



Déformation cumulée tensorielle dans le référentiel en rotation logarithmique

Vincent Mora *, Hervé Laurent, Gérard Rio

Laboratoire de génie mécanique et matériaux, UPRES-EA 2595, 56325 Lorient cedex, France

Reçu le 22 avril 2004 ; accepté après révision le 12 juillet 2004

Disponible sur Internet le 9 septembre 2004

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

L'intégration temporelle du taux de déformation est un problème central, mais souvent sous-jacent, en grandes transformations. Les déformations cumulées tensorielles, obtenues par intégration du taux de déformation $\dot{\mathbf{D}}$, permettent d'aborder ce problème sous un angle purement géométrique (indépendamment de considérations liées au comportement matériel). L'intégration de $\dot{\mathbf{D}}$ est ici effectuée dans un nouveau référentiel local objectif en rotation logarithmique proposé, entre autres, par Lehmann et al. et Xiao et al. Des résultats numériques obtenus sur un cycle de chargement fermé sont présentés. Les avantages et inconvénients de cette intégration particulière pour le développement de lois de comportements sont ensuite évoqués. **Pour citer cet article :** V. Mora et al., *C. R. Mécanique 332 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Cumulated tensorial strain measure in the logarithmic rotating frame. The time integration of strain rate tensor $\dot{\mathbf{D}}$ is a central problem in large transformations even if it is often an underlying one. The cumulated tensorial strains, obtained by the time integration of strain rate tensor $\dot{\mathbf{D}}$, allow the tackling of this problem from a geometrical point of view, and independently of material behaviour considerations. The time integration here takes place in the local objective frame defined by the logarithmic spin proposed by Lehmann et al. and Xiao et al. The numerical results obtained in a closed deformation path are presented here. The advantages and drawbacks of this novel integration for the development of behaviour laws are described. **To cite this article :** V. Mora et al., *C. R. Mécanique 332 (2004)*.

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des solides ; Grande déformation ; Rotation logarithmique ; Déformation cumulée tensorielle

Keywords : Solid mechanics ; Finite deformation ; Logarithmic spin ; Cumulated tensorial strain measure

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : vincent.mora@univ-ubs.fr (V. Mora).

Abridged English version

The development of the elastoplastic model deals with a number of basic problems in the presence of finite strain. The definition of plastic strain is one of them. Solutions have been, and still are, proposed (see for instance [1–3]), but none of them is entirely satisfactory, as pointed out by Naghdi [4]. Among these solutions, some have become popular, such as the additive decomposition of strain rate tensor $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}^e + \tilde{\mathbf{D}}^p$. In this case, the hypoelastic formulation of the reversible part of the behaviour poses the usual problems in this kind of formulation: the choice of the objective stress rate, the time integration of the stress rate and the inconsistency with the notion of elasticity.

The time integration of strain rate tensor $\tilde{\mathbf{D}}$ is an alternative to the time integration of the stress rate. The difficulty in this case is to choose the objective reference frame in which $\tilde{\mathbf{D}}$ should be integrated. Such a reference frame is defined locally (i.e. near a material point) by its spin $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ relative to a fixed reference frame. It has been demonstrated by Gillormini et al. [5] that quantities $\tilde{\mathbf{e}}_{(c)}$ and $\tilde{\mathbf{e}}_{(r)}$ obtained by the time integration of $\tilde{\mathbf{D}}$ in the reference frame defined by vorticity tensor $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{(c)} = \tilde{\mathbf{W}}$ (skew-symmetric part of the velocity gradient) or by $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{(r)} = \dot{\tilde{\mathbf{R}}}. \tilde{\mathbf{R}}^T$ ($\tilde{\mathbf{R}}$: orthogonal tensor in the polar decomposition of the transformation gradient) depend on the deformation path. Therefore, those quantities are called cumulated tensorial strains because they are not strain measures.

The results presented in Fig. 1 show that at the end of a closed deformation path, cumulated tensorial strains $\tilde{\mathbf{e}}_{(c)}$ and $\tilde{\mathbf{e}}_{(r)}$ are not zero. In contrast to the results usually presented in terms of stress components and therefore dependent on a constitutive model (see for instance [6]), the results in Fig. 1 are independent of any constitutive model. The results only depend on the objective reference frame in which the time integration of $\tilde{\mathbf{D}}$ takes place. This underlines the geometric nature of the problems classically faced by hypoelastic models.

To solve those problems, Lehmann et al. [7] and Xiao et al. [8] have introduced logarithmic spin $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{(l)}$ (see Eq. (1)). This spin is such that the rotational derivative of spatial Hencky strain tensor $\tilde{\mathbf{h}}$ is equal to the strain rate tensor (see Eq. (2)). It is therefore obvious that the time integration of $\tilde{\mathbf{D}}$ in the objective reference frame defined by spin $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{(l)}$, let us say the logarithmic rotating frame, leads to the spatial Hencky strain tensor, i.e. $\tilde{\mathbf{e}}_{(l)} = \tilde{\mathbf{h}}$. As a consequence, this cumulated tensorial strain does not depend on the strain path. For example, at the end of the closed deformation path (see Fig. 1) we have $\tilde{\mathbf{e}}_{(l)} = \tilde{\mathbf{0}}$.

Nevertheless, the interest of $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{(l)}$ should be qualified by the results presented in Fig. 2. Indeed, during the closed deformation path, the logarithmic rotating frame, has turned at an angle of 0.08 rad. Therefore, the integration of additive decomposition $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}^e + \tilde{\mathbf{D}}^p$ can lead to aberrant results if the elastic strains are not small (i.e. shear strain superior to 100%) or in the case of cyclic loading (see also [2]).

1. Introduction

Le développement de lois de comportement élastoplastique pose un certain nombre de problèmes fondamentaux en transformation finie. Il suffit pour s'en convaincre de consulter le travail de synthèse de Naghdi [4]. Un de ces problèmes est la définition d'une grandeur représentant la partie plastique de la déformation. De nombreuses solutions ont été et sont encore proposées. Parmi ces solutions, certaines sont aujourd'hui classiques :

- la décomposition multiplicative du gradient de transformation $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}^e . \tilde{\mathbf{F}}^p$ et la notion associée de configuration relâchée est un cadre très général dans lequel s'inscrivent de nombreuses théories (voir par exemple [3]). La difficulté, dans ce cas, est de choisir l'orientation de la configuration relâchée, c'est ce choix qui différencie les nombreuses théories proposées.
- la décomposition additive du taux de déformation en une partie élastique et une partie plastique : $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}^e + \tilde{\mathbf{D}}^p$. Dans ce cadre, la formulation souvent hypoélastique de la partie réversible du comportement amène les problèmes liés à ce type de formulation : choix de la dérivée objective de la contrainte, intégration du taux de

contrainte, et surtout, incohérence avec la notion d'élasticité dans le cas d'un cycle de chargement fermé (cf. par exemple Lin [6]).

Une alternative à l'intégration du taux de contrainte est l'intégration du taux de déformation $\tilde{\mathbf{D}}$. La grandeur intégrée, que nous noterons $\tilde{\mathbf{e}}_{(t)}$, est alors qualifiée de déformation cumulée tensorielle [5,9]. Le principal avantage de cette approche, aussi appelée approche en référentiel local objectif, est que le cadre classique de l'élastoplasticité en petites perturbations se transpose aisément en grandes transformations [10].

L'objectif de cette Note est de montrer que la vitesse de rotation logarithmique $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{(t)}$ proposée par Xiao et al. [8] permet effectivement de définir un référentiel local objectif dans lequel la déformation cumulée tensorielle s'annule sur un cycle de chargement fermé. Néanmoins, nous montrons que l'orientation du référentiel local objectif ainsi défini dépend du chemin de chargement. Certaines conséquences de l'utilisation de ce référentiel pour l'écriture de lois de comportement élastoplastiques sont finalement évoquées.

2. Intégration temporelle du taux de déformation

L'intégration temporelle d'un tenseur, tout comme sa dérivation, s'effectue toujours par rapport à un référentiel particulier. Le principe d'objectivité de la loi de comportement nécessite de faire appel à un référentiel d'intégration objectif. Ce type de référentiel est défini localement, c'est-à-dire au voisinage d'un point matériel particulier.

Les invariants principaux du taux de déformation ont une signification géométrique reconnue, par exemple la trace de $\tilde{\mathbf{D}}$ définit la vitesse relative de variation de volume. Il est souhaitable, pour faciliter le développement de lois de comportement, que les invariants des déformations cumulées tensorielles aient une signification géométrique de même nature. Pour cette raison, Gilormini et al. [5] et Rougée [9] restreignent a priori le choix d'un référentiel local objectif aux seuls repères orthonormés.

Ces référentiels locaux objectifs sont complètement définis par la donnée de leur vitesse de rotation $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ par rapport à un référentiel global supposé fixe. Les vitesses de rotation les plus connues sont la vorticité $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{(c)} = \tilde{\mathbf{W}}$ (partie antisymétrique du gradient de vitesse) conduisant au référentiel corotationnel et la vitesse de rotation propre $\tilde{\mathbf{\Omega}}_{(r)} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T$ ($\tilde{\mathbf{R}}$: tenseur rotation de la décomposition polaire du gradient de transformation) conduisant au référentiel en rotation propre. Cependant, pour ces deux vitesses de rotation, la déformation cumulée tensorielle obtenue ne dépend pas seulement de la configuration initiale et de la configuration finale, mais aussi du chemin de chargement suivi. Cela rend donc difficile l'écriture d'une loi élastique ou hyperélastique et plus généralement de lois conduisant à des déformations élastiques importantes.

Ce résultat est illustré sur la Fig. 1 où l'on considère un chemin de déformation fermé appliqué sur un solide homogène plan. Le chargement consiste en quatre phases caractérisées par l'évolution temporelle du gradient de transformation suivant la loi $\tilde{\mathbf{F}}(t) = \tilde{\mathbf{I}} + \gamma(t)\tilde{\mathbf{I}}_1 \otimes \tilde{\mathbf{I}}_2 + \lambda(t)\tilde{\mathbf{I}}_2 \otimes \tilde{\mathbf{I}}_1$ où $\gamma(t)$ et $\lambda(t)$ suivent l'évolution de la Fig. 1 et $\tilde{\mathbf{I}}_1, \tilde{\mathbf{I}}_2$ sont les vecteurs de la base à laquelle est rapportée le référentiel global fixe. Ces résultats ont été obtenus numériquement avec le logiciel *SiDoLo* [11] qui utilise un algorithme d'intégration explicite de type Runge Kutta d'ordre 2 avec pas adaptatif. Les composantes dans la base $\tilde{\mathbf{I}}_a$ des déformations cumulées tensorielles pour les intégrations dans le référentiel corotationnel $\tilde{\mathbf{e}}_{(c)}$ et en rotation propre $\tilde{\mathbf{e}}_{(r)}$ ne s'annulent pas à la fin du chargement fermé. Autrement dit, on obtient une mesure non nulle alors que la configuration finale est identique à la configuration initiale.

Les résultats présentés sur la Fig. 1 sont relativement originaux car contrairement aux résultats habituellement exprimés en terme de contrainte et associés à un comportement spécifique (cf. par exemple [6]), ces résultats sont indépendants de la loi de comportement matériel et fonction uniquement de la méthode d'intégration du taux de déformation. Cela permet de souligner la nature essentiellement géométrique des problèmes rencontrés en hypoélasticité, et notamment le fait que la contrainte résultant de l'intégration de lois hypoélastiques sur un cycle de chargement fermé n'est en général pas nulle.

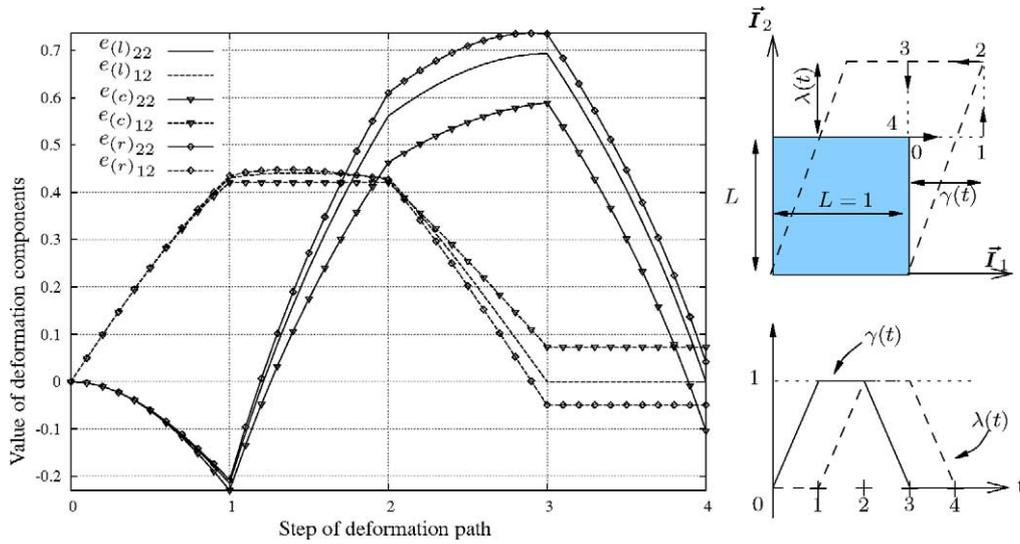


Fig. 1. Composantes de différentes déformations cumulées tensorielles dans la base fixe (\vec{I}_1, \vec{I}_2) pour un trajet de chargement fermé. $e_{(l)}$: référentiel en rotation logarithmique, $e_{(c)}$: référentiel corotationnel, $e_{(r)}$: référentiel en rotation propre.

Fig. 1. Components in (\vec{I}_1, \vec{I}_2) of different cumulated tensorial strain measures for a closed deformation path. $e_{(l)}$: logarithmic rotating frame, $e_{(c)}$: corotational frame, $e_{(r)}$: rotational frame.

3. Vitesse de rotation logarithmique $\tilde{\Omega}_{(l)}$

Afin de remédier à ce problème, Lehmann et al. [7] puis Xiao et al. [8], ont introduit la vitesse de rotation logarithmique qui s’écrit sous la forme (sans sommation implicite) :

$$\tilde{\Omega}_{(l)} = \tilde{W} + \sum_{\alpha=1, \beta=1, \alpha \neq \beta}^n \left[\left(\frac{1 + \chi_\alpha / \chi_\beta}{1 - \chi_\alpha / \chi_\beta} + \frac{2}{\ln(\chi_\alpha / \chi_\beta)} \right) D_{\alpha\beta} \vec{p}_\alpha \otimes \vec{p}_\beta \right] \tag{1}$$

où les χ_α sont les n valeurs propres distinctes du tenseur de Cauchy–Green droit \tilde{B} , les \vec{p}_α les vecteurs propres unitaires correspondants et les $D_{\alpha\beta}$ sont les composantes de \tilde{D} dans la base \vec{p}_α .

Cette vitesse de rotation a été définie pour que la dérivée rotationnelle du tenseur de Hencky \tilde{h} (tenseur eulérien de déformation logarithmique) soit égale au taux de déformation. Autrement dit, $\tilde{\Omega}_{(l)}$ satisfait la relation :

$$\dot{\tilde{h}} - \tilde{\Omega}_{(l)} \cdot \tilde{h} + \tilde{h} \cdot \tilde{\Omega}_{(l)} = \tilde{D} \tag{2}$$

où $\dot{\tilde{h}}$ est la dérivée temporelle de \tilde{h} dans le référentiel global.

La dérivée rotationnelle de \tilde{h} étant égale au tenseur taux de déformation, il est évident qu’en intégrant \tilde{D} dans le référentiel local objectif défini par $\tilde{\Omega}_{(l)}$, on obtient une déformation cumulée tensorielle $\tilde{e}_{(l)} = \tilde{h}$. Pour le cycle de chargement fermé (cf. Fig. 1), cette déformation cumulée tensorielle présente donc l’intérêt d’être nulle après retour à la configuration initiale et ceci indépendamment de la loi de comportement utilisée.

Néanmoins, l’intérêt de la vitesse de rotation logarithmique doit être nuancé par les résultats présentés sur la Fig. 2. On constate en effet qu’à la fin du cycle, le référentiel en rotation logarithmique a tourné d’un angle $\theta_{(l)}$ de 0.08 rad par rapport au référentiel global. Cela peut entraîner quelques problèmes pour une loi de comportement élastoplastique dans le référentiel local objectif en rotation logarithmique. Pour illustrer une de ces difficultés,

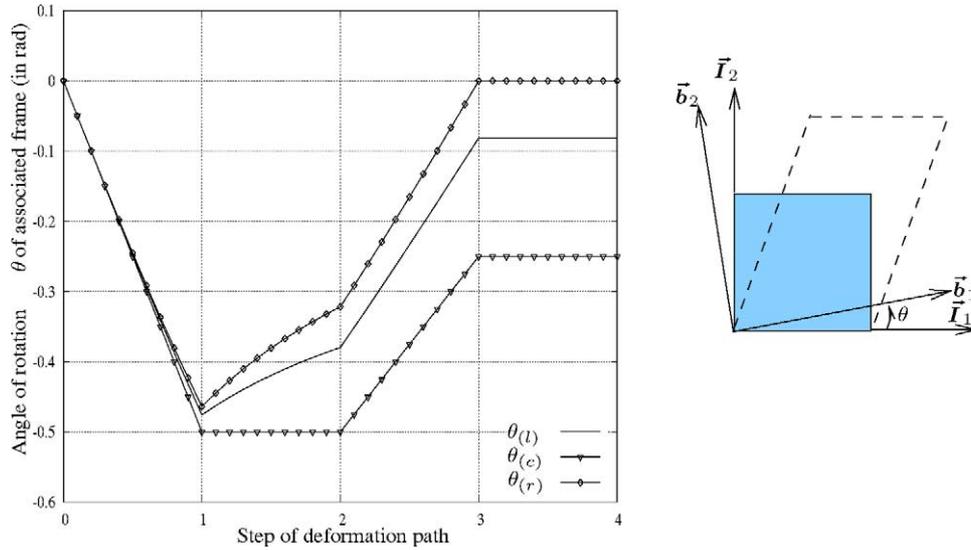


Fig. 2. Angle de rotation θ des référentiels des déformations cumulées tensorielles par rapport au référentiel global pour le trajet de chargement fermé de la Fig. 1. $\theta_{(l)}$: rotation du référentiel en rotation logarithmique, $\theta_{(c)}$: rotation du référentiel corotationnel, $\theta_{(r)}$: rotation du référentiel en rotation propre.

Fig. 2. Angle of rotation θ of the local objective frames of cumulated tensorial strain for the closed deformation path of Fig. 1. $\theta_{(l)}$: rotation in logarithmic rotating frame, $\theta_{(c)}$: rotation in corotational frame, $\theta_{(r)}$: rotation in rotational frame.

supposons qu'à un instant t_0 donné, la partie plastique de la déformation cumulée tensorielle soit non nulle et égale à la déformation. Prenons par exemple :

$$\tilde{e}_{(l)}^p(t_0) = \tilde{e}_{(l)}(t_0) = e_{11} \vec{I}_1 \otimes \vec{I}_1 + e_{22} \vec{I}_2 \otimes \vec{I}_2 = e_{11} \vec{b}_1(t_0) \otimes \vec{b}_1(t_0) + e_{22} \vec{b}_2(t_0) \otimes \vec{b}_2(t_0)$$

où (\vec{b}_1, \vec{b}_2) est une base du référentiel en rotation logarithmique qui, à t_0 coïncide avec (\vec{I}_1, \vec{I}_2) . Supposons maintenant, entre t_0 et t un cycle fermé. Si ce cycle est purement élastique, les composantes de $\tilde{e}_{(l)}^p$ sont constantes dans (\vec{b}_1, \vec{b}_2) , autrement dit :

$$\tilde{e}_{(l)}^p(t) = e_{11} \vec{b}_1(t) \otimes \vec{b}_1(t) + e_{22} \vec{b}_2(t) \otimes \vec{b}_2(t)$$

La déformation cumulée tensorielle $\tilde{e}_{(l)}$ est, elle, strictement égale à sa valeur initiale :

$$\tilde{e}_{(l)}(t) = e_{11} \vec{I}_1 \otimes \vec{I}_1 + e_{22} \vec{I}_2 \otimes \vec{I}_2$$

Comme à t les bases (\vec{b}_1, \vec{b}_2) et (\vec{I}_1, \vec{I}_2) , ne coïncident plus, les tenseurs $\tilde{e}_{(l)}(t)$ et $\tilde{e}_{(l)}^p(t)$ ne sont plus égaux : il y a donc une déformation élastique non nulle au terme d'un cycle fermé purement élastique. La rotation du référentiel peut donc provoquer un comportement néfaste du modèle si on ne se restreint pas à de faibles déformations élastiques ou si on étudie un chargement cyclique. Pour des matériaux métalliques avec des déformations élastiques de l'ordre de 0.2% sans chargement cyclique, ce comportement néfaste sera négligeable mais il pourra s'avérer inopportun, par exemple, pour des polymères qui peuvent subir des déformations élastiques importantes ou pour des matériaux subissant un grand nombre de cycles.

4. Conclusions et perspectives

Nous avons rappelé l'intérêt des déformation cumulées tensorielles obtenues par intégration temporelle du taux de déformation dans un référentiel local objectif. Nous avons, de plus, montré que le référentiel en rotation loga-

rithmique permet d'obtenir une déformation cumulée tensorielle nulle à la fin du trajet de chargement fermé ce qui n'est pas le cas pour les référentiels en rotation propre et corotationnel. Par contre, *la rotation du référentiel en rotation logarithmique par rapport au repère global* à la fin d'un cycle de chargement fermé n'est pas nulle ce qui, dans certains cas, peut conduire à un comportement préjudiciable des modèles écrits dans ce référentiel.

Les problèmes que posent les différents référentiels locaux objectifs poussent à remettre en question la restriction de l'intégration dans des repères orthonormés. L'intégration de $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}^e + \tilde{\mathbf{D}}^p$ dans des repères non-orthonormés peut conduire, par exemple, à une décomposition additive de la mesure de déformation d'Almansi (cf. par exemple Mora et al. [12]). Il est alors possible de montrer que cette approche additive est un cas particulier de la décomposition multiplicative $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}^e \cdot \tilde{\mathbf{F}}^p$. Néanmoins, il faut noter que l'utilisation de grandeur matérielle entraînée, associée à cette décomposition additive du tenseur de déformation d'Almansi, rend sensiblement plus complexe le développement des modèles du fait du manque de signification géométrique directe des invariants classiques de cette mesure de déformation.

Références

- [1] V.A. Lubarda, *Elastoplasticity Theory*, CRC Press, 2002.
- [2] J.C. Simo, T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer, 1998.
- [3] A. Ibrahimbegovic, F. Gharzeddine, Finite deformation plasticity in principal axes: from a manifold to the euclidean setting, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.* 171 (1999) 341–369.
- [4] P.M. Naghdi, A critical review of the state of finite plasticity, *J. Appl. Math. Phys.* 41 (1990) 314–394.
- [5] P. Gilormini, P. Roudier, P. Rougée, Les déformations cumulées tensorielles, *C. R. Mecanique* 316 (1993) 1499–1504.
- [6] R. Lin, Numerical study of consistency of rate constitutive equations with elasticity at finite deformation, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 55 (2002) 1053–1077.
- [7] T. Lehmann, Z. Guo, H. Liang, The conjugacy between Cauchy stress and logarithm of the left stretch tensor, *Eur. J. Mech. A/Solids* 10 (4) (1991) 395–4004.
- [8] H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers, Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate, *Acta Mech.* 124 (1997) 89–105.
- [9] P. Rougée, *Mécanique des grandes transformations*, Springer, 1997.
- [10] X. Aubard, P.-A. Boucard, P. Ladevèze, S. Michel, Modeling and simulation of damage in elastomer structure at high strains, *Comput. Struct.* 80 (2002) 2289–2298.
- [11] G. Cailletaud, P. Pilvin, Utilisation de modèles polycristallins pour le calcul par éléments finis, *Rev. Eur. Éléments Finis* 3–4 (1994) 515–541.
- [12] V. Mora, G. Rio, H. Laurent, Elastoplasticité en coordonnée matérielles entraînées, in: *Actes du sixième colloque national en calcul des structures*, Giens, 2003, pp. 73–80.