



# Étude numérique de l'écoulement d'un fluide non newtonien thermodépendant entre deux plaques parallèles

Nguyen Van Tuan\*, Michel Lebouche

*Laboratoire d'énergétique et de mécanique théorique et appliquée, LEMTA, UMR 7563, 2, avenue de la Forêt de Haye,  
BP 160, 54500 Vandoeuvre-Les Nancy, France*

Reçu le 15 juillet 2004 ; accepté après révision le 19 octobre 2004

Présenté par Michel Combarous

---

## Résumé

Dans cette étude, on s'intéresse au transfert de chaleur d'un fluide non newtonien fortement thermodépendant en écoulement non isotherme entre deux plaques parallèles chauffées. On étudie, par voie numérique, l'influence des différents paramètres sur les évolutions de la couche limite thermique et du nombre de Nusselt. Les corrélations sont proposées pour calculer le transfert de chaleur dans deux cas de chauffage pariétal à densité de flux ou à température constante. **Pour citer cet article : N. Van Tuan, M. Lebouche, C. R. Mecanique 333 (2005).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Numerical study of a thermodependent non Newtonian fluid flow between two parallel plates.** In this study, the heat transfer of a non Newtonian thermodependent fluid flowing between two parallel plates is considered. The effects of different parameters on the evolutions of thermal boundary layer and of Nusselt number are numerically investigated in two heating cases and correlations are proposed to compute the heat transfer. **To cite this article: N. Van Tuan, M. Lebouche, C. R. Mecanique 333 (2005).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Transferts thermiques ; Écoulement entre deux plaques parallèles ; Non newtoniens ; Thermodépendant ; Transfert de chaleur ; Corrélation

*Keywords:* Heat transfer; Flow between parallel plates; Non Newtonian; Thermodependent; Correlation

---

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [vnguyen@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:vnguyen@ensem.inpl-nancy.fr) (N. Van Tuan).

### 1. Introduction

Le développement industriel des échangeurs de chaleur est considérable, notamment dans les domaines agro-alimentaire et chimique. Les fluides rencontrés sont en général non seulement non-newtoniens et mais aussi thermodépendants. La loi de comportement la plus souvent utilisée est celle d’Oswald De Waele [1,2].

On considère dans ce travail l’écoulement des fluides rhéofluidifiants dont la consistance dépend de la température dans un canal cylindrique chauffé. Dans des études antérieures, le problème des pertes de charge et de transfert de chaleur ont été étudié pour l’écoulement d’une solution de Carboxyméthylcellulose (C.M.C.) à 3 % en poids considéré comme modèle de beaucoup de fluides alimentaires dans un canal cylindrique chauffé par une densité de flux constante [3–5]. Dans cette présente étude, on considère cas de l’écoulement entre deux plaques parallèles dans deux cas de chauffage, à température ou à densité de flux constante. On s’intéresse aux influences des conditions thermique et dynamique sur l’évolution de la couche limite thermique et du nombre de Nusselt et à la recherche des corrélations pour le transfert de chaleur.

### 2. Position du problème et modèle mathématique

La Fig. 1 schématise le problème étudié.

En adoptant Les hypothèses suivantes :

- (a) écoulement stationnaire et axisymétrique ;
  - (b) conduction de chaleur axiale négligeable ;
  - (c) chaleur spécifique et conductibilité thermique constantes ;
- les équations régissant l’écoulement laminaire s’écrivent alors :

– équation de continuité :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

– équation du mouvement :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(\tau)}{\partial y} \tag{2}$$

– équation de l’énergie :

$$\rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

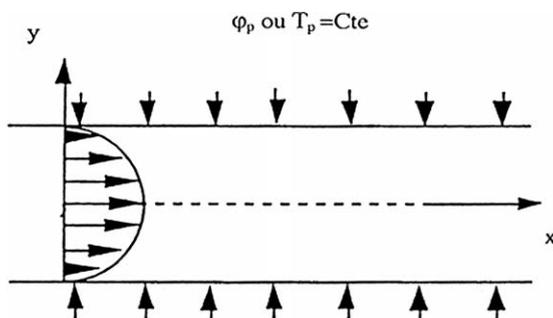


Fig. 1. Le problème étudié.

Fig. 1. The problem studied.

De plus la conservation du débit est exprimée par l'équation :

$$\int_0^e u \, dy = \dot{m} \quad (\text{Cte}) \quad (4)$$

$u$  et  $v$  sont les composantes axiale et radiale de la vitesse en un point  $M$  de la section d'abscisse  $z$ ,  $\tau$  la contrainte de cisaillement,  $p$  la pression (qui ne dépend que de  $z$ ),  $T$  la température,  $e$  la demi distance des plaques. Pour la solution de Carboxyméthylcellulose C.M.C. à 3 % en poids, la contrainte de cisaillement et le gradient de vitesse sont liés par la loi d'Oswald De Waele :

$$\tau = K(T) \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}$$

où  $n$  désigne l'indice de structure et  $K$  la consistance qui est fonction exponentielle de la température :

$$K(T) = a e^{-bT}$$

Les conditions aux limites sont :

$$u = u_d \left( \frac{3n+1}{n+1} \right) \left( 1 - \left( \frac{y}{e} \right)^{1+1/n} \right)$$

$$T(0, y) = T_0$$

$$u(x, e) = v(x, e) = 0$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) (x, e) = -\frac{\varphi_p}{\lambda} \quad \text{ou} \quad T(x, e) = T_p$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0$$

Le code numérique développé pour la simulation numérique dans les études antérieures a été modifié et adapté pour intégrer ce système d'équations. Il est basé sur le schéma aux différences finies de Dufort et Frankel [6,7]. La discrétisation donne un algorithme explicite. A chaque itération, il permet de calculer la pression à l'aide des Éqs. (2) et (4), puis la composante axiale de la vitesse par (2), ensuite la température par (3) et enfin la composante radiale de la vitesse à partir de (1).

### 3. Résultats et discussions

En présence d'un chauffage pariétal, le transfert de chaleur s'effectue depuis l'origine de la zone chauffée, une couche limite thermique se développe dans cette zone. L'épaisseur de cette couche dépend de la densité de flux, du nombre de Reynolds. Les évolutions du profil de température sont tracées aux Fig. 2. Elle montre bien que l'épaisseur de la couche limite thermique diminue quand l'intensité du flux augmente (Fig. 3 (gauche)). Cette diminution provient de l'accroissement du gradient pariétal de la vitesse axiale induit par la diminution de la pseudoplasticité du fluide, qui est d'autant plus forte que la solution C.M.C. considéré est thermodépendant. Ce résultat met en évidence l'effet bénéfique de la *thermodépendance*. C'est dans cette zone de couche thermique que s'effectue le transfert de chaleur qui est caractérisé par le nombre de Nusselt défini par :

$$Nu = \frac{D_h \varphi_p}{\lambda(T_p(x) - T_m(x))}$$

où  $T_p(x)$  et  $T_m(x)$  sont respectivement les température de paroi et de mélange,  $D_h$  le diamètre hydraulique ( $D_h = 4e$ ).

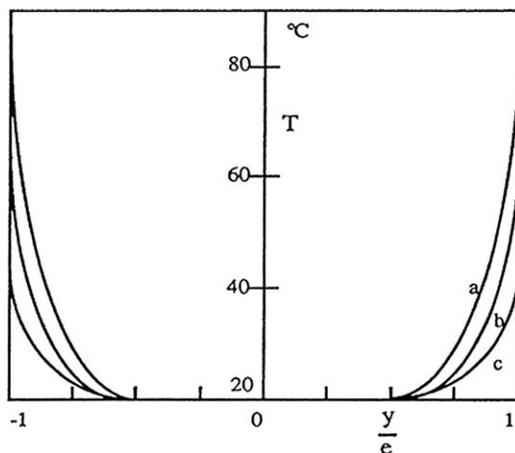


Fig. 2. Profil de température à  $x/D_h = 75$  (influence de l'intensité de chauffage) (a)  $T_p - T_0 = 50^\circ\text{C}$ ; (b)  $40^\circ\text{C}$ ; (c)  $20^\circ\text{C}$  ( $Re = 50$  et  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ).

Fig. 2. Temperature profile at  $x/D_h = 75$  (effects of heating intensity).

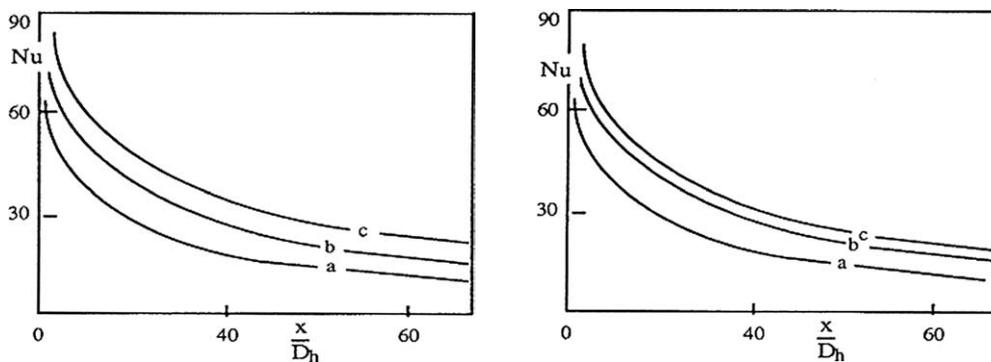


Fig. 3. Gauche : évolution du nombre de Nusselt en fonction de  $x/D_h$  (influence de l'intensité de chauffage) (a)  $T_p - T_0 = 20^\circ\text{C}$ ; (b)  $40^\circ\text{C}$ ; (c)  $50^\circ\text{C}$  ( $Re = 50$  et  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ). Droite : évolution du nombre de Nusselt en fonction de  $x/D_h$  (influence du nombre de Reynolds) (a)  $Re = 5$ ; (b)  $50$ ; (c)  $100$  ( $T_p - T_0 = 40^\circ\text{C}$  et  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ).

Fig. 3. Left: evolution of Nusselt number in function of  $x/D_h$  (effects of heating intensity) (a)  $T_p - T_0 = 20^\circ\text{C}$ ; (b)  $40^\circ\text{C}$ ; (c)  $50^\circ\text{C}$  ( $Re = 50$  et  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ). Evolution of Nusselt number in function of  $x/D_h$  (effects of Reynolds number) (a)  $Re = 5$ ; (b)  $50$ ; (c)  $100$  ( $T_p - T_0 = 40^\circ\text{C}$  and  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ).

Les évolutions du nombre de Nusselt sont présentées sur les Figs. 3. On note une augmentation de  $Nu$  quand la puissance de chauffage croît, un résultat compatible bien avec l'évolution de la couche limite thermique. Les autres figures donnent les influences du nombre de Reynolds et de la distance.

L'utilisation des groupements adimensionnels équivalents  $(b\varphi_p D_h)/(2\lambda)$  pour le cas  $\varphi_p = Cte$  ou pour  $K(T_m)/K(T_p)$  pour  $T_p = Cte$  qui caractérisent la thermodépendance du fluide permet d'établir des corrélations calculant le transfert de chaleur. Dans ce dernier cas, l'évolution du nombre de Nusselt rapportée au rapport  $(K(T_m)/K(T_p))^\alpha$  avec  $\alpha = 0,177$  en fonction du nombre de Cameron  $X^+$  est tracée à la Fig. 4. Cette variation est pratiquement linéaire et obtient la relation :

$$Nu = 1,210 \left( \frac{K(T_m)}{K(T_p)} \right)^\alpha (X^+)^{-0,353}$$

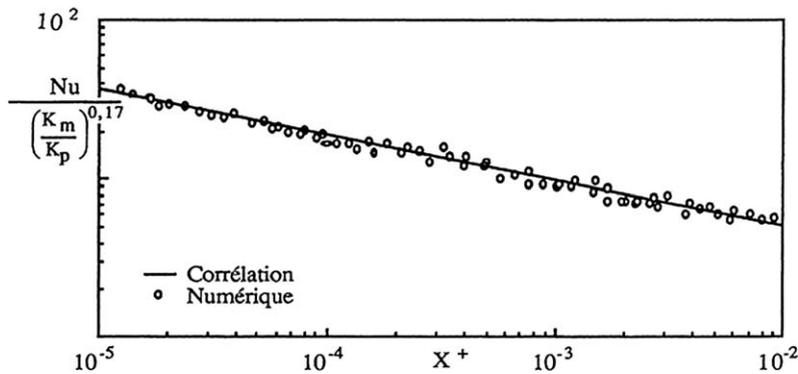


Fig. 4. Evolution du nombre de Nusselt normalisé en fonction du nombre de Cameron.

Fig. 4. Evolution of normalized Nusselt number in function of Cameron number.

De même manière, dans le deuxième cas :

$$Nu = 2,601 \left( \frac{b\varphi_p D_h}{2\lambda} \right)^\alpha (X^+)^{-0,260}$$

#### 4. Conclusion

Le problème de l'écoulement des fluides non newtoniens thermodépendants entre deux plaques parallèles chauffées pariétalement a été considéré. Son modèle mathématique a été intégré numériquement par un code des différences finies basé sur l'approximation de Dufort–Frankel. Les influences des conditions de la puissance de chauffage, du nombre de Reynolds sur les évolutions de la couche limite thermique et du nombre de Nusselt ont été présentés et discutés. Les résultats mettent en évidence les effets bénéfiques de la thermodépendance et permettent de proposer des corrélations permettant de calculer le nombre de Nusselt.

#### Références

- [1] M. Mores, S.L. Presti, M. Mancini, Rheology of scleroglucan dispersions, *J. Food Eng.* 50 (2001) 235.
- [2] H.I. Andersson, E. de Korte, Flow of a power-law fluid over a rotating disk, *Eur. J. Mech. B Fluids* 21 (2002) 317.
- [3] V.T. Nguyen, A. El Ouardighi, M. Lebouche, Une corrélation pour les pertes de charge des fluides non newtoniens thermodépendants, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II* 312 (1991) 345.
- [4] A. El Ouardighi, V.T. Nguyen, M. Lebouche, Ecoulement et transfert de chaleur par convection forcée pour un fluide non newtonien thermodépendant, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II* 308 (1989) 353.
- [5] V.T. Nguyen, A. El Ouardighi, M. Lebouche, Etude expérimentale des pertes de charge d'un fluide non newtonien thermodépendant, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II* 319 (1994) 983.
- [6] E.C. Dufort, S.P. Frankel, *Math. Tables Aids Comput.* 7 (1953) 135.
- [7] G.R. Joubert, Explicit difference approximation of Dufort–Frankel type of the one dimensional diffusion equation, *Numer. Math.* 18 (1971) 18–25.