



Un algorithme efficace d'intégration plastique pour un matériau obéissant au critère anisotrope de Hill

Isabelle Titeux *, Yuming M. Li, Karl Debray, Ying-Qiao Guo

Groupe de mécanique matériaux et structures (EA2617), université de Reims Champagne-Ardenne, moulin de la Housse,
BP 1039, 51687 Reims cedex 2, France

Reçu le 6 novembre 2003 ; accepté après révision le 21 juillet 2004

Disponible sur Internet le 9 septembre 2004

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Cette Note présente un nouvel algorithme efficace pour effectuer l'intégration plastique et calculer les contraintes dues aux grandes déformations pour des matériaux obéissant au critère anisotrope de Hill. L'algorithme d'intégration plastique classique comme la « Méthode du Retour Radial » est largement utilisé pour l'analyse non linéaire des structures et la simulation des procédés de mise en forme des matériaux, mais il nécessite une résolution itérative et peut avoir des problèmes de convergence. Un nouvel algorithme direct, basé sur une méthode scalaire, est développé permettant d'obtenir directement le multiplicateur plastique sans résolution itérative, ainsi le temps de calcul est largement diminué et les problèmes numériques sont évités. **Pour citer cet article : I. Titeux et al., C. R. Mecanique 332 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

An efficient algorithm for plastic integration of material satisfying the Hill's anisotropic yield criterion. This Note deals with an efficient algorithm to carry out the plastic integration and compute the stresses due to large strains for materials satisfying the Hill's anisotropic yield criterion. The classical algorithm of plastic integration such as 'Return Mapping Method' is largely used for nonlinear analyses of structures and numerical simulations of forming processes, but it requires an iterative schema and may have convergence problems. A new direct algorithm based on a scalar method is developed which allows us to directly obtain the plastic multiplier without an iteration procedure; thus the computation time is largely reduced and the numerical problems are avoided. **To cite this article: I. Titeux et al., C. R. Mecanique 332 (2004).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; Grandes déformations ; Algorithme direct de plasticité ; Newton–Raphson

Keywords: Computational solid mechanics; Large plastic strain; Direct algorithm of plasticity; Newton–Raphson

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : isabelle.titeux@univ-reims.fr (I. Titeux), yuming.li@univ-reims.fr (Y.M. Li), karl.debray@univ-reims.fr (K. Debray), yq.guo@univ-reims.fr (Y.-Q. Guo).

Abridged English version

The classical algorithms for plastic integration, such as the ‘Return Mapping Method’ are largely used for non-linear structural analyses and forming process simulations, but they are very time consuming and need expensive computer resources. In order to integrate the constitutive equation of elasto-plasticity, an iterative scheme based on the Newton–Raphson’s method is used. We present here a new algorithm to carry out the plastic integration due to large strains.

The plastically admissible stresses should satisfy the Hill criterion (1) [4]. Here $\{\sigma\}$ is the Cauchy planar stress vector, σ_{eq} is the equivalent stress, $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ is the equivalent yield stress obtained from the uniaxial tensile curve and $[P]$ is defined by the transverse anisotropic coefficient r (2). The normality law $\{\dot{\varepsilon}^p\} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}$ allows us to introduce the plastic multiplier λ (3). The total strain rate can be split into a plastic part and an elastic part (4). Therefore the unknown vector $\{\sigma_{n+1}\}$ can then be expressed in function of the increment of the plastic multiplier $\Delta\lambda$ (5)–(7). The Simo’s implicit algorithm [1–3] consists in writing the Hill Criterion in terms of $\{\sigma_{n+1}(\Delta\lambda)\}$ in order to obtain the value of $\Delta\lambda$ by an iterative resolution of Newton–Raphson. A new direct algorithm of plasticity is developed in this Note, giving a large reduction of the computation time. In the stress vector (7), the unknown $\Delta\lambda$ is in an inverse matrix expression, so it is very difficult to directly solve $\Phi(\{\sigma_{n+1}(\Delta\lambda)\}) = 0$. Our basic idea is to transform this stress vector into a known scalar using the notion of the equivalent stress. To do this, firstly a transformation matrix $[Q]$ (8) is introduced to obtain diagonal matrices easy to inverse (Eqs. (9), (10)); secondly, in Eq. (14) obtained from (9), the operations $A = \langle A \rangle [P^*] \{A\}$ allow to transform the two sides of (14) into two scalar expressions (15), (16) and transform the unknown stress vector $\{\sigma_{n+1}(\Delta\lambda)\}$ into its equivalent stress which can be determined using the uniaxial tensile curve. Then the equivalence of the expressions (15), (16) gives the quadratic equation (17) with the only unknown $\Delta\lambda$. Here a , b , A , $\{\sigma_{n+1}^*\}$ and the diagonal matrix $[P^*]$ are defined by Eqs. (11), (15), (12), (13) respectively, σ_I denotes $\sigma_x + \sigma_y$ and $p_1 = \frac{1}{1+r}$ is the first term of $[P^*]$. We note that the actual values of σ_I and σ_{eq} are unknown but their values at the last global equilibrium iteration can be used to avoid the iterative resolution of (17).

Remark 1. This scalar method transforms the unknown stress vector into the equivalent stress which can be determined by the uniaxial tensile curve. This operation requires the assumption of isotropic hardening of the sheet material.

Remark 2. In forming processes, the elastic strains are very small with respect to the plastic ones, then the Poisson coefficient can be approximately related to the anisotropic coefficient by $\nu = \frac{r}{1+r}$ and the product $[H_e][P]$ becomes the scalar matrix $E[I]$. Thus the transformation of (7) into (18) is immediate. Eq. (18) can also be obtained directly from (17), since $\nu = \frac{r}{1+r}$ leads to $a = b = E$.

The Simo’s Return Mapping Method and the present scalar algorithm are used in the sheet forming simulation to compare their efficiency and accuracy. Fig. 1 shows the CPU times using Simo’s algorithm or the present scalar algorithm for the deep drawing simulation of a square cup [5]. Fig. 2(a) shows the thickness variations using Simo’s or the present scalar algorithm and Fig. 2(b) compares the stress distributions for the square cup. We note that the present algorithm of plastic integration gives the same results than classical algorithms but consumes little CPU time.

1. Introduction

L’algorithme classique d’intégration plastique comme la « Méthode du Retour Radial » [1–3] est largement utilisé pour l’analyse non linéaire des structures et la simulation des procédés de mise en forme des matériaux. Ces méthodes itératives sont précises et permettent une bonne estimation des contraintes. Cependant, pour prendre en

compte les grandes déformations plastiques et le contact-frottement, les calculs sont très longs et la convergence n'est pas assurée.

Dans cette Note, nous proposons une méthode directe beaucoup plus rapide que la résolution implicite de Newton–Raphson utilisée dans l'algorithme du Retour Radial. Nous rappelons d'abord la formulation de calcul des contraintes entre deux incréments basée sur le critère de Hill et la loi de normalité. Nous présentons ensuite le nouvel algorithme : l'équation vectorielle des contraintes est transformée en une équation scalaire en utilisant la notion de la contrainte équivalente, ainsi le multiplicateur plastique peut être obtenu par une résolution directe sans itération. Enfin, sur des cas test d'emboutissage, la comparaison du nouvel algorithme et l'algorithme du Retour Radial montre l'efficacité et la précision de la présente méthode.

2. Algorithme du Retour Radial pour l'intégration plastique

L'algorithme du Retour Radial [1–3], basé sur la théorie d'écoulement plastique, est utilisé pour l'intégration plastique sous une forme incrémentale.

Les contraintes sont exprimées en fonction du multiplicateur plastique λ puis substituées dans le critère de Hill, une résolution de Newton–Raphson permet d'annuler le critère et d'obtenir $\Delta\lambda$ et l'accroissement des contraintes plastiquement admissibles.

Le critère de Hill en contraintes planes s'écrit [4] :

$$\Phi(\{\sigma\}) = \frac{1}{2}\langle\sigma\rangle[P]\{\sigma\} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\text{eq}}^2 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})^2 = 0 \quad (1)$$

où $\{\sigma\} = \langle\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\rangle^T$ est le vecteur des contraintes de Cauchy, σ_{eq} la contrainte équivalente, $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ la contrainte seuil actualisée issue de la courbe de traction et $[P]$ la matrice d'anisotropie, définie par le coefficient d'anisotropie transversale r :

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-r}{1+r} & 0 \\ \frac{-r}{1+r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+2r)}{1+r} \end{pmatrix} \quad (2)$$

La loi de normalité $\{\dot{\varepsilon}^P\} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}}$ permet d'exprimer le taux de déformation plastique en fonction du taux du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$:

$$\{\dot{\varepsilon}^P\} = \langle \dot{\varepsilon}_x^P, \dot{\varepsilon}_y^P, 2\dot{\varepsilon}_{xy}^P \rangle^T = \dot{\lambda}[P]\{\sigma\} \quad (3)$$

Le taux de déformation $\{\dot{\varepsilon}\}$ se décompose en une partie élastique $\{\dot{\varepsilon}^{\text{elas}}\}$, reliée au taux de contraintes par la matrice d'élasticité $[H_e]$, et une partie plastique $\{\dot{\varepsilon}^P\}$:

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}^{\text{elas}}\} + \{\dot{\varepsilon}^P\} = [H_e]^{-1}\{\dot{\sigma}\} + \dot{\lambda}[P]\{\sigma\}, \quad \text{avec } [H_e] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ce qui donne le taux des contraintes et l'accroissement des contraintes entre deux pas successifs :

$$\{\dot{\sigma}\} = [H_e](\{\dot{\varepsilon}\} - \dot{\lambda}[P]\{\sigma\}) \quad (5)$$

$$\{\sigma_{n+1}\} - \{\sigma_n\} = [H_e](\{\Delta\varepsilon\} - \Delta\lambda[P]\{\sigma_{n+1}\}) \quad (6)$$

Ainsi, le vecteur de contraintes inconnu $\{\sigma_{n+1}\}$ s'exprime en fonction de $\Delta\lambda$:

$$\{\sigma_{n+1}\} = ([I] + \Delta\lambda[H_e][P])^{-1}(\{\sigma_n\} + [H_e]\{\Delta\varepsilon\}) \quad (7)$$

En injectant $\{\sigma_{n+1}(\Delta\lambda)\}$ dans le critère de Hill défini en (1), on obtient $\Delta\lambda$ puis les contraintes par une résolution non linéaire de Newton–Raphson.

Cette résolution itérative est assez longue et pénalise la méthode du Retour Radial. L'idée est donc de développer une méthode efficace permettant de calculer directement $\Delta\lambda$ sans itération.

3. Algorithme direct de plasticité par une méthode scalaire

Le présent algorithme direct de plasticité consiste à transformer l'expression vectorielle (7) en une expression scalaire en utilisant la notion de la contrainte équivalente. Ainsi une équation scalaire d'ordre 2 à une seule inconnue $\Delta\lambda$ est obtenue. La difficulté de la résolution directe est d'avoir l'inconnue $\Delta\lambda$ dans une matrice inverse. Une matrice de transformation $[Q]$ est introduite pour diagonaliser et inverser cette matrice :

$$[Q] = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad [Q]^{-1} = [Q]^T = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

L'équation (7) devient alors :

$$[Q]^{-1}\{\sigma_{n+1}\} = ([I] + \Delta\lambda[Q]^{-1}[H_e][P][Q])^{-1}[Q]^{-1}(\{\sigma_n\} + [H_e]\{\Delta\varepsilon\}) \quad (9)$$

Ainsi une matrice diagonale est obtenue :

$$[I] + \Delta\lambda[Q]^{-1}[H_e][P][Q] = (1 + b\Delta\lambda)[I] + \Delta\lambda(a - b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

avec

$$a = \frac{E(1 + \nu)}{(1 - \nu^2)(1 + r)}, \quad b = \frac{E(1 - \nu)(1 + 2r)}{(1 - \nu^2)(1 + r)} \quad (11)$$

Pour alléger les expressions, notons

$$\{\sigma_{n+1}^*\} = [Q]^{-1}\{\sigma_{n+1}\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle \sigma_x + \sigma_y, \sigma_y - \sigma_x, \sqrt{2}\sigma_{xy} \rangle^T \quad (12)$$

$$[P^*] = [Q]^{-1}[P][Q] \quad (13)$$

Dans (12), la première composante du vecteur $\{\sigma_{n+1}^*\}$ est, à un coefficient près, le premier invariant du tenseur des contraintes ou la contrainte hydrostatique. Notons $\sigma_I = \sigma_x + \sigma_y$. Dans (13), la matrice $[P^*]$ est diagonale avec son premier terme noté $p_1 = \frac{1}{1+r}$.

L'équation (9) devient alors :

$$([I] + \Delta\lambda[Q]^{-1}[H_e][P][Q])\{\sigma_{n+1}^*\} = [Q]^{-1}(\{\sigma_n\} + [H_e]\{\Delta\varepsilon\}) \quad (14)$$

Dès lors que l'état de contraintes et l'incrément de déformation sont connus au pas n , le membre de droite de cette équation est connu. Nous le notons $\{A\}$, et le transformons en un scalaire connu :

$$A = \langle A \rangle [P^*] \{A\} = (\langle \sigma_n \rangle + \langle \Delta\varepsilon \rangle [H_e]) [P] (\{\sigma_n\} + [H_e]\{\Delta\varepsilon\}) \quad (15)$$

Dans l'équation vectorielle (14), les inconnues sont les contraintes au pas $n + 1$ qui dépendent de l'incrément du multiplicateur plastique $\Delta\lambda$. Afin d'obtenir une équation scalaire avec la seule inconnue $\Delta\lambda$, une opération similaire à celle réalisée en (15) est effectuée : $[P^*]$ est multiplié à droite par $([I] + \Delta\lambda[Q]^{-1}[H_e][P][Q])\{\sigma_{n+1}^*\}$ et à gauche par le même vecteur transposé. Cela donne, en tenant compte de (10) :

$$(1 + b\Delta\lambda)^2 \sigma_{n+1,eq}^2 + \Delta\lambda(a - b)(1 + b\Delta\lambda)p_1\sigma_I^2 + \frac{1}{2}\Delta\lambda^2(a - b)^2 p_1\sigma_I^2 \quad (16)$$

où le vecteur de contraintes inconnues $\{\sigma_{n+1}\}$ est transformé en un scalaire $\sigma_{n+1,eq}$ qui peut être obtenu en utilisant le critère de Hill et la courbe d'essai de traction $\sigma_{n+1,eq} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$. L'équation vectorielle (14) est donc devenue une équation scalaire où la seule inconnue $\Delta\lambda$ peut être obtenue par résolution d'un trinôme du second degré :

$$\Delta\lambda^2 \left(b^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)p_1 \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right) + \Delta\lambda \left(2b + (a - b)p_1 \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right) + 1 = \frac{A}{\sigma_{eq}^2} \quad (17)$$

Nous notons que σ_I est inconnu au pas $n + 1$ mais, en supposant sa variation faible entre deux pas consécutifs, sa valeur à la dernière itération d'équilibre peut être utilisée pour éviter une résolution itérative de (17).

Remarque 1. Cette méthode scalaire transforme le vecteur de contraintes inconnu en contrainte équivalente qui est déterminée en utilisant la courbe d'essai de traction. Cela exige l'hypothèse de l'écroutissage isotrope du matériau.

Remarque 2. Dans le cas où les déformations élastiques $\{\varepsilon^{elas}\}$ sont très petites par rapport aux déformations plastiques $\{\varepsilon^P\}$, par exemple dans un procédé d'emboutissage, le coefficient de Poisson peut être approximativement exprimé en fonction du coefficient d'anisotropie par $\nu = \frac{r}{1+r}$ et le produit matriciel $[H_e][P]$ donne une matrice scalaire $E[I]$. La transformation de l'équation vectorielle (7) en une équation scalaire est immédiate :

$$(1 + \Delta\lambda E)^2 \sigma_{n+1,eq}^2 = A \tag{18}$$

Cette équation peut aussi être retrouvée à partir de (17) en remarquant que $a = b = E$ si $\nu = \frac{r}{1+r}$.

4. Validation numérique

Nous avons comparé le présent algorithme scalaire à l'Algorithme du Retour Radial, ainsi qu'à des résolutions incrémentales par Abaqus Standard. Pour l'emboutissage d'une boîte carrée (cas test de Numisheet'93 [5]) les

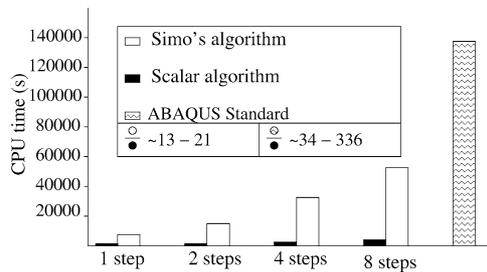


Fig. 1. Temps CPU pour une boîte carrée.

Fig. 1. CPU time for a square box.

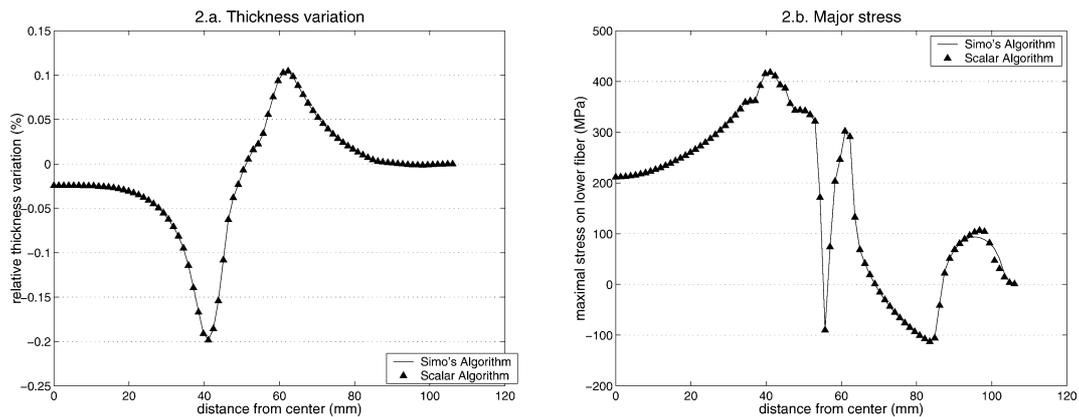


Fig. 2. (a) Variations de l'épaisseur ; (b) contraintes maximales.

Fig. 2. (a) Thickness variations; (b) major stress.

résultats sur les distributions de déformations et de contraintes sont en très bon accord entre les deux algorithmes. La Fig. 1 montre que les temps CPU utilisés par l'algorithme du Retour Radial sont de 13 à 21 fois supérieurs à ceux utilisés par le présent algorithme scalaire.

Dans le cas de l'emboutissage d'une boîte carrée, le temps gagné est là encore non négligeable [6]. Les Figs. 2(a) et (b) montrent la variation d'épaisseur dans la direction radiale et les contraintes principales maximales obtenues par les deux algorithmes de calcul. On constate un très bon accord entre les deux algorithmes.

5. Conclusion

Nous avons présenté un nouvel algorithme d'intégration plastique qui transforme le vecteur des contraintes inconnu en contrainte équivalente et exploite la courbe d'essai de traction au maximum. L'équation (17) permet d'obtenir l'incrément du multiplicateur plastique $\Delta\lambda$ sans avoir à utiliser la résolution itérative de Newton–Raphson. Nous avons ainsi diminué considérablement le temps de calcul nécessaire pour réaliser l'intégration plastique sans perdre la moindre précision. L'incrément $\Delta\lambda$ étant connu, l'incrément des contraintes peut être calculé et cumulé pour obtenir les contraintes totales.

Références

- [1] J.C. Simo, R.L. Taylor, A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 22 (1986) 649–670.
- [2] J.C. Simo, M. Ortiz, A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Comput. Meth. Appl. Eng.* 51 (1985) 221–245.
- [3] A. Cherouat, Y.Q. Guo, K. Saanouni, Y.M. Li, K. Debray, G. Loppin, Inverse versus incremental numerical approaches for ductile damage prediction in sheet metal forming, *Int. J. Forming Processes*, à paraître.
- [4] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1996.
- [5] A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Oñate, R. Wagoner, in: *Proceedings of the International Conference NUMISHEET'93*, Riken, Tokyo, 1993.
- [6] Y.Q. Guo, Y.M. Li, F. Bogard, I. Titeux, K. Debray, L. Dubreux, An efficient algorithm of plastic integration for damage modelling in sheet forming process, in: *8th Int. Conf. on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM*, 2004.