Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Mecanique 333 (2005) 123–126
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Une méthode inverse d'ordre un pour les problèmes de complétion de données

Alain Cimetière [a,*], Franck Delvare [b], Frédéric Pons [c]

[a] *LMP, université de Poitiers, boulevard Marie et Pierre Curie, téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France*
[b] *LEES, université d'Orléans et ENSI de Bourges, 10, boulevard Lahitolle, 18020 Bourges cedex, France*
[c] *LEA, université de Poitiers et ENSMA, boulevard Marie et Pierre Curie, téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France*

Reçu le 7 juillet 2004 ; accepté après révision le 30 novembre 2004

Disponible sur Internet le 7 janvier 2005

Présenté par Huy Duong Bui

Résumé

Une méthode itérative est présentée pour la résolution des problèmes inverses de type Cauchy. Les itérations successives vérifient exactement les équations d'équilibre. Les tests numériques attestent de la précision de la méthode et de sa capacité à résoudre efficacement ces problèmes lorsque le bord du domaine n'est pas régulier. ***Pour citer cet article : A. Cimetière et al., C. R. Mecanique 333 (2005).***

Abstract

A first order inverse method for the data completion problem. An iterative resolution method for inverse Cauchy problems is presented. The successive iterations satisfy the equilibrium equations exactly. Numerical simulations prove the accuracy of the method and its ability to solve Cauchy problems when the domain boundary is not regular. ***To cite this article: A. Cimetière et al., C. R. Mecanique 333 (2005).***

Mots-clés : Solides et structures ; Problème inverse ; Équation de Laplace ; Complétion de données

Keywords: Solids and structures; Inverse problem; Laplace's equation; Data completion

1. Introduction

Certaines techniques d'identification nécessitent de connaître à la fois déplacements et forces ou températures et flux de chaleur sur toute la frontière d'un domaine, alors que ces quantités ne sont accessibles que sur une partie

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : alain.cimetiere@univ-poitiers.fr (A. Cimetière), franck.delvare@ensi-bourges.fr (F. Delvare), pons@ensma.fr (F. Pons).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2004.11.009

de celle-ci. Voir par exemple [1], en ce qui concerne l'identification de fissures. Les problèmes de complétion de données sont des problèmes de Cauchy pour des équations aux dérivées partielles. Le caractère mal posé de ces problèmes rend leur résolution très délicate [2]. Déjà, dans les années 60, de nombreux travaux leur ont été consacrés [4–7].

Une technique de complétion de données a été développée dans [8] et mise en oeuvre dans un problème d'identification de fissures [9]. L'opérateur modèle choisi était le laplacien. Cette technique, appelée dans la suite méthode d'ordre zéro, s'apparente à une méthode de Tikhonov itérative [3], où la connaissance a priori est réactualisée à chaque itération. La particularité de la technique est qu'à chaque itération la solution déterminée vérifie exactement « l'équilibre ». Lorsque les données sont compatibles, la suite des itérations converge vers la solution du problème de Cauchy. Des niveaux de bruit importants sur les données sont très bien tolérés et le nombre de données peut être très inférieur au nombre de quantités à déterminer [8].

La reconstruction de la dérivée normale sur la frontière du domaine par la méthode d'ordre zéro présente un niveau de précision bien inférieur à celui obtenu pour la reconstruction de la fonction elle-même (les erreurs sont environ dix fois plus grandes). On note également que la méthode d'ordre zéro gère assez mal les discontinuités de dérivée normale, surtout dans les coins.

L'objet de cette note est de présenter une évolution de la méthode d'ordre zéro, que l'on appellera méthode d'ordre un. Ses deux principaux apports sont une amélioration sensible de la convergence et une amélioration très nette de la reconstruction des solutions, en particulier de la dérivée normale, lorsque la frontière du domaine présente des points anguleux. La méthode de quasi-réversibilité [5] est inadaptée pour gérer les problèmes de complétion de données, mais on s'inspire de l'idée que les équilibres sont aussi solutions d'un problème d'ordre supérieur, pour construire la méthode d'ordre un.

2. La méthode d'ordre un

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$. Soient ϕ_d et ψ_d deux fonctions données sur Γ_d. On se propose de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \tag{1}$$

où u' désigne la dérivée normale de u. Le problème (1) admet au plus une solution. L'existence d'une solution n'est assurée que si les données ϕ_d et ψ_d sont compatibles, c'est à dire sont respectivement les traces sur Γ_d d'une fonction harmonique et de sa dérivée normale. Dans la suite, cette fonction harmonique est supposée de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$. On introduit maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \phi_d, \quad u_1 = \phi_{1d}, \quad u_2 = \phi_{2d} & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d, \quad u_1' = \psi_{1d}, \quad u_2' = \psi_{2d} & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = u_1 n_1 + u_2 n_2 & \text{sur } \Gamma \\ \int_\Gamma (u_1 n_1 + u_2 n_2)\, \mathrm{d}s = 0 \end{cases} \tag{2}$$

où n_1 et n_2 sont les composantes de la normale unitaire extérieure à Ω. Les quantités ϕ_{1d}, ϕ_{2d}, ψ_{1d}, ψ_{2d} sont évaluées à partir des données ϕ_d, ψ_d, en écrivant que u_1 et u_2 sont les deux dérivées partielles de u et en utilisant l'équation $\Delta u = 0$ sur Γ_d. Ainsi les valeurs de u_1, u_2, u_1', u_2' se trouvent données par les relations :

$$\begin{cases} \phi_{1d} = \psi_d n_1 - \dfrac{\mathrm{d}\phi_d}{\mathrm{d}s} n_2, \quad \phi_{2d} = \psi_d n_2 + \dfrac{\mathrm{d}\phi_d}{\mathrm{d}s} n_1 \\ \psi_{1d} = -\dfrac{\mathrm{d}\phi_{2d}}{\mathrm{d}s}, \qquad \psi_{2d} = \dfrac{\mathrm{d}\phi_{1d}}{\mathrm{d}s} \end{cases} \tag{3}$$

Lorsque les données ϕ_d et ψ_d sont compatibles, toutes les données du problème (2) sont compatibles et u_1, u_2 sont alors les dérivées partielles de u. Le problème (2) peut être reformulé en distinguant les relations caractérisant l'équilibre :

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \int_\Gamma (u_1 n_1 + u_2 n_2)\,\mathrm{d}s = 0 \tag{4}$$

et les relations traduisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u = \phi_d, & u_1 = \phi_{1d}, \quad u_2 = \phi_{2d} \quad \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d, & u_1' = \psi_{1d}, \quad u_2' = \psi_{2d} \quad \text{sur } \Gamma_d \\ u' = u_1 n_1 + u_2 n_2 & \qquad\qquad\qquad\quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{5}$$

La solution de ce problème est recherchée dans l'espace $H(\Omega)$ défini par :

$$H(\Omega) = \left\{(v, v_1, v_2) \in \left[H^1(\Omega)\right]^3 \text{ vérifiant les équations d'équilibre (4)}\right\}$$

On définit ensuite $H(\Gamma)$, l'espace composé des traces sur Γ des éléments de $H(\Omega)$ et de leurs dérivées normales. Pour $\Phi_d = (\phi_d, \phi_{1d}, \phi_{2d}, \psi_d, \psi_{1d}, \psi_{2d})$, une formulation équivalente au problème (2) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U = (u, u_1, u_2, u', u_1', u_2') \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ U = \Phi_d \quad \text{sur } \Gamma_d \\ u' = u_1 n_1 + u_2 n_2 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{6}$$

L'algorithme itératif suivant est introduit pour résoudre (2). Il est appelé méthode d'ordre un et, comme l'algorithme proposé dans [8], reprend l'esprit de la méthode itérative de Tikhonov : étant donné $c > 0$ et $U^0 \in H(\Gamma)$,

$$\begin{cases} \text{trouver } U^{k+1} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^k(U^{k+1}) \leqslant J_c^k(V) \quad \forall V \in H(\Gamma) \text{ avec :} \\ J_c^k(V) = \left\|v' - (v_1 n_1 + v_2 n_2)\right\|_{-1/2,\Gamma}^2 + \|V - \Phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|V - U^k\|_{H(\Gamma)}^2 \end{cases} \tag{7}$$

Supposant que le problème (1) possède une solution de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$, la preuve de la convergence de l'algorithme est similaire à celle établie dans [8] pour l'algorithme de la méthode d'ordre zéro. La discrétisation de l'algorithme conduit à chaque itération à la résolution d'un système linéaire pour lequel la matrice ne dépend pas de k. La condition d'équilibre global, traduite par la dernière égalité de (4), joue un rôle capital. Si on la retire de la définition de $H(\Omega)$, la méthode d'ordre un donne alors des résultats bien moins précis.

3. Tests numériques

Les simulations numériques ont pour but de comparer la méthode d'ordre un à la méthode d'ordre zéro [8]. Le domaine considéré est donné sur la Fig. 1, la fonction à reconstruire est :

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{(x_1 - 1/2)^2 + {x_2}^2}$$

Le support Γ_d des données est composé de l'arc de cercle de rayon 1. Les données ϕ_d et ψ_d sont générées à partir de la fonction solution. Les données concernant u_1 et u_2 sont évaluées numériquement à partir des valeurs de ϕ_d et ψ_d, ces valeurs pouvant être bruitées. Les dérivées tangentielles figurant dans (3) ont été calculées en utilisant une technique de régression parabolique sur 11 points. La Fig. 2 donne la reconstruction de la dérivée normale par la méthode d'ordre un. On constate que la reconstruction devient précise lorsque le domaine est à frontière non régulière. On s'intéresse désormais au cas de données entachées d'un bruit de mesure. Le support des données est le même que précédemment. Les données ϕ_d et ψ_d sont entachées d'un bruit de 1%. La Fig. 3 donne la reconstruction de la dérivée normale par la méthode d'ordre zéro et la Fig. 4 celle par la méthode d'ordre un. Ces reconstructions montrent que la méthode d'ordre un fournit des résultats beaucoup plus précis, surtout en présence de bruit. Dans ces tests, le nombre d'inconnues est le double de celui des données.

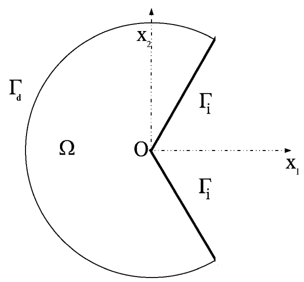

Fig. 1. Domaine d'étude.

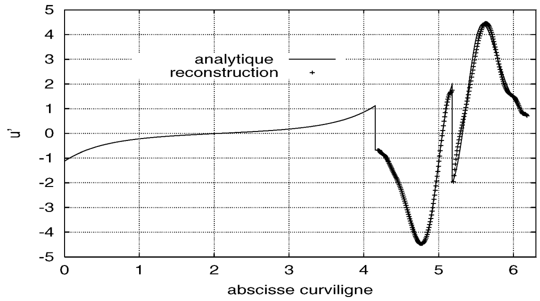

Fig. 2. Reconstruction de u' sur Γ_i (ordre un).

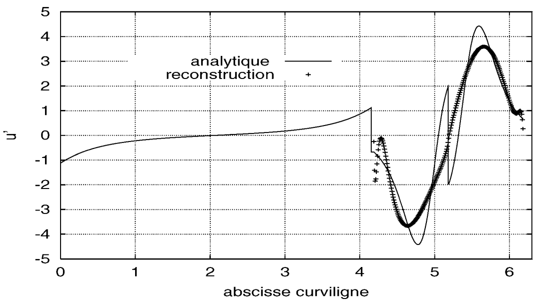

Fig. 3. Reconstruction de u' sur Γ_i (ordre zéro), bruit sur u et u' de 1%.

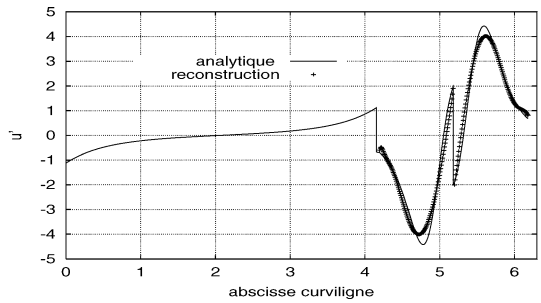

Fig. 4. Reconstruction de u' sur Γ_i (ordre un), bruit sur u et u' de 1%.

4. Conclusion

La méthode d'ordre un permet d'obtenir un niveau de précision pour la reconstruction de la dérivée normale comparable à celui obtenu pour la reconstruction de la fonction elle-même par la méthode d'ordre zéro. La méthode d'ordre un est capable de reconstruire des fonctions et leurs dérivées normales lorsque le domaine est à frontière non régulière, en restituant bien les discontinuités de dérivée normale. La comparaison à la méthode d'ordre zéro atteste de l'efficacité et de la robustesse de la méthode d'ordre un, en particulier de sa capacité à travailler en présence de bruit. Par ailleurs, ce test ainsi que d'autres essais numériques ont montré la capacité de la méthode à débruiter.

5. Remerciements

Les auteurs expriment leur gratitude à H.D. Bui ainsi qu'aux rapporteurs pour leurs suggestions.

Références

[1] S. Andrieux, A. Ben Abda, H.D. Bui, Reciprocity principle and crack identification, Inverse Probl. 15 (1999) 59–65.
[2] H.D. Bui, Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux, Eyrolles, 1993.
[3] H.W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, Regularisation of Inverse Problems, Kluwer Academic, 1996.
[4] M.M. Laurentiev, Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics, Springer-Verlag, 1967.
[5] R. Lattès, J.L. Lions, Méthode de quasi-reversibilité et applications, Dunod, 1967.
[6] A. Bryson, Y.C. Ho, Applied Optimal Control, Blaisdell, 1969.
[7] A. Tikhonov, V. Arsénine, Méthode de résolution de problèmes mal posés, Mir, 1976.
[8] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, F. Pons, Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization, Inverse Probl. 17 (2001) 553–570.
[9] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, M. Kallel, F. Pons, Reconstruction of cracks from incomplete boundary data, Inverse Probl. Eng. 10 (2002) 377–392.