



Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Mécanique 332 (2004) 979–986



<http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/>

Mécanique de la rupture fragile en présence de plasticité : modélisation de la fissure par une entaille

Yves Wadier*, Eric Lorentz

*Laboratoire de mécanique des structures industrielles durables, unité mixte de recherche CNRS/Electricité de France,
1, avenue Général de Gaulle, 92141 Clamart cedex, France*

Reçu le 22 juin 2004 ; accepté après révision le 28 septembre 2004

Disponible sur Internet le 5 novembre 2004

Présenté par Huy Duong Bui

Résumé

En mécanique de la rupture élastoplastique, la modélisation d'une fissure par une coupure du plan est source de difficultés. On choisit alors de modéliser la fissure par une entaille et on définit un taux de restitution de l'énergie en plasticité en s'appuyant sur la formulation de Francfort–Marigo pour les milieux fragiles et sur la mécanique continue de l'endommagement. Le modèle d'entaille remédie à la fois au paradoxe de Rice et aux effets d'échelle de la théorie de Francfort–Marigo. Les résultats obtenus sur une étude relative à l'effet « petit défaut » sont en bon accord avec l'expérience. *Pour citer cet article : Y. Wadier, E. Lorentz, C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Brittle fracture in a plastic medium: advantage of modelling a crack by a notch. Some issues are met in elastic-plastic fracture mechanics if the crack is modelled by a sharp tipped crack. They may be overcome with a notch model. An energy release rate can be defined using the Francfort and Marigo theory and Continuum Damage Mechanics. In particular, the paradox of Rice and some spurious scale effects are removed with this approach. The results obtained in the case of the analysis of the shallow crack effect are in good agreement with the experimental results. *To cite this article: Y. Wadier, E. Lorentz, C. R. Mécanique 332 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Rupture ; Plasticité ; Endommagement ; Entaille ; Minimisation de l'énergie

Keywords: Fracture; Plasticity; Damage mechanics; Notch; Energy minimisation

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : yves.wadier@edf.fr (Y. Wadier).

Abridged English version

The Francfort and Marigo theory of elastic fracture Mechanics extends Griffith's theory using a minimisation principle. In particular, initiation and sudden propagation of cracks can be predicted. This theory has been extended to the case of an elastoplastic material by introducing the energy contributions due to plasticity into the free Helmholtz's energy and the dissipation potential, assuming that fracture mechanisms and plasticity are independent (2). Then, if a single crack is considered, an energy release rate called G_P can be defined, in the same way as previously done in elasticity (3).

In 1966, Rice demonstrated that G_P must be zero for a continuously growing crack in an elastic-plastic material where the flow strength saturates to a finite value at large strain, which is called the paradox of Rice. In 1976, Kfoury and Miller considered an unbounded flow strength material (linear hardening) using finite element computations. Their results were in agreement with this paradox. Nevertheless, it can be shown that it is due to an insufficiently refined mesh: actually, G_P does not vanish in the special case of linear hardening (Fig. 2). However, for bounded flow strengths, G_P indeed vanishes and the paradox of Rice is observed.

The Francfort and Marigo theory provides an original answer to the paradox for sudden crack propagation. Indeed, finite lengths of crack propagation are considered instead of infinitesimal ones corresponding to the case of a continuously propagating crack. In that way, a mean energy release rate is defined (5) which overcomes the Paradox or Rice any time a finite crack propagation is predicted. Unfortunately, a new paradox arises, related to spurious scale effects induced by Griffith's hypotheses.

These considerations lead us to propose a notch model to represent a crack. A damaged area related to the notch propagation (Fig. 3) is considered instead of a discontinuous displacement field related to the crack propagation. The approach belongs to the framework of damage Mechanics; the damage field is equal to zero inside the sound area and to one (stiffness free material) inside the propagation notch. In the case of an elastic constitutive law, the evolution of damage is governed by the minimisation of a total energy defined as a function of the displacement and damage fields (6). In the case of an elastic-plastic constitutive law, the total energy is extended, assuming again that fracture mechanisms and plasticity are independent (8). It is finally possible to define a criteria related to the maximum of the mean energy release rate G_P with respect to the length of the notch propagation.

This model is applied to the analysis of the 'shallow crack effect' which has often been observed experimentally: a significant increase of the toughness is observed for specimens with small cracks in comparison to specimens with large cracks. In the context of the European Project VOCALIST, several tests have been carried out on different SENB specimens (parallelepipedic cracked bars submitted to bending) containing large or small cracks. They clearly exhibit the shallow crack effect. Their numerical simulation with Code_Aster, the finite element code of EDF, are presented here. The agreement between the predictions through the energy approach and the experimental results is very good.

1. Introduction

Un des problèmes rencontrés lors du développement de la mécanique de la rupture élastoplastique réside dans le célèbre paradoxe de Rice [1] qui stipule que la propagation d'une fissure dans un matériau à comportement élastoplastique (avec écrouissage borné et propagation en régime permanent) se fait à taux de restitution d'énergie nul. De nombreux paramètres ont dès lors été proposés pour tenter de contourner ce paradoxe, mais généralement au détriment de leur signification physique [2]. L'origine essentielle des problèmes nous semble résider dans le choix d'une modélisation de la fissure par une coupure du plan. Après avoir illustré ce point, nous proposons une alternative qui vise à caractériser l'amorçage de fissures pré-existantes ou non, en régime fragile ou en présence de plasticité et pour des propagations progressives ou brutales, donc avec effets dynamiques induits.

Cette alternative se fonde sur une modélisation de la fissure par une entaille et s'appuie à la fois sur la formulation de Francfort–Marigo [3] pour les milieux fragiles et sur la mécanique continue de l'endommagement. Elle

permet de lever le paradoxe de Rice ainsi que les effets d'échelle indésirables de l'approche Francfort–Marigo. L'idée du modèle d'entaille n'est pas nouvelle puisqu'elle a déjà été utilisée par Bui, précisément pour lever ce paradoxe [4,5]. Diverses comparaisons avec l'expérience nous semblent prometteuses, comme celle présentée ici relative à l'effet « petit défaut ».

2. Modélisation de la fissure par une coupure du plan

2.1. Utilisation de la théorie de Francfort Marigo

La formulation [3] en élasticité se fonde sur la minimisation d'une énergie E_{FM} qui dépend à la fois des déplacements u et des surfaces fissurées potentielles S (ou nouvellement créées ΔS) :

$$E_{FM}(u, S) = \int_{\Omega/S} \Phi_{el}(\varepsilon(u)) d\Omega + G_c \text{Aire}(\Delta S) \quad (1)$$

où Ω est le domaine occupé par la structure, Φ_{el} la densité d'énergie libre élastique et G_c l'énergie de fissuration du matériau. Conformément à l'hypothèse de Griffith, l'énergie dissipée est bien proportionnelle à l'aire de la surface créée. En fait, (1) définit une énergie incrémentale : la séquence de chargement est discrétisée en incréments finis et la minimisation permet de déterminer l'état du système (u, S) à la fin d'un incrément connaissant celui au début de l'incrément (u^-, S^-) , où on notera dorénavant ΔQ la variation d'une quantité Q au cours de l'incrément considéré. La minimisation par rapport aux déplacements traduit l'équation d'équilibre sous forme variationnelle (minimisation de l'énergie potentielle à fissures fixées). Quant à la minimisation par rapport à toutes les surfaces fissurées possibles, elle peut être liée à la notion de loi de comportement globale [6,7] dans laquelle la variable de fissuration apparaît comme un champ de variable interne.

La formulation [3] a été étendue à la plasticité en introduisant la contribution plastique dans l'énergie libre et dans le potentiel de dissipation, en supposant que les mécanismes de dissipations plastique et de rupture sont indépendants [8]. Une énergie potentielle incrémentale W et un taux de restitution d'énergie G_P caractérisant l'évolution progressive d'une fissure, ont pu alors être définis par :

$$W(\Delta S) = \underset{(\Delta u, \Delta \varepsilon^P, \Delta \alpha)}{\text{Min}} \left[F(u^- + \Delta u, \varepsilon^P + \Delta \varepsilon^P, \alpha^- + \Delta \alpha, S^- \cup \Delta S) + D_{pl}(\Delta \alpha, \Delta \varepsilon^P) - W_{ext} \cdot \Delta u \right] \quad (2)$$

$$G_P(dS) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{W(\emptyset) - W(dS)}{\text{Aire}(dS)} \quad (3)$$

en appelant α le champ des variables internes d'écroutissage, ε^P le champ de déformation plastique, F l'énergie libre de la structure, D_{pl} le potentiel de dissipation plastique, W_{ext} le travail des efforts extérieurs et dS une propagation infinitésimale de la fissure.

2.2. Confrontation au paradoxe de Rice

Dans le cas d'un matériau élastoplastique avec critère de von Mises et écroutissage linéaire, le paradoxe de Rice est évité [9]. Ce résultat peut être illustré à l'aide d'une comparaison avec les résultats d'une étude de Kfoury et Rice [10] qui traite également le cas de l'écroutissage linéaire. On considère une éprouvette fissurée dite « CCP » constituée d'une plaque avec fissure centrale, et soumise à un chargement de traction en déplacements imposés sur le bord, de valeur U_{max} . On appelle σ_y la limite d'élasticité et h le module d'écroutissage du matériau. On se place dans le cadre des déformations planes, et on désigne par dl la propagation (suffisamment petite) de la fissure. On trace alors la courbe, appelée par la suite « Courbe de Rice », donnant G_P divisé par G_{el} (taux de restitution élastique calculé en supposant le comportement élastique) en fonction du paramètre S défini par :

$$S = dl(\sigma_y/K_1)^2 \quad (4)$$

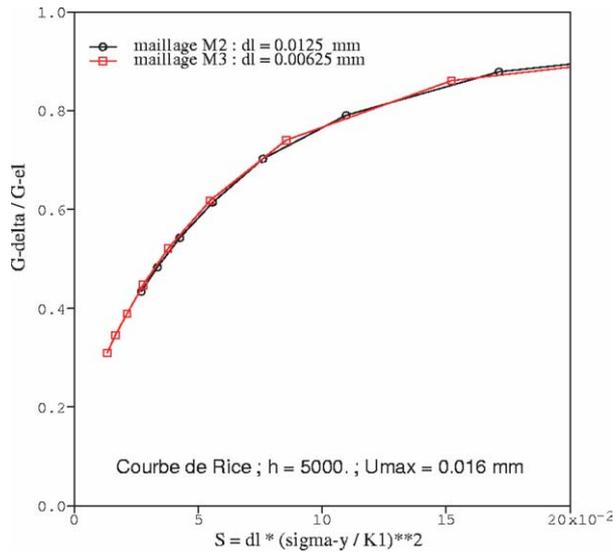


Fig. 1. Résultat comparable à celui de Rice.

Fig. 1. Result similar to Rice's result.

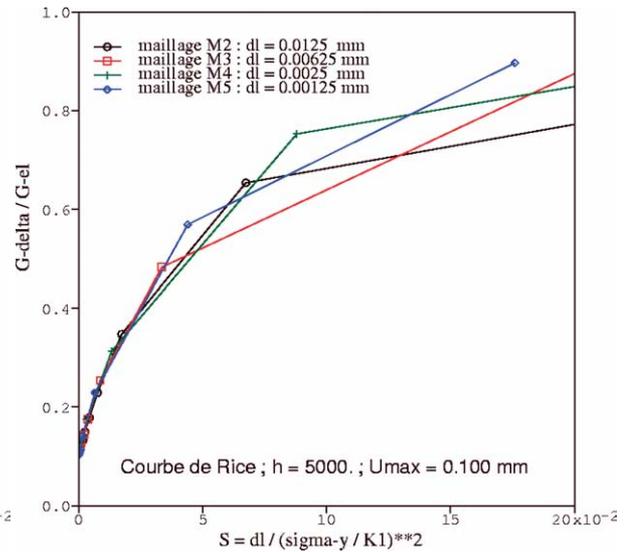


Fig. 2. Résultat obtenu avec maillages très fins.

Fig. 2. Result obtained with very fine meshes.

où K_1 est le coefficient d'intensité des contraintes déduit de G_{el} par la formule d'Irwin. L'utilisation de maillages insuffisamment raffinés permet d'obtenir un résultat en tout point comparable à celui de Kfourri, Rice, cf. Fig. 1, qui suggèrent alors à juste titre : G_P tend vers 0 avec dl . Cependant l'utilisation de maillages beaucoup plus fins et d'un chargement plus élevé, conduit au résultat inverse, cf. Fig. 2, à savoir que G_P ne tend pas vers 0. Le traitement de la même configuration, mais avec un module d'écroutissage nul (plasticité parfaite), permet par contre de confirmer le paradoxe de Rice.

Ce paradoxe peut donc être remis en cause dans certains cas particuliers (écroutissage linéaire) mais reste entier dans le cas général (écroutissage borné) et la question d'un critère énergétique de rupture en plasticité reste posée.

2.3. Propagations finies et effets d'échelle

La formulation de Francfort–Marigo apporte une solution originale à ce problème. Au lieu de considérer des propagations infinitésimales de fissures dS , il convient plutôt de conduire la démarche de minimisation jusqu'à son terme, et donc de minimiser également W par rapport à des propagations finies ΔS . On est alors amené à définir un taux de restitution d'énergie moyen $G_P(\Delta S)$ tel que :

$$G_P(\Delta S) =_{\text{déf}} - \frac{W(\Delta S) - W(\emptyset)}{\text{Aire}(\Delta S)} \quad (5)$$

Le paradoxe de Rice sera surmonté dans tous les cas de propagations finies (cas fréquent en clivage). Mais un nouveau paradoxe, lié à des effets d'échelle indésirables, apparaît. Il se traduit par une contrainte à rupture d'un barreau élastique d'autant plus faible que le barreau est long [11]. En effet, si on néglige les effets dynamiques, la variation d'énergie du barreau entre l'état avant rupture et l'état après rupture (énergie nulle) est proportionnelle à la fois à la longueur de ce barreau et au carré de la contrainte dans le barreau. Cette variation devant être égale à l'énergie dissipée en rupture, la contrainte critique varie donc inversement à la racine de la longueur du barreau, ce qui est contraire à l'expérience.

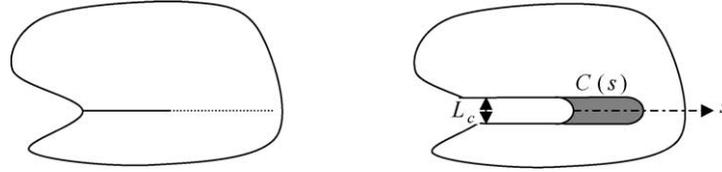


Fig. 3. Modélisation de la fissure par une entaille.

Fig. 3. Modelling of a crack by a notch.

3. Modélisation de la fissure par une entaille

3.1. Introduction de l'endommagement

Nous franchissons maintenant une étape supplémentaire en représentant les surfaces fissurées non plus comme des surfaces de discontinuité du champ de déplacement mais comme des zones endommagées à la rigidité résiduelle nulle. La fissure réelle est ainsi modélisée de façon épaissie, comme une entaille de largeur L_c , voir Fig. 3. Il ne s'agit donc plus de fissuration stricto sensu mais d'endommagement, mécanisme local de dégradation caractérisé par une énergie volumique dissipée à rupture w_c , c'est-à-dire l'énergie dissipée par un point matériel passant de l'état sain $\chi = 0$ à l'état endommagé $\chi = 1$, où χ désigne la nouvelle variable interne d'endommagement.

En conservant le cadre des lois de comportement globales, l'évolution de l'endommagement est alors donnée par la minimisation de l'énergie suivante, déjà étudiée dans [12] pour sa simplicité :

$$E(u, \chi) = \int_{\Omega} [(1 - \chi)\Phi_{el}(\varepsilon(u)) + \Delta\chi w_c] d\Omega \quad (6)$$

L'égalité des énergies dissipées dans une avancée de la fissure ou de l'entaille permet d'établir la relation naturelle entre l'énergie de fissuration du modèle de rupture et l'énergie dissipée volumique du modèle d'endommagement :

$$G_c = w_c L_c \quad (7)$$

Le mécanisme de rupture est dorénavant caractérisé par deux grandeurs dépendant du matériau, w_c et L_c , à la différence de la loi de Griffith qui ne dépend que de la seule énergie de fissuration G_c : cela permet de corriger le paradoxe lié aux effets d'échelle annoncé en introduction. L'énergie (6) peut être étendue pour prendre en compte la plasticité. Conformément à l'hypothèse de rupture fragile, on suppose que la plasticité et la fissuration sont deux phénomènes découplés. On propose l'expression suivante :

$$E(u, \varepsilon^p, \alpha, \chi) = \int_{\Omega} [(1 - \chi)\Phi_{el}(\varepsilon(u), \varepsilon^p) + \Delta\chi w_c] d\Omega + E_{bl}(\alpha) + D_{pl}(\Delta\varepsilon^p, \Delta\alpha) \quad (8)$$

où ε^p , α , E_{bl} et D_{pl} désignent respectivement les champs de déformation plastique et de variables d'écrouissage, l'énergie libre bloquée par l'écrouissage et la dissipation plastique.

3.2. Critère d'amorçage en rupture fragile

Nous nous restreignons dorénavant à des milieux 2D ainsi qu'à des trajets de fissuration pré-définis et sujets à une évolution continue de la fissure (pas de fissures en pointillés le long du trajet). On peut ainsi paramétrer la position de la fissure par l'abscisse curviligne s de son front, voir à nouveau Fig. 3, c'est-à-dire que l'on restreint les champs d'endommagement possibles χ à une famille $\chi(s)$. Sous ces hypothèses, on peut formuler la question de l'amorçage de fissures de la manière suivante : à un état donné $(u^-, \varepsilon^p^-, \alpha^-)$ du système, correspondant à une

évolution quasi-statique sans propagation de l'entaille, la solution sans propagation $s = 0$ est-elle toujours licite au regard de la minimisation de (8)? Dans le cas contraire, il y a propagation. On peut montrer qu'il s'agit de déterminer le minimum :

$$\min_{s \geq 0} E(u^-, \varepsilon^{P^-}, \alpha^-, \chi(s)) \quad (9)$$

Seuls les termes de (8) dépendant de χ interviennent explicitement dans la minimisation. En outre, comme l'endommagement est initialement nul, i.e. $\chi(0) = 0$, on a $\Delta\chi = \chi$. Donc (9) est équivalent à :

$$\min_{s \geq 0} \int_{\Omega} (w_c - \Phi_{el}^-) \chi(s) d\Omega \quad \text{avec : } \Phi_{el}^- = \Phi_{el}(\varepsilon(u^-), \varepsilon^{P^-}) \quad (10)$$

En appelant « copeau » $C(s)$ la zone endommagée, c'est-à-dire le support du champ $\chi(s)$, on obtient le problème d'optimisation suivant, dans lequel apparaît un taux de restitution d'énergie moyen $G_P(s)$:

$$\min_{s \geq 0} \underbrace{\int_{C(s)} w_c d\Omega}_{sL_c w_c = sG_c} - \int_{C(s)} \Phi_{el}^- d\Omega \quad \Leftrightarrow \quad \max_{s \geq 0} s(G_P(s) - G_c) \quad \text{où } G_P(s) = \frac{1}{s} \int_{C(s)} \Phi_{el}^- d\Omega \quad (11)$$

Il y aura propagation si le maximum (11) n'est pas atteint en $s = 0$, ou encore propagation si :

$$\exists s > 0 \quad G_P(s) \geq G_c \quad (12)$$

Ce critère reste valable si la fissure se propage de manière brutale en entraînant des effets dynamiques, puisque la minimisation par rapport au déplacement, c'est-à-dire les équations d'équilibre, n'intervient pas dans son expression. Il est également remarquable que ce critère ne s'appuie que sur la seule énergie élastique et non sur les termes d'énergie bloquée ou de dissipation plastique, grâce au découplage introduit en (8). Par ailleurs, la valeur finie du paramètre L_c implique que G_P est non nul dès que la contrainte est non nulle, même si s tend vers zéro, ce qui lève le paradoxe de Rice. Enfin, on peut noter que G_P s'exprime au moyen de la contrainte équivalente de von Mises et de la triaxialité (avec σ_{eq}^- la contrainte de von Mises, σ_H^- la contrainte hydrostatique, E et ν le module de Young et le coefficient de Poisson de l'opérateur d'élasticité supposé isotrope) :

$$G_P(s) = \frac{1}{s} \int_{C(s)} \frac{\sigma_{eq}^{-2}}{2E} R_\nu d\Omega \quad \text{où } R_\nu = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_H^-}{\sigma_{eq}^-} \right)^2 \quad (13)$$

En particulier, si la contrainte équivalente et la triaxialité sont bornées indépendamment du niveau de chargement (cas de la plasticité parfaite pour un problème anti-plan, par exemple), alors il en est de même de l'énergie élastique et donc de G_P . Dans ce cas, la fissure ne se propage jamais si cette borne est inférieure à l'énergie de fissuration G_c , i.e. la ruine plastique est privilégiée par rapport à la fissuration.

4. Applications : analyse de l'effet « petit défaut »

L'effet dit « petit défaut » a été observé maintes fois lors d'essais expérimentaux. Il correspond à un très net accroissement de la ténacité apparente en clivage pour une éprouvette comportant un « petit défaut » par rapport à la même éprouvette comportant un « grand défaut ». Cette ténacité est mesurée par le paramètre K_{JC} qui correspond à la valeur critique de K_J , associé à J – intégrale de Rice – par la relation d'Irwin. L'effet « petit défaut » signifie donc clairement que la ténacité K_{JC} n'est pas un paramètre intrinsèque au matériau. Pour le caractériser, différents essais ont été réalisés dans le cadre du projet européen VOCALIST [13], sur des éprouvettes parallélépipédiques fissurées, appelées SENB, soumises à un chargement en flexion 3 points, cf. Fig. 4. On considère alors 3 types d'éprouvettes :

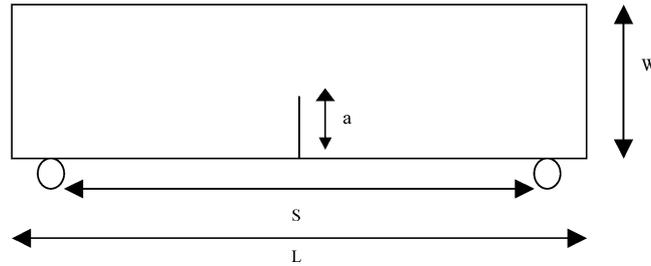


Fig. 4. Géométrie de l'éprouvette SENB. $S = 100$ mm, $L = 125$ mm, $W = 25$ mm, $a = 12,5$ mm (grand défaut) ou $a = 2,5$ mm (petit défaut), épaisseur = 25 mm; $E = 214\,000$ MPa (module d'Young), $\nu = 0,3$ (coefficient de Poisson), $\sigma_y = 568$ MPa (limite élastique), $\sigma_{eq-20} = 900$ MPa (contrainte équivalente à 20 % de déformation totale), $\alpha = 212$ MPa (pente d'écrouissage à partir de 20 % de déformation totale).

Fig. 4. Geometry of the SENB specimen.

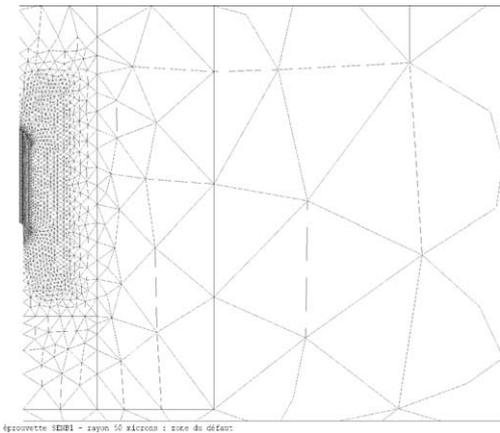


Fig. 5. Maillage de la zone de l'entaille.

Fig. 5. Mesh in the notch area.

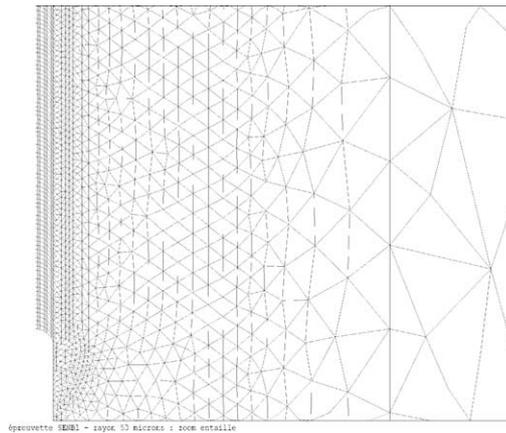


Fig. 6. Maillage en fond d'entaille.

Fig. 6. Mesh in the notch tip area.

- les éprouvettes CT25, utilisées pour identifier la ténacité du matériau,
- les éprouvettes SENB avec grande fissure, de longueur égale à 50 % de l'épaisseur de l'éprouvette,
- les éprouvettes SENB avec petite fissure, de longueur égale à 10 % de l'épaisseur de l'éprouvette.

On représente les éprouvettes SENB en déformations planes et on ne considère que la moitié de la structure par raison de symétrie. On adopte une largeur d'entaille petite par rapport à la taille de la fissure, $L_c = 100$ μm , qui impose l'emploi de mailles de 6 μm de côté au voisinage du fond d'entaille, soit un maillage d'environ 10 000 nœuds, cf. Figs. 5 et 6. Le comportement du matériau est représenté par une loi de plasticité avec écrouissage isotrope et critère de von Mises. Les calculs sont réalisés avec Code_Aster, le code éléments finis d'EDF.

Nous avons tout d'abord identifié l'énergie de fissuration G_c en utilisant les valeurs connues du chargement à rupture sur éprouvettes CT. Cette énergie de fissuration, supposée être caractéristique du matériau considéré, permet de prévoir la charge à rupture des éprouvettes SENB comportant soit un grand, soit un petit défaut. Cette charge à rupture permet alors de calculer la ténacité apparente en termes de K_{JC} . Le tableau ci dessous permet de comparer les prévisions numériques aux résultats expérimentaux. On peut constater que l'accord entre simulation et expérience est très bon. Outre le cas présenté, on a traité 3 autres configurations d'essais avec différents matériaux et on a obtenu le même type de résultat.

Bien que l'énergie de fissuration G_c dépende directement du choix de la largeur de l'entaille L_c , on a pu vérifier que ce choix a peu d'influence sur les résultats ci dessous. Le traitement des cas : $L_c = 50, 100$ et 200 microns conduit à des variations sur K_J inférieures à 5 %. L'identification expérimentale de cette largeur d'entaille sur un simple barreau en traction est actuellement à l'étude.

Tableau 1
Comparaison entre simulation et expérience

Table 1
Comparison between simulation and tests

K_{JC} (MPa m ^{1/2})	Eprouvette CT	SENB « grand défaut »	SENB « petit défaut »
Prévisions numériques	–	87,0	152,5
Résultats expérimentaux	82,0	94,0	147,0

5. Conclusion

A l'issue de la comparaison expérience – théorie, le taux de restitution d'énergie moyen défini en (11) semble être un bon candidat pour prédire l'amorçage de fissures. D'autres résultats le confirment également, notamment la bonne représentation de l'effet « pré-chargement à chaud » (en anglais : « warm pre-stress effect »), directement lié aux effets de décharge [14]. Comme ce paramètre tient compte d'éventuelles propagations brutales, entraînant de ce fait des effets dynamiques, une piste de recherche consiste à étendre son emploi pour caractériser également la propagation et donc l'arrêt de fissure, le cas échéant. Il pourrait ainsi servir d'alternative à l'emploi de modèles cohésifs ; a minima, une comparaison entre ces deux approches semble requise pour s'assurer de leur cohérence.

Références

- [1] J.R. Rice, An examination of the fracture mechanics energy balance from the point of view of continuum mechanics, in: Yokobori, et al. (Eds.), Proc. 1st Int. Conf. Fracture, vol. 1, 1966, pp. 309–340.
- [2] B. Moran, C.F. Shih, Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance, Eng. Frac. Mech. 27 (6) (1987) 615–642.
- [3] G. Francfort, J.J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimisation problem, J. Mech. Phys. Sol. 46 (8) (1998) 1319–1342.
- [4] H.D. Bui, Solution explicite d'un problème de frontière libre en élastoplasticité avec endommagement, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Iib 290 (1980).
- [5] H.D. Bui, A. Ehrlacher, Propagation of Damage in Elastic and Plastic Solids, Advances in Fracture Mechanics, vol. 3, Pergamon Press, 1981, p. 533.
- [6] P. Germain, Q.S. Nguyen, P. Suquet, Continuum thermodynamics, J. Appl. Mech. 50 (12) (1983) 1010–1020.
- [7] B. Fedelich, A. Ehrlacher, An analysis of stability of equilibrium and of quasi-static transformation on the basis of the dissipation function, Eur. J. Mech. A Solids 16 (5) (1997) 833–855.
- [8] E. Lorentz, Y. Wadier, G. Debruyne, Mécanique de la rupture fragile en présence de plasticité : définition d'un taux de restitution d'énergie, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Iib 328 (2000) 657–662.
- [9] Y. Wadier, E. Lorentz, New considerations and results on crack separation energy rates in elastic-plastic fracture mechanics, ICF10, Honolulu, December 2001.
- [10] A.P. Kfoury, J.R. Rice, Elastic/plastic separation energy rate for crack advance in finite growth steps, in: D.M.R. Taplin (Ed.), Fracture, vol. 1, Univ. Waterloo Press, 1977.
- [11] M. Charlotte, G. Francfort, J.J. Marigo, L. Truskinovsky, Revisiting brittle fracture as an energy minimisation problem: comparison of Griffith & Barenblatt models, in: Symposium on Continuous Damage & Fracture, Cachan, France, October 2000.
- [12] G. Francfort, J.J. Marigo, Stable damage evolution in a brittle continuous medium, Eur. J. Mech. A Solids 12 (1993).
- [13] Y. Wadier, M. Bonnamy, Programme VOCALIST: the energy approach of elastoplastic fracture mechanics applied to the analysis of the shallow crack effect, ASME PVP, Cleveland, USA, 2003.
- [14] Y. Wadier, M. Bonnamy, The energy approach of elastoplastic fracture mechanics applied to the analysis of the warm pre-stress effect, ASME PVP, Cleveland, USA, 2003.