Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Mecanique 333 (2005) 249–255
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Homogénéisation de coques minces piézoélectriques perforées

Marius Ghergu [a], Georges Griso [b], Houari Mechkour [c], Bernadette Miara [c,*]

[a] *University of Craiova, Department of Mathematics, Street A.I. Cuza No. 13, 200585, Craiova, Roumanie*
[b] *Université Pierre et Marie Curie, laboratoire Jacques-Louis Lions, 4, place Jussieu, 75252 Paris, France*
[c] *Laboratoire de modélisation et simulation numérique, ESIEE, 2, boulevard Blaise Pascal, 93160 Noisy-le-Grand, France*

Reçu le 6 octobre 2004 ; accepté après révision le 9 novembre 2004

Disponible sur Internet le 22 janvier 2005

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Dans cette Note on établit la loi de comportement limite d'un matériau piézoélectrique présentant une structure périodiquement perforée et dont la configuration de référence est une coque mince d'épaisseur fixée. La justification du nouveau modèle homogène associé (on montre que le problème limite *global* et les problèmes *locaux* sont d'une nature plus complexe que celle du problème initial) est obtenue en utilisant la méthode de l'éclatement périodique introduite par Cioranescu, Damlamian et Griso. ***Pour citer cet article : M. Ghergu et al., C. R. Mecanique 333 (2005).***

Abstract

Homogenization of thin piezoelectric perforated shells. In this Note we establish the limit constitutive law of a piezoelectric material with periodically perforated microstructures and whose reference configuration is a thin shell with fixed thickness. The justification of the new associated model (we show that the limit *global* and *local* problems are more complicated than the *intial* one) is obtained using the periodic unfolding method introduced by Cioranescu, Damlamian and Griso. ***To cite this article: M. Ghergu et al., C. R. Mecanique 333 (2005).***

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; Homogénéisation ; Piézoélectricité ; Coques ; Perforations

Keywords: Computational solid mechanics; Homogenization; Piezoelectricity; Shells; Perforations

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : ghergumarius@yahoo.com (M. Ghergu), georges.griso@wanadoo.fr (G. Griso), mechkouh@esiee.fr (H. Mechkour), b.miara@esiee.fr (B. Miara).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2004.11.006

1. Introduction

Nous nous proposons dans cette Note d'étendre les résultats [1] obtenus dans le cas de structures tridimensionnelles piézoélectriques périodiquement *perforées* aux coques *minces* (Une application intéressante au filtrage spatial est donnée dans [2]). Dans le paragraphe suivant nous décrivons le problème variationnel à traiter, c'est-à-dire nous précisons *la géométrie des microstructures perforées* puis nous donnons *les équations d'équilibre* d'un corps constitué par un matériau dont *la loi de comportement* présente *un couplage* élastique-électrique. Nous présentons ensuite les propriétés asymptotiques de l'opérateur d'éclatement périodique $\mathcal{T}^\varepsilon$ qui permettent d'étudier la convergence de la suite constituée par les composantes covariantes du déplacement élastique $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}_\varepsilon$ et du potentiel électrique $\{\varphi^\varepsilon\}_\varepsilon$ lorsque la taille ε des perforations tend vers 0. Le modèle limite homogène est établi dans la dernière section.

2. Modèlisation bidimensionnelle

2.1. Configuration de référence

On considère un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. On note ε le paramètre positif qui représente la taille des microstructures élémentaires qui contiennent les trous ; l'étude asymptotique consistera à faire tendre ε vers zéro. On note $Y =]0,1[^2$ la cellule de référence et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a la décomposition unique $x = [x] + \{x\}$ avec $x - [x] \in Y$. Soit S la perforation de référence, $\overline{S} \subset Y$ et $Y^* = Y \setminus \overline{S}$, l'ensemble des perforations est obtenu par ε-periodicité : $S^\varepsilon = \varepsilon(\overline{S} + k) \cap \Omega, k \in \mathbb{Z}^2$.

La surface moyenne $\Theta(\overline{\Omega^\varepsilon})$ de la coque est construite à partir de l'injection $\Theta : \Omega^\varepsilon \to \mathbb{R}^3$, $\Theta \in \mathbb{C}^3(\overline{\Omega})$. On note $\{\boldsymbol{a}_i\}$[1] sa base covariante, $\{\boldsymbol{a}^i\}$ sa base contravariante, $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ les symboles de Christoffel et $a = \det(a_{\alpha\beta})$. On considère maintenant un corps dont la configuration de référence a pour surface moyenne $\Theta(\overline{\Omega^\varepsilon})$ et a une épaisseur fixe et « petite » $2t$.

2.2. Loi de comportement

Les caractéristiques du matériau piézoélectrique sont données par les trois tenseurs tridimensionnels, le tenseur de l'élasticité, le tenseur diélectrique et le tenseur de couplage piézoélectrique. En théorie bidimensionnelle il intervient quatre nouveaux tenseurs qui sont calculés à partir des précédents par une analyse asymptotique (due à Haenel [3], Éqs. 3.2.23, 3.2.27). Il s'agit de :

- $(c_M^{\alpha\beta\sigma\tau})$, le tenseur du quatrième ordre de l'*élasticité* qui apparait dans les modèles membranaires, il est symétrique et défini positif, $c_M^{\alpha\beta\sigma\tau} = c_M^{\beta\alpha\sigma\tau} = c_M^{\sigma\tau\alpha\beta}$, $\exists \alpha_c > 0 : c_M^{ijkl} X_{ij} X_{kl} \geqslant \alpha_c X_{ij} X_{ij}$, $\forall X_{ij} = X_{ji} \in \mathbb{R}$,
- $(c_F^{\alpha\beta\sigma\tau})$, le tenseur du quatrième ordre de l'*élasticité* qui apparait dans les modèles en flexion, il est symétrique et défini positif,
- $(d^{\alpha\beta})$, le tenseur du deuxième ordre *diélectrique*, il est symétrique et défini positif, $d^{\alpha\beta} = d^{\beta\alpha}$, $\exists \alpha_d > 0$: $d^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta \geqslant \alpha_d X_\alpha X_\beta$, $\forall X_\alpha \in \mathbb{R}$,
- $(\mathrm{e}^{\alpha\beta\sigma})$, le tenseur du troisième ordre de *couplage piézoelectrique*, il est symétrique, $\mathrm{e}^{\alpha\beta\sigma} = \mathrm{e}^{\beta\alpha\sigma}$.

Les composantes de chacun de ces tenseurs appartiennent à $L^\infty(\Omega^\varepsilon)$.

[1] Les indices et exposants latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3\}$, les indices et exposants grecs (excepté ε) prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1,2\}$. On applique la convention d'Einstein des indices et exposants répétés, on utilise des caractères gras pour représenter les vecteurs.

On considère un modèle de coques « à la Koiter » en coordonnées curvilignes (inspiré du modèle de Koiter pour les coques élastiques) dans lequel la loi de comportement qui lie les contraintes membrannaires $T^{\alpha\beta}$, les moments $M^{\alpha\beta}$ et les déplacements électriques D^{σ} (en composantes contravariantes) aux trois composantes covariantes $\boldsymbol{u}^{\varepsilon} = (u_i^{\varepsilon})$ du déplacement élastique $\boldsymbol{a}^i u_i^{\varepsilon}$ et au champ électrique φ^{ε} est donnée par :

$$\begin{cases} T^{\alpha\beta}(\boldsymbol{v},\psi) = c_M^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) + \mathrm{e}^{\alpha\beta\sigma}\partial_\sigma\psi \\ M^{\alpha\beta}(\boldsymbol{v},\psi) = -c_F^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) \\ D^{\sigma}(\boldsymbol{v},\psi) = -\mathrm{e}^{\alpha\beta\sigma}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) + d^{\sigma\tau}\partial_\tau\psi \end{cases}$$

où γ est le tenseur bidimensionnel linéarisé de *changement de métrique* :

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3$$

et ρ le tenseur bidimensionnel linéarisé de *changement de courbure* :

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) = (\partial_{\alpha\beta}^2 v_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\partial_\sigma v_3 - c_{\alpha\beta} v_3) + \big(b_\alpha^\sigma \partial_\beta v_\sigma + b_\beta^\sigma \partial_\alpha v_\sigma + (\partial_\beta b_\alpha^\sigma - b_\beta^\tau \Gamma_{\alpha\tau}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} b_\tau^\sigma) v_\sigma\big)$$

2.3. *Équations d'équilibre*

Deux types de conditions aux limites sont envisagées : une condition homogène de Dirichlet sur la frontière extérieure $\partial\Omega$ et une condition homogène de Neumann sur le bord des trous ∂S^{ε}. On introduit les espaces fonctionnels $V(\Omega^{\varepsilon}) = \{v \in H^1(\Omega^{\varepsilon}),\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, $\boldsymbol{V}(\Omega^{\varepsilon}) = (V(\Omega^{\varepsilon}))^2$, $W(\Omega^{\varepsilon}) = \{w \in H^2(\Omega^{\varepsilon}),\ w = 0,\ n_\alpha \partial_\alpha w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ où (n_1, n_2) est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et $\boldsymbol{V}_K(\Omega^{\varepsilon}) = V(\Omega^{\varepsilon}) \times V(\Omega^{\varepsilon}) \times W(\Omega^{\varepsilon})$. Sous les conditions classiques de régularité $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega^{\varepsilon})$ ($\boldsymbol{p}$ est la résultante des forces appliquées exprimée dans la base covariante), le couple $\boldsymbol{u}^{\varepsilon} = (u_i^{\varepsilon}) \in \boldsymbol{V}_K(\Omega^{\varepsilon})$, $\varphi^{\varepsilon} \in V(\Omega^{\varepsilon})$ est l'unique solution faible du problème variationnel :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega^{\varepsilon}} \big(c_K(\boldsymbol{u}^{\varepsilon},\boldsymbol{v}) + e_K(\boldsymbol{v},\varphi^{\varepsilon})\big)\sqrt{a}\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega^{e}} \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}\sqrt{a}\,\mathrm{d}x \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_K(\Omega^{\varepsilon}) \\ \displaystyle\int_{\Omega^{\varepsilon}} \big(-e_K(\boldsymbol{u}^{\varepsilon},\psi) + d_K(\varphi^{\varepsilon},\psi)\big)\sqrt{a}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \psi \in V(\Omega^{\varepsilon}) \end{cases} \tag{1}$$

avec la définition des opérateurs associés à ce modèle de coque de Koiter :

$$\begin{cases} c_K(\boldsymbol{u}^{\varepsilon},\boldsymbol{v}) = c_M^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) + \dfrac{t^2}{3} c_F^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon})\rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) \\ e_K(\boldsymbol{v},\psi) = e^{\alpha\beta\sigma}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v})\partial_\sigma\psi \\ d_K(\varphi^{\varepsilon},\psi) = d^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\ \partial_\beta\psi \end{cases}$$

On note que cette écriture permet de faire l'analogie avec le problème tridimensionnel ou le problème de plaques [4] mais ici, contrairement au problème de plaques, les composantes du champ élastique interviennent avec des *ordres de dérivation différents* dans l'expression des tenseurs γ et ρ, ceci se traduira par des problèmes locaux d'une *nature différente* de celles des problèmes globaux.

3. Propriétés de l'opérateur d'éclatement périodique

Pour tout $v \in L^2(\Omega)$ prolongé par 0 en dehors de Ω on définit l'opérateur $\mathcal{T}^{\varepsilon}$ par :

$$\mathcal{T}^{\varepsilon}(v)(x,y) = v\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right] + \varepsilon y\right) \in L^2(\Omega \times Y), \quad x \in \Omega,\ y \in Y$$

et on regroupe ses principales propriétés dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.

(i) *Pour tout* $v \in L^1(\Omega^\varepsilon)$ *on a la formule d'intégration approchée* :

$$\left|\int_{\Omega^\varepsilon} v(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{|Y^*|}\int_{\Omega\times Y^*} \mathcal{T}^\varepsilon(v)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{O^\varepsilon} \left|v(x)\right|\mathrm{d}x, \quad O^\varepsilon = \left\{x \in \Omega^\varepsilon \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega^\varepsilon) < 2\varepsilon\right\}$$

et pour tout $v, w \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ *on a* $\mathcal{T}^\varepsilon(vw) = \mathcal{T}^\varepsilon(v)\mathcal{T}^\varepsilon(w)$.

(ii) *Soit* $v \in L^2(\Omega)$ *alors on a la convergence forte* $\mathcal{T}^\varepsilon(v) \to v$ *dans* $L^2(\Omega \times Y^*)$.

(iii) *Soit* $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ *une suite uniformément bornée dans* $L^2(\Omega^\varepsilon)$. *Il existe* $v \in L^2(\Omega \times Y^*)$ *tel qu'après extraction d'une sous-suite notée de la même façon on a la convergence faible suivante :*

$$\mathcal{T}^\varepsilon(v^\varepsilon) \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(\Omega \times Y^*)$$

(iv) *Soit* $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ *une suite uniformément bornée dans* $H^1(\Omega^\varepsilon)$. *Il existe deux champs de vecteurs* $v \in H^1(\Omega)$, $\bar{v} \in L^2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(Y^*))$, *tels qu'après extraction d'une sous-suite notée de la même façon on a les convergences faibles suivantes* :

$$\begin{cases} \mathcal{T}^\varepsilon(v^\varepsilon) \rightharpoonup v \quad \text{dans } L^2(\Omega \times Y^*) \\ \mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x v^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x v + \nabla_y \bar{v} \quad \text{dans } L^2(\Omega \times Y^*; \mathbb{R}^2) \end{cases}$$

l'indice y *indique la dérivation par rapport à la deuxième variable* y.

(v) *Soit* $\{v^\varepsilon\}_\varepsilon$ *une suite uniformément bornée dans* $H^2(\Omega^\varepsilon)$. *Il existe deux champs de vecteurs* $v \in H^2(\Omega)$, $\bar{v} \in L^2(\Omega, H^2_{\mathrm{per}}(Y^*))$ *tels qu'après extraction d'une sous-suite notée de la même façon on a les convergences faibles suivantes* :

$$\begin{cases} \mathcal{T}^\varepsilon(v^\varepsilon) \rightharpoonup v \quad \text{dans } L^2(\Omega \times Y^*) \\ \mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x v^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x v \quad \text{dans } L^2(\Omega \times Y^*; \mathbb{R}^2) \\ \mathcal{T}^\varepsilon(\nabla^2_x v^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla^2_x v + \nabla^2_y \bar{v} \quad \text{dans } L^2(\Omega \times Y^*; \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \end{cases}$$

Les fonctions périodiques de $H^1_{\mathrm{per}}(Y^*)$ et $H^2_{\mathrm{per}}(Y^*)$ sont supposées de moyenne nulle.
Ces résultats sont une extension aux domaines *perforés* des résultats présentés dans [5], on en donne une dé monstration complète dans [4].

4. Homogénéisation de coques « à la Koiter »

On suppose dans cette section que les composantes de chacun des quatre tenseurs c_M, c_F, d, e ne dépendent pas de la variable microscopique $\{\frac{x}{\varepsilon}\}$, en particulier pour des structures composées d'un matériau homogène ces tenseurs ne dépendent que de la variable macroscopique x avec par exemple :

$$\mathcal{T}^\varepsilon(c_M^{\alpha\beta\lambda\mu})(x,y) = c_M^{\alpha\beta\lambda\mu}(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \quad y \in Y^* \quad \text{et} \quad \mathcal{T}^\varepsilon(c_M^{\alpha\beta\lambda\mu})(x,y) = 0, \quad y \in Y \setminus Y^*.$$

On montre alors que la suite $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon\}_\varepsilon$ est uniformément bornée dans $\boldsymbol{V}_K(\Omega^\varepsilon) \times H^1(\Omega^\varepsilon)$ et qu'elle converge (cf. (4)) vers le champ limite $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ donné par le théorème qui suit.

Théorème 4.1. *Le champ élastique limite* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_K(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ *et le champ électrique limite* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *vérifient le problème variationnel* :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \big(\bar{c}_K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \bar{e}_K(\boldsymbol{v}, \varphi)\big)\sqrt{a}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}\sqrt{a}\,\mathrm{d}x & \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_K(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \big(-\bar{e}_K(\boldsymbol{u}, \psi) + \bar{d}_K(\varphi, \psi)\big)\sqrt{a}\,\mathrm{d}x = 0 & \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où les nouveaux opérateurs $\bar{c}_K, \bar{e}_K, \bar{d}_K$ *ont pour expression* :

$$\begin{cases} \bar{c}_K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \bar{c}_M^{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u})\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) + \frac{t^2}{3}\bar{c}_F^{\alpha\beta\sigma\tau}\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u})\rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) + \frac{t^2}{3}\bar{c}^{\alpha\beta\sigma\tau}\big(\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u})\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) + \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u})\rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v})\big) \\ \bar{e}_K(\boldsymbol{v}, \psi) = \bar{e}^{\alpha\beta\sigma}\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v})\partial_\sigma\psi + \frac{t^2}{3}\bar{l}^{\alpha\beta\sigma}\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v})\partial_\sigma\psi \\ \bar{d}_K(\varphi, \psi) = \bar{d}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\,\partial_\beta\psi \end{cases}$$

L'expression des tenseurs effectifs $(\bar{c}_M, \bar{c}_F, \bar{e}, \bar{d})$ *ainsi que les nouveaux tenseurs de couplage* $(\bar{c}, \bar{l})$ *sont donnés par* (3) *ci-dessous.*

Démonstration. (i) A partir d'une *nouvelle preuve* de l'inégalité de Korn sur une variété perforée on obtient la majoration uniforme : $\|u_1^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \|u_2^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} + \|u_3^\varepsilon\|_{H^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C$. On pose $\boldsymbol{V}_{\mathrm{K,per}}(Y^*) = H^1_{\mathrm{per}}(Y^*) \times H^1_{\mathrm{per}}(Y^*) \times H^2_{\mathrm{per}}(Y^*)$. Le Théorème 3.1 permet alors d'obtenir *l'existence du champ limite* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_K(\Omega)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ et *des correcteurs* $\bar{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega, \boldsymbol{V}_{\mathrm{K,per}}(Y^*))$, $\bar{\varphi} \in L^2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(Y^*))$ définis par les convergences faibles

$$\begin{cases} \mathcal{T}^\varepsilon\big(\gamma_{\alpha\beta,x}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\big) \rightharpoonup \gamma_{\alpha\beta,x}(\boldsymbol{u}) + s_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{u}}) & \text{dans } L^2(\Omega \times Y^*) \\ \mathcal{T}^\varepsilon(\rho_{\alpha\beta,x}(\boldsymbol{u}^\varepsilon)) \rightharpoonup \rho_{\alpha\beta,x}(\boldsymbol{u}) + r_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{u}}) & \text{dans } L^2(\Omega \times Y^*) \\ \mathcal{T}^\varepsilon(\nabla_x\varphi^\varepsilon) \rightharpoonup \nabla_x\varphi + \nabla_y\bar{\varphi} & \text{dans } L^2(\Omega \times Y^*) \end{cases}$$

où $s_{\alpha\beta,y}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha,y}v_\beta + \partial_{\beta,y}v_\alpha)$ et $r_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{v}}) = \partial^2_{\alpha\beta,y}\bar{v}_3 + (b^\sigma_\alpha\partial_{\beta,y}\bar{v}_\sigma + b^\sigma_\beta\partial_{\alpha,y}\bar{v}_\sigma)$.

(ii) On choisit des fonctions-test $\boldsymbol{v}^\varepsilon(x)$ de la forme

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) = \left(v_1(x) + \varepsilon\bar{v}_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),\ v_2(x) + \varepsilon\bar{v}_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),\ v_3(x) + \varepsilon^2\bar{v}_3\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

avec $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\bar{v}_i \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{per}}(\overline{Y}^*))$ ce qui permet d'obtenir le champ limite ($\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_K(\Omega)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$) et les correcteurs $\bar{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega, \boldsymbol{V}_{\mathrm{K,per}}(Y^*))$, $\bar{\varphi} \in L^2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(Y^*))$ comme unique solution du problème variationnel posé pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_K(\Omega)$, $\bar{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega, \boldsymbol{V}_{\mathrm{K,per}}(Y^*))$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\bar{\psi} \in L^2(\Omega, H^1_{\mathrm{per}}(Y^*))$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega\times Y^*} \Big(c_M^{\alpha\beta\sigma\tau}\big(\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) + s_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{u}})\big)\big(\gamma_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) + s_{\sigma\tau,y}(\bar{\boldsymbol{v}})\big) \\ \displaystyle\quad + \frac{t^2}{3}c_F^{\alpha\beta\sigma\tau}\big(\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) + r_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{u}})\big)\big(\rho_{\sigma\tau}(\boldsymbol{v}) + r_{\sigma\tau,y}(\bar{\boldsymbol{v}})\big)\Big)\sqrt{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \displaystyle\quad + \int_{\Omega\times Y^*} \mathrm{e}^{\alpha\beta\sigma}\big(\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}) + s_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{v}})\big)(\partial_\sigma\varphi + \partial_{\sigma,y}\bar{\varphi})\sqrt{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = |Y^*|\int_\Omega \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}\sqrt{a}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_{\Omega\times Y^*} \big(-\mathrm{e}^{\alpha\beta\sigma}\big(\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) + s_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{u}})\big)(\partial_\sigma\psi + \partial_{\sigma,y}\bar{\psi}) + d^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\varphi + \partial_{\alpha,y}\bar{\varphi})(\partial_\beta\psi + \partial_{\beta,y}\bar{\psi})\big)\sqrt{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(iii) On exprime les correcteurs comme combinaison linéaire des *fonctions de base* qui dépendent maintenant des *deux* variables x et y.

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{u}}(x,y) = \gamma_{\lambda\mu}\big(\boldsymbol{u}(x)\big)\bar{\boldsymbol{g}}^{\lambda\mu}(x,y) + \rho_{\lambda\mu}\big(\boldsymbol{u}(x)\big)\bar{\boldsymbol{h}}^{\lambda\mu}(x,y) + \partial_\mu\varphi(x)\bar{\boldsymbol{z}}^{\mu}(x,y) \\ \bar{\varphi}(x,y) = \gamma_{\lambda\mu}\big(\boldsymbol{u}(x)\big)\bar{\zeta}^{\lambda\mu}(x,y) + \rho_{\lambda\mu}\big(\boldsymbol{u}(x)\big)\bar{\theta}^{\lambda\mu}(x,y) + \partial_\mu\varphi(x)\bar{\eta}^{\mu}(x,y) \end{cases}$$

(iv) On découple les problèmes en $(\bar{\boldsymbol{g}}^{\lambda\mu}, \bar{\zeta}^{\lambda\mu})$, $(\bar{\boldsymbol{h}}^{\lambda\mu}, \bar{\theta}^{\lambda\mu})$ et $(\bar{\boldsymbol{z}}^{\mu}\bar{\eta}^{\mu})$ ce qui donne trois types de problèmes locaux posés dans Y^* (on vérifie qu'ils ont une solution unique qui appartient à l'espace $\boldsymbol{L}^2(\Omega, \boldsymbol{V}_{\mathrm{K,per}}(Y^*) \times H^1_{\mathrm{per}}(Y^*)))$. Pour tout $\bar{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{H}^1_{\mathrm{per}}(Y^*)$, $\bar{\psi} \in H^1_{\mathrm{per}}(Y^*)$ le problème en $(\bar{\boldsymbol{g}}^{\lambda\mu}, \bar{\zeta}^{\lambda\mu})$ s'écrit :

$$\int_{Y^*} c_{K,y}(\bar{\boldsymbol{g}}^{\lambda\mu}, \bar{\boldsymbol{v}}) + e_y(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\zeta}^{\lambda\mu}) = -\int_{Y^*} c_M^{\lambda\mu\sigma\tau} s_{\sigma\tau,y}(\bar{\boldsymbol{v}}) \quad \text{et} \quad \int_{Y^*} -e_y(\bar{\boldsymbol{g}}^{\lambda\mu}, \bar{\psi}) + d_y(\bar{\zeta}^{\lambda\mu}, \bar{\psi}) = \int_{Y^*} \mathrm{e}^{\lambda\mu\sigma}\partial_{\sigma,y}\bar{\psi}$$

le problème en $(\bar{\boldsymbol{h}}^{\lambda\mu}, \bar{\theta}^{\lambda\mu})$ s'é crit :

$$\int_{Y^*} \big(c_{K,y}(\bar{\boldsymbol{h}}^{\mu}, \bar{\boldsymbol{v}}) + e_y(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\theta}^{\mu})\big) = -\frac{t^2}{3}\int_{Y^*} c_F^{\lambda\mu\sigma\tau} r_{\sigma\tau,y}(\bar{\boldsymbol{v}}) \quad \text{et} \quad \int_{Y^*} \big(-e_y(\bar{\boldsymbol{h}}^{\mu}, \bar{\psi}) + d_y(\bar{\theta}^{\mu}, \bar{\psi})\big) = 0$$

enfin le problème en $(\bar{\boldsymbol{z}}^{\mu}, \bar{\eta}^{\mu})$ s'écrit :

$$\int_{Y^*} c_{K,y}(\bar{\boldsymbol{z}}^{\mu}, \bar{\boldsymbol{v}}) + e_y(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\eta}^{\mu}) = -\int_{Y^*} \mathrm{e}^{\alpha\beta\mu} s_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{v}}) \quad \text{et} \quad \int_{Y^*} -e_y(\bar{\boldsymbol{z}}^{\mu}, \bar{\psi}) + d_y(\bar{\eta}^{\mu}, \bar{\psi}) = -\int_{Y^*} d^{\mu\beta}\partial_{\beta,y}\bar{\psi}$$

Pour simplifier les notations on a représenté les opérateurs locaux par :

$$\begin{cases} c_{K,y}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c_M^{\alpha\beta\sigma\tau} s_{\alpha\beta,y}(\boldsymbol{u}) s_{\sigma\tau,y}(\boldsymbol{v}) + \dfrac{t^2}{3} c_F^{\alpha\beta\sigma\tau} r_{\alpha\beta,y}(\boldsymbol{u}) r_{\sigma\tau,y}(\boldsymbol{v}) \\ e_y(\boldsymbol{v}, \psi) = e^{\alpha\beta\sigma} s_{\alpha\beta,y}(\boldsymbol{v})\partial_{\sigma,y}\psi \\ d_y(\eta, \psi) = d^{\alpha\beta}\partial_{\alpha,y}\eta\partial_{\beta,y}\psi \end{cases}$$

(v) On choisit ensuite les fonctions-test $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$, $\bar{\psi} = 0$ dans (2) ce qui permet d'identifier d'une part le problème global posé sur Ω (dont on montre qu'il a une solution unique) et d'autre part l'expression des tenseurs effectifs :

$$\begin{cases} \bar{c}_M^{\alpha\beta\sigma\tau}(x) = \frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*} c_M^{\alpha\beta\lambda\mu}(\delta_\lambda^\sigma\delta_\mu^\tau + s_{\lambda\mu,y}(\bar{\boldsymbol{g}}^{\sigma\tau})) + \mathrm{e}^{\alpha\beta\lambda}\partial_{\lambda,y}\bar{\zeta}^{\sigma\tau} \\ \bar{c}^{\alpha\beta\sigma\tau}(x) = \frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*} c_F^{\alpha\beta\lambda\mu} r_{\lambda\mu,y}(\bar{\boldsymbol{g}}^{\sigma\tau}) \\ \bar{c}_F^{\alpha\beta\sigma\tau}(x) = \frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*} c_F^{\alpha\beta\lambda\mu}(\delta_\lambda^\sigma\delta_\mu^\tau + r_{\lambda\mu,y}(\bar{\boldsymbol{h}}^{\sigma\tau})) \\ \bar{e}^{\alpha\beta\sigma}(x) = \frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*} \mathrm{e}^{\alpha\beta\lambda}(\delta_\lambda^\sigma + \partial_{\lambda,y}\bar{\eta}^\sigma) + c_M^{\alpha\beta\lambda\mu} s_{\lambda\mu,y}(\bar{\boldsymbol{z}}^\sigma) \\ \bar{l}^{\alpha\beta\sigma}(x) = \frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*} c_F^{\alpha\beta\lambda\mu} r_{\lambda\mu,y}(\bar{\boldsymbol{z}}^\sigma) \\ \bar{d}^{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*} -\mathrm{e}^{\lambda\mu\alpha} s_{\lambda\mu,y}(\bar{\boldsymbol{z}}^\beta) + d^{\alpha\lambda}(\delta_\lambda^\beta + \partial_{\lambda,y}\bar{\eta}^\beta) \end{cases} \tag{3}$$

(vi) On démontre enfin *les convergences fortes* :

$$\begin{cases} 1_{\Omega^\varepsilon}\big(\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) - \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) - \mathcal{U}^\varepsilon\big(s_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{u}})\big)\big) \to 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ 1_{\Omega^\varepsilon}\big(\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) - \rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) - \mathcal{U}^\varepsilon\big(r_{\alpha\beta,y}(\bar{\boldsymbol{u}})\big)\big) \to 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ 1_{\Omega^\varepsilon}\big(\nabla\varphi^\varepsilon - \nabla\varphi - \mathcal{U}^\varepsilon(\nabla_y\bar{\varphi})\big) \to 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

où $\mathcal{U}^\varepsilon$ est l'opérateur de moyennisation $\mathcal{U}^\varepsilon(v)(x) = \frac{1}{|Y^*|}\int_{Y^*} v(\alpha[\frac{x}{\alpha}] + \alpha z, \{\frac{x}{\alpha}\})\,\mathrm{d}z$, $\forall v \in L^2(\Omega \times Y^*)$. On trouve dans [4] la démonstration détaillée ainsi que l'étude des plaques minces.

Remarques

– La périodicité considérée ici est liée au *repère curviligne*.
– On constate que les tenseurs $\bar{c}_M, \bar{e}, \bar{d}$ sont calculés de la même façon que dans le cas des plaques membranaires [4] mais que le couplage membrane-flexion des coques de Koiter modifie notablement l'expression des opérateurs globaux $\bar{c}_K, \bar{e}_K, \bar{d}_K$ du problème limite par l'introduction des tenseurs de couplage $\bar{c}, \bar{l}$. Des couplages du même type, qui apparaissent naturellement dans le cas des plaques hétérogènes, ont été mis en évidence dans le cas des coques [6–9].
– Insistons encore sur le fait que dans le cas des coques même si le matériau considéré initialement est homogène (les tenseurs c_M, c_F, e, d dépendent toujours de x à cause de la géométrie de la coque et de $\{\frac{x}{\varepsilon}\}$ à cause des perforations) les coefficients « homogénéisés » dépendent encore de la variable « lente » x comme on le voit dans les expressions (3).

Remerciements

Ce travail a été rendu possible grâce au projet européen "Smart Systems" HPRN-CT-2002-00284.

Références

[1] G. Griso, B. Miara, Periodically perforated piezoelectric structures, modelling and control, in: AMAS Workshop on Smart Materials and Structures, SMART'03, Jadwisin, September 2–5, 2003, pp. 25–31.
[2] A. Preumont, A. François, P. de Man, Spatial filtering with piezoelectric films via porous electrod design, in: Proceedings of the 13th International Conference on Adaptive Structures and Technologies, October 7–9, Berlin, Germany, 2002.
[3] Ch. Haenel, Analyse et simulation numérique de coques piézoélectriques, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, 2000.
[4] M. Ghergu, G. Griso, H. Mechkour, B. Miara, Homogenization of thin piezoelectric structures (2004), à paraitre.
[5] A. Cioranescu, A. Damlamien, G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 99–104.
[6] D. Caillerie, E. Sanchez-Palencia, A new kind of singular stiff problems and application to thin elastic shells, Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 5 (1) (1995) 47–66.
[7] D. Caillerie, E. Sanchez-Palencia, Elastic thin shells: asymptotic theory in the anisotropic and heterogeneous cases, Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 5 (4) (1995) 473–496.
[8] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques, Masson, 1997.
[9] T. Lewiński, J.J. Telega, Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., vol. 52, 2000.