch), Benoit.Desjardins@cea.fr (B. Desjardins).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2004.07.003

Abridged English version

Classical models of fluid–fluid systems treat the interfacial region between two fluids as an infinitely thin, or sharp, dividing surface and endow it with properties such as surface tension. The equations of motion are solved in separate domains and the interface, where appropriate boundary conditions are applied, must be tracked explicitly. In diffuse-interface theory, the interfacial region is represented by continuous variations of an order parameter such as the density in a way consistent with microscopic theories on the interface. The excess quantities, rather than being defined on a two-dimensional surface, are distributed throughout a three-dimensional layer. The equations of motion, modified to take account of the presence of this layer, apply over the entire domain. The formulation of the theory of capillarity with diffuse interfaces was first introduced by Korteweg a century ago, [1]. In [2], they give the formulation of such Korteweg system and formally prove that asymptotically the diffuse-interface equations represent the classical, sharp-interface system. In an appendix, they formulate general diffuse-interface equations that account for thermal and viscous dissipation. The purpose of this note is to propose and discuss new diffusive capillary models of Korteweg type. More precisely, we prove that particular viscous capillary models exhibit some additional information on the density. That means we prove that if some compatibility conditions between diffusion and capillarity are satisfied, then we can obtain an information on an extra velocity depending on the density gradient. This extra regularity may allow us to control the degeneracy of the models close to vacuum as in [3–5]. The reader interested by a pioneering paper on capillary models is referred to [1]. See [2] for a complete review paper. In this Note, we consider, in a periodic domain $\Omega = T^N$ (N being the space dimension), the following compressible system

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - 2\operatorname{div}\bigl(\mu(\rho)D(u)\bigr) - \nabla\bigl(\lambda(\rho)\operatorname{div} u\bigr) - \sigma\rho\nabla\bigl(\Psi'(\rho)\Delta\Psi(\rho)\bigr) + \nabla P = 0 \tag{2}$$

where $D(u) = (\nabla u + {}^t\nabla u)/2$, σ is a positive constant surface tension coefficient, and

$$\mu(\rho) = \mu_1\Psi(\rho), \qquad \lambda(\rho) = 2\mu_1\bigl(\rho\Psi'(\rho) - \Psi(\rho)\bigr)$$

for some positive constant μ_1 and with Ψ a function depending on ρ such that

$$\Psi'(\rho) \geqslant 0$$

We define the functions φ and Π such that

$$\rho\varphi'(\rho) = \Psi'(\rho) \quad \text{and} \quad \rho\Pi'(\rho) - \Pi(\rho) = P(\rho)$$

i.e. for some constant density $\bar\rho \geqslant 0$, $\varphi(\rho) = \int_{\bar\rho}^{\rho} \Psi'(s)s^{-1}\,\mathrm{d}s$ and $\Pi(\rho) = \rho\int_{\bar\rho}^{\rho} P(s)s^{-2}\,\mathrm{d}s$.

We remark that the standard nonviscous fluid model with surface tension is recovered choosing $\mu_1 = 0$. If $\mu_1 \neq 0$, we prove, in addition to the classical energy estimate, that extra regularity information on ρ can be derived. More precisely, we will prove the following equalities

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho|u|^2 + \mu_1\int_\Omega \Psi(\rho)|\nabla u|^2 + 2\mu_1\int_\Omega \bigl(\Psi'(\rho)\rho - \Psi(\rho)\bigr)|\operatorname{div} u|^2 \\ &\quad + \frac{\sigma}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \bigl|\nabla\Psi(\rho)\bigr|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \Pi(\rho) = 0\end{aligned} \tag{3}$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho|u + 2\mu_1\nabla\varphi|^2 + \mu_1\int_\Omega \Psi(\rho)|\nabla u|^2 + \frac{\sigma}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \bigl|\nabla\Psi(\rho)\bigr|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \Pi(\rho) \\ &\quad + 2\sigma\mu_1\int_\Omega \Psi'(\rho)\bigl|\Delta\Psi(\rho)\bigr|^2 + 2\mu_1\int_\Omega P'(\rho)|\nabla\rho|^2\varphi'(\rho) = 2\mu_1\int_\Omega \Psi(\rho)\nabla u : {}^t\nabla u\end{aligned} \tag{4}$$

This extra estimate has allowed us to prove some stability properties in the case $\Psi(\rho)=\rho$, see [4]. The general case will be studied in a forthcoming paper.

Remark that system (1), (2) may be rewritten in a conservative form since

$$\rho\nabla\big(\Psi'(\rho)\Delta\Psi(\rho)\big) = -\operatorname{div}\big[\nabla\Psi(\rho)\otimes\nabla\Psi(\rho)\big] + \nabla\left[\rho\Psi'(\rho)\Delta\Psi(\rho) + \frac{1}{2}\big|\nabla\Psi(\rho)\big|^2\right] \tag{5}$$

The fact that μ and λ, functions of the mass density ρ, are linked by the relation stated before is only assumed at this stage for mathematical purpose. This Note proves that such systems provide extra regularity on a quantity related to the density. A thermodynamical interpretation of such relations between λ and μ is actually a work in progress.

1. Introduction

Certains modèles classiques de systèmes de couplage fluide–fluide traitent la région interfaciale entre deux fluides comme une surface raide ou fine et la munissent d'une tension de surface. Les équations de mouvement sont alors résolues dans des domaines séparés et l'interface, où des conditions aux bords spécifiques sont imposées, doit être trouvées explicitement.

En théorie des interfaces diffuses, la région interfaciale est représentée par des variations continues d'un paramètre d'ordre tel que la densité. L'équation de la quantité de mouvement modifiée pour prendre en compte cette couche diffuse est appliquée sur le domaine entier. La formulation de la théorie avec interfaces diffuses a été introduite, il y a un sciècle environ par Korteweg, voir [1]. Dans [2], on introduit la formulation d'un tel système de Korteweg et l'on prouve formellement que les équations d'interfaces diffuses approchent asymptotiquement les équations classiques avec interface raide. En appendice, les équations générales d'interface diffuse qui tiennent compte de la dissipation thermique et visqueuse sont introduites. Le but de cette Note est ici de proposer et discuter des propriétés mathématiques de certains modèles diffusifs capillaires de type Korteweg en supposant l'écoulement isotherme. Plus précisemment, on propose quelques modèles visqueux particuliers qui donnent une information supplémentaire sur la densité. On prouve en fait que sous une certaine hypothèse de compatibilité entre la diffusion et la capillarité, on peut obtenir de la régularité sur une vitesse intermédiaire liée au gradient de densité. Cette régularité supplémentaire nous permet alors de contrôler la dégénerescence des modèles au voisinage des zones d'annulation de la densité. Le lecteur intéressé par un papier fondateur sur les modèles dit de capillarité est renvoyé à [1]. Voir également [2] pour un papier complet de revue. Nous proposons donc d'étudier les propriétés énergétiques d'une certaine classe de modèles diffusifs de type Korteweg. Plus précisemment nous considérons le système suivant

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \tag{6}$$

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u\otimes u) - 2\operatorname{div}\big(\mu(\rho)D(u)\big) - \nabla\big(\lambda(\rho)\operatorname{div} u\big) - \sigma\rho\nabla\big(\Psi'(\rho)\Delta\Psi(\rho)\big) + \nabla P = 0 \tag{7}$$

où $D(u) = (\nabla u + {}^t\nabla u)/2$, σ est le coefficient de tension de surface et

$$\mu(\rho) = \mu_1\Psi(\rho), \qquad \lambda(\rho) = 2\mu_1\big(\rho\Psi'(\rho) - \Psi(\rho)\big)$$

avec

$$\Psi'(\rho) \geqslant 0$$

On définit alors φ et Π telles que

$$\rho\varphi'(\rho) = \Psi'(\rho) \quad \text{et} \quad \rho\Pi'(\rho) - \Pi(\rho) = P(\rho)$$

i.e. pour une densité constante $\bar\rho \geqslant 0$, $\varphi(\rho) = \int_{\bar\rho}^{\rho}\Psi'(s)s^{-1}\,\mathrm{d}s$ et $\Pi(\rho) = \rho\int_{\bar\rho}^{\rho}P(s)s^{-2}\,\mathrm{d}s$.

Nous allons montrer qu'en plus de l'égalité d'énergie classique, il est alors possible d'obtenir une information supplémentaire sur ρ. Plus précisemment nous allons montrer les égalités suivantes

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho|u|^2 + \mu_1\int_\Omega \Psi(\rho)|\nabla u|^2 + 2\mu_1\int_\Omega \big(\Psi'(\rho)\rho - \Psi(\rho)\big)|\operatorname{div} u|^2 + \frac{\sigma}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \big|\nabla\Psi(\rho)\big|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \Pi(\rho) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho|u + 2\mu_1\nabla\varphi|^2 + \mu_1\int_\Omega \Psi(\rho)|\nabla u|^2 + \frac{\sigma}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \big|\nabla\Psi(\rho)\big|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \Pi(\rho) + 2\sigma\mu_1\int_\Omega \Psi'(\rho)\big|\Delta\Psi(\rho)\big|^2 + 2\mu_1\int_\Omega P'(\rho)|\nabla\rho|^2\varphi'(\rho) = 2\mu_1\int_\Omega \Psi(\rho)\nabla u : {}^t\nabla u \tag{9}$$

Remarquons que le système peut être écrit sous forme conservative en utilisant l'identité (5). Le fait que μ et λ, fonctions de la densité de masse ρ, soient liés par la relation donnée précédemment est, à ce stade, seulement une hypothèse mathématique. Cette Note montre alors que de tels systèmes donnent une régularité supplémentaire sur une quantité liée à la densité. Une explication thermodynamique de telles relations entre λ et μ est un travail actuellement en cours.

2. Preuves des égalités

Égalité d'énergie (8). Multiplions l'équation de conservation de la quantité de mouvement par u et l'équation de conservation de la masse par $|u|^2/2$. Multiplions l'équation de conservation de la masse par $-\sigma\Psi'(\rho)\Delta\Psi(\rho)$ et intégrons par parties le premier terme avec la dérivée en temps. On aboutit à l'égalité (8) en sommant les trois égalités précédentes.

Égalité supplémentaire (9). De l'équation de conservation de la masse, on déduit que

$$\partial_t\varphi(\rho) + u\cdot\nabla\varphi(\rho) + \varphi'(\rho)\rho\operatorname{div} u = 0 \tag{10}$$

Ceci donne en dérivant cette équation par rapport à la variable d'espace

$$\partial_t\nabla\varphi(\rho) + u\cdot\nabla\nabla\varphi(\rho) + \nabla u\cdot\nabla\varphi(\rho) + \nabla\big(\varphi'(\rho)\rho\operatorname{div} u\big) = 0 \tag{11}$$

Multiplions cette équation par $\rho\nabla\varphi(\rho)$. En utilisant l'équation de la masse, ceci donne alors

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho|\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega \rho\nabla\varphi\cdot\nabla u\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega \nabla\big(\varphi'(\rho)\rho\operatorname{div} u\big)\cdot\nabla\Psi = 0 \tag{12}$$

En multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par $\nabla\Psi(\rho)/\rho$, on obtient

$$\int_\Omega (\partial_t u + u\cdot\nabla u)\cdot\nabla\Psi + 2\mu_1\int_\Omega \Psi(\rho)D(u) : \left(\frac{\nabla\nabla\Psi}{\rho} - \frac{\nabla\Psi\otimes\nabla\rho}{\rho^2}\right) + \sigma\int_\Omega \Psi'(\rho)\big|\Delta\Psi(\rho)\big|^2 + \int_\Omega P'(\rho)\frac{|\nabla\rho|^2}{\rho}\Psi'(\rho) + 2\mu_1\int_\Omega \nabla\Big(\big(\Psi(\rho) - \Psi'(\rho)\rho\big)\operatorname{div} u\Big)\frac{\nabla\Psi}{\rho} = 0 \tag{13}$$

En intégrant par parties, l'équation (12) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho|\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega \frac{\Psi\nabla\Psi\cdot\nabla u\cdot\nabla\rho}{\rho^2} - \int_\Omega \frac{\Psi\nabla u\cdot\nabla\nabla\Psi}{\rho}$$
$$-\int_\Omega \frac{\Psi\nabla\operatorname{div}u\cdot\nabla\Psi}{\rho} + \int_\Omega \nabla\big(\varphi'(\rho)\rho\operatorname{div}u\big)\cdot\nabla\Psi = 0 \tag{14}$$

En additionnant l'équation (13) et l'équation (14) multipliée par $2\mu_1$, on obtient

$$\int_\Omega (\partial_t u + u\cdot\nabla u)\cdot\nabla\Psi - 2\mu_1\int_\Omega \frac{\Psi\nabla\operatorname{div}u\cdot\nabla\Psi}{\rho} + \sigma\int_\Omega \Psi'(\rho)\big|\Delta\Psi(\rho)\big|^2 + \frac{\mu_1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega 2\rho|\nabla\varphi|^2$$
$$+2\mu_1\int_\Omega \nabla\big(\big(\Psi(\rho)-\Psi'(\rho)\rho\big)\operatorname{div}u\big)\frac{\nabla\Psi}{\rho} + 2\mu_1\int_\Omega \nabla\big(\Psi'(\rho)\operatorname{div}u\big)\cdot\nabla\Psi$$
$$+\int_\Omega P'(\rho)\frac{|\nabla\rho|^2}{\rho}\Psi'(\rho) = 0 \tag{15}$$

En séparant les termes avec $\operatorname{div}u$ et en les additionnant, on obtient

$$\int_\Omega (\partial_t u + u\cdot\nabla u)\cdot\nabla\Psi + \sigma\int_\Omega \Psi'(\rho)\big|\Delta\Psi(\rho)\big|^2 + \frac{\mu_1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega 2\rho|\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega P'(\rho)\frac{|\nabla\rho|^2}{\rho}\Psi'(\rho) = 0 \tag{16}$$

On examine ensuite le terme

$$\int_\Omega (\partial_t u + u\cdot\nabla u)\cdot\nabla\Psi$$

On a

$$\int_\Omega (\partial_t u + u\cdot\nabla u)\cdot\nabla\Psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u\cdot\nabla\Psi) - \int_\Omega u\cdot\nabla\partial_t\Psi + \int_\Omega u\cdot\nabla u\cdot\nabla\Psi$$

En utilisant maintenant l'équation de conservation de la masse et en intégrant par parties les deux derniers termes, ceci donne

$$\int_\Omega (\partial_t u + u\cdot\nabla u)\cdot\nabla\Psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u\cdot\nabla\Psi) - \int_\Omega \Psi'(\rho)\operatorname{div}(\rho u)\operatorname{div}u - \int_\Omega \Psi(\rho)u\cdot\nabla\operatorname{div}u - \int_\Omega \Psi(\rho)\partial_i u_j\partial_j u_i$$

En intégrant par parties le troisième terme, on obtient

$$\int_\Omega (\partial_t u + u\cdot\nabla u)\cdot\nabla\Psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u\cdot\nabla\Psi) - \int_\Omega \big(\rho\Psi'(\rho)-\Psi(\rho)\big)|\operatorname{div}u|^2 - \int_\Omega \Psi(\rho)\partial_i u_j\partial_i u_j$$

En additionnant la dernière relation avec (16), on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u\cdot\nabla\Psi) - \int_\Omega \big(\rho\Psi'(\rho)-\Psi(\rho)\big)|\operatorname{div}u|^2 - \int_\Omega \Psi(\rho)\partial_i u_j\partial_j u_i$$
$$+\sigma\int_\Omega \Psi'(\rho)\big|\Delta\Psi(\rho)\big|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega 2\mu_1\rho|\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega P'(\rho)\frac{|\nabla\rho|^2}{\rho}\Psi'(\rho) = 0$$

En sommant cette dernière équation multipliée par $2\mu_1$ à l'estimation d'énergie (8), on obtient (9).

Lorsque $\Psi(\rho) = \rho$, on retrouve le modèle de Korteweg diffusif étudié dans [3]. Il a été formellement obtenu à partir des équations de Navier–Stokes incompressibles avec surface libre dans le cadre de domaines peu profonds dans [6]. Il s'agit d'un modèle visqueux de type Saint-Venant. Il a également été proposé pour ses propriétés de consistance énergétique dans [7].

Quand $\Psi(\rho) = \sqrt{\rho}$, on obtient une version diffusive de l'équation limite hydrodynamique quantique des équations de Schrödinger, voir par exemple [8] pour une synthèse des résultats récents. Ce modèle correspond au modèle de Korteweg avec un coefficient de tension de surface proportionnel à $1/\rho^2$, voir [3].

Si $\Psi(\rho)$ est constant (choisi égal à 1), alors on retrouve le modèle des fluides compressibles homogènes « classiques » à viscosité constante, étudié par exemple dans [9] avec $\lambda + 2\mu_1 = 0$.

On remarque que l'on obtient le même type d'égalités que celles obtenues dans le cadre des modèles de type Kazhikhov–Smagulov incompressibles étudiés dans [10].

Le modèle général proposé ici, en dimension 2 et 3, sera étudié mathématiquement dans un prochain article. Il devrait permettre d'obtenir l'existence globale de solutions faibles pour une viscosité dépendant de ρ assez générale et une tension de surface en adéquation. Notons que la vitesse et la densité sont supposées à-priori suffisamment régulières afin de parvenir aux égalités (8) et (9). Mathématiquement, seules les inégalités correspondantes peuvent être obtenues rigoureusement si l'on s'intéresse aux solutions faibles. C'est le cas pour les fluides incompressibles ou compressibles classiques, dans le cadre des solutions « à la Leray ».

Remerciement

Le premier auteur remercie le CEA Bruyères le Châtel pour son soutien financier.

Références

[1] D.J. Korteweg, Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité considérables mais continues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de la densité, Archives Néerlandaises de Sciences Exactes et Naturelles (1901) 1–24.

[2] D.M. Anderson, G.B. McFadden, A.A. Wheeler, Diffusive interface methods in fluid mechanics, Annu. Rev. Fluid Mech. 30 (1998) 139–165.

[3] D. Bresch, B. Desjardins, C.K. Lin, On some compressible fluid models: Korteweg, lubrication and shallow water systems, Commun. Partial Differential Equations 28 (3/4) (2003) 1009–1037.

[4] D. Bresch, B. Desjardins, Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophique model, Commun. Math. Phys. 238 (1/2) (2003) 211–223.

[5] D. Bresch, B. Desjardins, B. Ducomet, Quasi-neutral limit for a viscous capillary model of plasma, Annales I.H.P. (2004), à paraître.

[6] F. Gerbeau, B. Perthame, Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water: Numerical results, Discrete Continuous Dynamical Systems, Ser. B 1 (2001) 89–102.

[7] P. Gent, The energetically consistent shallow water equations, J. Atmos. Sci. 50 (1993) 1323–1325.

[8] I. Gasser, C.K. Lin, P.A. Markowitch, A review of dispersive limits of (non)linear Schrödinger-type equations, Taiwanese J. Math. 4 (4) (2000) 501–529.

[9] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Dynamics, vol. 2, Oxford University Press, 1998.

[10] D. Bresch, E.H. Essoufi, M. Sy, De nouveaux systèmes de type Kazhikhov–Smagulov : modèles de propagation de polluants et de combustion à faible nombre de Mach, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 973–978.